بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

حساب توابع عملگری

استاد راهنما:

دکتر حسین مؤمنایی کرمانی

استاد مشاور:

دکتر عباس سالمی پاریزی

مؤلف:

محمد امین اسماعیلی مزیدی

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و کامپوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو :

استاد راهنما :

استاد مشاور :

داور ۱ :

داور۲ :

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده :

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی و به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است و به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند، این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم.

تشکر و قدردانی:

سپاس و ستایش خداوندی که گوهر اندیشه و دانش را در صدف وجود انسان به ودیعه گذاشت تا او را از دیگر آفریده ها متمایز کند. اکنون که با استعانت از درگاه پروردگار منان گامی دیگر از زندگی ام را پشت سر نهادم بر خود لازم می دانم مراتب سپاس و قدردانی صمیمانه خویش را تقدیم به همه کسانی کنم که طی این مدت مرا یاری داده اند.

سپاس فراوان خود را به استاد فرهیخته و گرانقدر خود آقای دکتر حسین مومنایی کرمانی تقدیم می نمایم که همواره با حسن خلق و شکیبایی مرا راهنما بودند.

از استاد گرانقدر آقای دکتر عباس سالمی که مشاوره این پایان نامه را به عهده داشتند تشکر می نمایم.

بر خویش لازم می دانم که از آقایان دکتر حسین محبی و دکتر غلامرضا آقاملایی به خاطر قبول زحمت داوری این پایان نامه تشکر نمایم.

در نهایت از همه دوستانی که در این مدت مرا یاری نموده اند به ویژه آقای هادی آزادی مطلق که همواره دست یاریشان همراهم بوده است تشکر می نمایم.

محمدامین اسماعیلی مزیدی

شهریور ۱۳۹۰

چکیده :

در این پایان نامه در ابتدا کران‌هایی برای نرم مشتق‌های مرتبه اول و مرتبه دوم نگاشت قدر مطلق به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن‌ها یک کران اغتشاش برای نگاشت قدرمطلق به دست می‌آوریم. همچنین نرم مشتق مرتبه اول نگاشتی‌هایی که یک عملگر معکوس‌پذیر را به قسمت یکانی آن درتجزیه قطبی و به عامل‌های Q و R در تجزیه QR می‌برند را محاسبه می‌کنیم و با استفاده از آن یک کران اغتشاش برای این تجزیه‌ها به دست می‌آوریم. در قسمت دوم، برای یک تابع هموار f روی فضای عملگرهای کراندار در فضای هیلبرت، یک فرمول برای جابجاگر مرتبه nام $[[[f(A),X],X]....,X]$ بر حسب مشتق mام $D^m f(A)$ به دست آورده شده است. نشان داده می شود که این فرمول‌ها در به دست آوردن کران‌هایی برای نرم‌های جابجاگرهای تعمیم یافته $f(A)X-X\,f(B)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در قسمت سوم، جواب معادله خطی عملگری $\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}XB^{i}=Y$ به وسیله فرمول

$$X=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\pi}\int_0^{\infty}(t+A^{n})^{-1}Y\ (t+B^{n})^{-1}t^{\frac{1}{n}}\ dt$$

داده شده است به طوریکه طیف A و B در ناحیه $\left\{z: z\neq 0,-\frac{\pi}{n}\leq \arg z\leq\frac{\pi}{n}\right\}$ قرار دارند.

کلمات کلیدی : مشتق فرشه، یکنوای عملگری، کران اغتشاش ، نرم عملگر، نرم متقارن، پایایی یکانی، نمایش انتگرالی

با تشکر از حمایت‌های مالی قطب جبر خطی و بهینه‌سازی دانشگاه شهید باهنر کرمان

مقدمه

در این پایان نامه فرض بر این است که خواننده با مفاهیم پایه و اساسی جبرخطی آشنایی کامل دارد. برای درک بهتر مفاهیم و قضایا، می‌توان به [۸و۹] مراجعه کرد. علاوه بر این، اطلاعات اولیه‌ای از آنالیز تابعی،آنالیز مختلط و هندسه دیفرانسیل نیاز است. این پایان نامه از نظر محتوایی به سه قسمت تقسیم می‌شود. فصل اول شامل مباحث پایه‌ای است و برای اغلب موضوعاتی که در این پایان نامه آورده شده است مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این فصل هدف یادآوری کردن مفاهیم و قضایای مهم و طرح کردن نمادگذاری‌هایی است که مورد استفاده قرار گرفته شده. فصل‌های ۲و۳ شامل نامساوی‌ها و کران اغتشاش برای توابع ماتریسی است. آخرین فصل شامل معادله عملگری به صورت $\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}XB^{i}=Y$ است وجواب آن به صورت $X=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\pi}\int_0^\infty (t+A^n)^{-1}Y(t+B^n)^{-1}t^{\frac{1}{n}}\,dt$ می‌باشد.

محتوای هر فصل به طور خلاصه در قسمت اول آن آورده شده. در اینجا توجه خاصی به جبر چند خطی و نامساوی‌ها روی ماتریس‌ها و توابع ماتریسی شده است. این قرارداد که ضرب داخلی $\langle u,v\rangle$ روی متغیر uخطی و روی متغیر v مزدوج خطی است پذیرفته می‌شود. اگر u و v بردارهای ستونی باشند، آنگاه u^*v حاصلضرب یک بردار سطری و یک بردار ستونی است. نرم $\|\|\cdot\|\|$ پایا روی ماتریس‌ها گفته می‌شود هر گاه به ازای هر A، تساوی $\|\|A\|\|=\|\|UAV\|\|$، به ازای هر ماتریس یکانی U و V، برقرار باشد. سایر نرم‌ها با اندیس‌های خاصی نمایش داده می‌شوند. برای مثال فربنیوس- نرم به صورت $\|A\|_2$ نوشته می‌شود. در این پایان نامه، تعدادی نماد مورد استفاده قرار گرفته شده است. برای یک ماتریس A، نماد $|A|$ به جای ماتریس نیمه معین مثبت $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ به کاربرده می‌شود و $\sigma(A)$ نمایش طیف آن است. یک جایگشت روی n اندیس با نماد σ نمایش داده می‌شود. در این حالت $\sigma(j)$ تصویر اندیس j تحت نگاشت σ است. واژه ماتریس و عملگر در این پایان نامه به جای یکدیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند، به این معنی که وقتی یک‌گزاره در مورد عملگرها از بعد متناهی باشد، واژه ماتریس به کاربرده می‌شود. اگریک گزاره برای فضاهای ازبعد نامتناهی نیز درست باشد، می‌توان

واژه ماتریس ویا واژه عملگر را به کاربرد. تعدادی از قضیه ها در این پایا ن نامه برای فضاهای از بعد نامتناهی نیز قابل گسترش هستند.

فهرست

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

فرض کنید $L(V,W)$ فضای همه عملگرهای خطی از فضای برداری با بعد متناهی V به فضای برداری با بعد متناهی W باشد. اگر پایه های فضاهای V و W ثابت در نظر گرفته شوند،آنگاه چنین عملگری یک ماتریس متناظر منحصر به فرد نسبت به این پایه ها دارد. چون یک یکریختی بین عملگرها و ماتریسهای متناظر آن ها وجود دارد، بنابراین به طور معمول آن ها را به جای یکدیگر به کار می برند. پایه های عملگرهای روی فضاهای هیلبرت متعامد یکه انتخاب می‌شوند. فرض کنید $A\in L(H,K)$ و $E=\{e_1,...,e_n\}$ یک پایه متعامد از H و $F=\{f_1,...,f_m\}$ یک پایه متعامد یکه از Kباشد. آنگاه درایه (i,j) از ماتریس A وابسته به این پایه ها به صورت زیر است :

$$a_{ij}=f_j^{*}A\,e_i=\langle A\,e_i,f_j\rangle$$

۲.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز ماتریسی و آنالیز تابعی

تعریف ۱.۲.۱. الحاقی یک عملگر $A\in L(H,K)$، عملگر منحصر به فرد A^{*}در $L(K,H)$است که رابطه $\langle z,Ax\rangle_K=\langle A^{*}z,x\rangle_H$ برای همه $x\in H$ و $z\in K$ برقرار است.

برای فضای $L(H,H)$ نماد $L(H)$ را به کار می بریم. در این فصل و فصل های بعد هر جا در مورد عملگر A صحبت می کنیم عملگر A را عضو فضای $L(H)$ فرض می‌کنیم و H یک فضای هیلبرت ازبعد متناهی است.

تعریف ۲.۲.۱. عملگر A را خود الحاق یا هرمیتی گوییم اگر $A=A^{*}$.

تعریف ۳.۲.۱. عملگر A را پاد هرمیتی گوییم اگر $A=-A^{*}$.

تعریف ۴.۲.۱. عملگر A را یکانی گوییم اگر $AA^{*}=I=A^{*}A$.

تعریف ۵.۲.۱. عملگر A را نرمال گوییم اگر $AA^{*}=A^{*}A$.

مجموعه ماتریس های $n\times n$ روی میدان F را با $M_n(F)$ نشان می دهیم. میدان F معمولاً اعداد مختلط $\mathbb{C}$است که در این حالت مجموعه ماتریس ها را با M_n نشان می دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. مجموعه همه $\lambda \in \mathbb{C}$ که مقدار ویژه $A \in M_n$ می باشند را طیف A گویند وآن را با نماد $\sigma(A)$ نمایش می دهند.

تعریف ۷.۲.۱. چند جمله ای $P(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + ... + a_1 t + a_0$ را در نظر بگیرید. در این صورت ماتریس $P(A)$ چنین تعریف می شود :

$$P(A) \equiv a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + ... + a_1 A + a_0 I$$

قضیه (شور) ۸.۲.۱. فرض کنید $A \in M_n$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, ..., \lambda_n$ داده شده است. ماتریس یکانی $U \in M_n$ وجود دارد به طوریکه $U^* A U = T = \left[t_{ij} \right]$ یک ماتریس بالا مثلثی است با درایه های قطری $t_{ii} = \lambda_i \ , \ i = 1, ..., n$. در واقع هر ماتریسی مربعی هم ارز یکانی با یک ماتریس بالا مثلثی است که درایه های روی قطری اصلی آن مقادیر ویژه هستند.

قضیه(طیفی) ۹.۲.۱. اگر $A \in M_n$ یک ماتریس نرمال باشد، آنگاه A به طور یکانی قطری شدنی است. یعنی یک ماتریس یکانی $U \in M_n$ وجود دارد که $U^* A U = D$ و D یک ماتریس قطری است بطوریکه درایه های روی قطر اصلی آن مقادیر ویژه است.

قضیه طیفی، تعریف یک تابع از ماتریس های نرمال را آسان می کند.

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر f یک تابع مختلط باشد و D یک ماتریس قطری با درایه های روی قطراصلی $\lambda_1, ..., \lambda_n$ باشد، آنگاه $f(D)$ یک ماتریس قطری با درایه های روی قطر اصلی $f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n)$ است. اگر $A = Q D Q^*$، آنگاه $f(A) = Q f(D) Q^*$.

قضیه ۱۱.۲.۱. برای هر ماتریس $A \in M_n$، سری $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ...$ همگراست. ماتریس e^A معکوس پذیر است و $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

قضیه (تجزیه QR) ۱۲.۲.۱. هر ماتریس معکوس پذیر A، یک تجزیه منحصر بفرد $A = QR$ دارد بطوریکه R بالا مثلثی و Q یکانی است.

تعریف ۱۳.۲.۱. یک عملگر هرمیتی A، مثبت یا نیمه معین مثبت گفته می‌شود اگر به ازای هر $x\in H$، داشته باشیم $x^{*}A\,x\geq 0$. نمادگذاری $A\geq 0$، به این معنی است که A یک عملگر مثبت است. اگر به ازای هر $x\neq 0$ داشته باشیم $x^{*}A\,x>0$، در اینصورت گوییم A معین مثبت یا اکیدا مثبت است و نمادگذاری $A>0$ را برای آن بکار می‌بریم. یک عملگر مثبت، اکیدا مثبت است اگر و فقط اگر معکوس پذیر باشد. برای هرعملگر دلخواه A ، $A^{*}A$ همیشه مثبت است و ریشه منحصر به فرد مثبت آن با نماد $|A|$ نشان داده می‌شود. در واقع $|A|=(A^{*}A)^{\frac{1}{2}}$.

تعریف ۱۴.۲.۱. مقادیر ویژه $|A|$ مقادیر تکین A گفته می‌شود و همیشه آن ها به صورت نزولی مرتب می‌شوند و نماد گذاری $S_1(A)\geq S_2(A)\geq ......\geq S_n(A)$ برای آن ها به کاربرده می‌شود.

قضیه ۱۵.۲.۱. هرعملگر A می تواند به صورت $A=UP$ تجزیه شود به طوریکه U یکانی است و P مثبت است. در این تجزیه قسمت مثبت p منحصر به فرد است و $P=|A|$. قسمت یکانی U منحصر به فرد است اگر A معکوس پذیر باشد، این تجزیه را تجزیه قطبی[۱] می گویند.

قضیه ۱۶.۲.۱. هرعملگر A را می توان به صورت مجموع $A=\operatorname{Re}A+i\,\operatorname{Im}A$ تجزیه کرد بطوریکه $\operatorname{Re}A=\dfrac{A+A^{*}}{2}$ و $\operatorname{Im}A=\dfrac{A-A^{*}}{2i}$. این تجزیه را تجزیه دکارتی[۲] عملگر A به قسمت های حقیقی و موهومی آن گویند. عملگرهای $\operatorname{Re}A$ و $\operatorname{Im}A$ هر دو هرمیتی هستند.

[1]Polar decomposition
[2] Cartesian decompposision

تعریف ۱۷.۲.۱. نرم عملگر A به صورت زیر تعریف می شود :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

برای هر عملگر A داریم :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle y, Ax\rangle|$$

اگر A هرمیتی باشد، آنگاه

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, Ax\rangle|$$

برای هر عملگر A داریم :

$$\|A\| = s_1(A) = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$$

وقتی A نرمال است داریم :

$\|A\| = \max\{|\lambda_j| :$ است A یک مقدار ویژه $\lambda_j\}$

برای تشخیص این نرم از نرم‌هایی که بعداً در نظر گرفته می‌شود آن را نرم عملگر[۳] یا نرم مقید[۴] می نامند.

تعریف ۱۸.۲.۱. اگر a_{ij} درایه های ماتریس متناظر A باشند، آنگاه

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

این نرم را فروبنیوس نرم می‌نامند.

[3] Operator norm
[4] Bound norm

تعریف ۱.۲.۱۹. برای هر دو نرم $\| A \|$ و $\| A \|_2$ و به ازای هر U و V یکانی داریم :

$$\| A \| = \| U\, AV \| \ , \ \| A \|_2 = \| U\, AV \|_2$$

به این خاصیت پایائی یکانی گفته می‌شود.

قضیه ۱.۲.۲۰. هر دو نرم روی فضاهای با بعد متناهی هم ارز هستند. برای نرم های $\| A \|$ و $\| A \|_2$ داریم :

$$\| A \| \le \| A \|_2 \le n^{\frac{1}{2}} \| A \|$$

قضیه ۱.۲.۲۱. اگر $\| A \| \le 1$، آنگاه $I - A$ معکوس پذیر است و سری

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ...$$

همگراست. این سری را سری نیومن[5] می‌نامند.

اگر M و N زیر فضاهای متمم متعامد از فضای H باشد، آنگاه این حقیقت که هر بردار x در H یک نمایش منحصر به فرد $x = u + v$ دارد بطوریکه $u \in M$ و $v \in N$ نتیجه می دهد H با $M \oplus N$ یکریخت است، در اینصورت می توان نوشت $H = M \oplus N$. اگر $H = M \oplus N$، آنگاه می توان A رابه صورت ماتریس بلوکی $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ نوشت به طوریکه $B \in L(M)$ و $C \in L(N, M)$.

تعریف ۱.۲.۲۲. زیر فضای M از فضای H را تحت A پایا گوییم هرگاه به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم $Ax \in M$. اگر زیر فضای M تحت A پایا باشد، آنگاه در نمایش ماتریسی بلوکی $D = 0$. اگر فضای M و فضای متمم متعامد آن یعنی فضای N تحت A پایا باشند، آنگاه گفته می‌شود M، A را کاهش می دهد. در این حالت C و D هر دو برابر صفر است. دراینصورت گفته می‌شود که عملگر A برابر مجموع مستقیم B و E است و به صورت $A = B \oplus E$ نوشته می شود.

[5]Neumann series

قضیه ۱.۲.۲۳. اگر $A = A_1 \oplus A_2$، در اینصورت $\|A\| = \max(\|A_1\|, \|A_2\|)$.

ماتریس $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ که درایه های آن توا بعی از پارامترعددی t هستند را پیوسته، انتگرالپذیر و مشتق پذیر نسبت به t گوییم هرگاه تمام درایه های این ماتریس نسبت به t متناظراً پیوسته ، انتگرالپذیر و مشتق پذیر باشند. برای مشتق‌گیری از ماتریس $A(t)$ ازتک تک درایه‌ها نسبت به t مشتق می‌گیریم و همچنین برای انتگرال‌گیری از ماتریس $A(t)$ ازتک تک درایه‌ها نسبت به t انتگرال می‌گیریم. جزییات بیشتر مربوط به این مطلب در [۱۰] آورده شده است. در زیر مثال‌هایی از این مطلب آورده شده است.

مثال ۱.۲.۲۴.

$$i)\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$ii)\frac{d}{dt}(At+B) = A$$

$$iii)\int i\,e^{-isA}(AX - XA)\,e^{isA}ds = -e^{-isA}X\,e^{isA} \ .$$

تعریف ۱.۲.۲۵. حاصلضرب شور[6] یا حاصلضرب هادامارد[7] دو ماتریس A و B به صورت ماتریس $A \circ B$ تعریف می شود که درایه (i, j) آن به صورت $a_{ij}\ b_{ij}$ است.

۱.۳ تعاریف مقدماتی یکنوای عملگری و نتایج و قضایای مربوط به آن

فرض کنید f یک تابع حقیقی تعریف شده روی بازه I باشد. اگر $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ یک ماتریس قطری باشد که درایه های قطری λ_j آن در I است، دراینصورت تعریف می‌کنیم $f(D) = diag(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$. اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد که مقادیر ویژه λ_j آن در I باشد، آنگاه یک ماتریس یکانی U وجود دارد بطوریکه $A = UDU^*$ و D

[6] Schur product
[7] Hadamard product

یـک مـاتریس قطـری اسـت. در اینصـورت تعریـف مـی کنـیم $f(A)=Uf(D)U^{*}$. بـه ایـن روش مـی تـوان $f(A)$ را بـرای همـه مـاتریس هـای هرمیتـی کـه مقـادیر ویـژه آن هـا در I هسـتند تعریـف کـرد. همیشـه فـرض بـراین اسـت کـه توابـع درنظرگرفتـه شـده، تـابع هـایی حقیقـی هسـتند کـه بـر روی یـک بـازه تعریـف شـده انـد و بسـط آن‌هـا روی مـاتریس هـای هرمیتـی نیـز بـه همـین روشـی اسـت کـه ذکـر شـد. نمـاد گـذاری $A\leq B$ را بـه ایـن مفهـوم بـه کـار مـی بـریم کـه A و B هرمیتی هستند و $B-A\geq 0$.

تعریـف ۱.۳.۱. یـک تـابع حقیقـی f یکنـوای ماتریسـی از مرتبـه n گفتـه مـی‌شـود اگـر نسـبت بـه ماتریس های هرمیتی از مرتبه $n\times n$ یکنوا باشد. یعنی اگر $A\leq B$، نتیجه بگیریم که $f(A)\leq f(B)$.

تعریف ۲.۳.۱. اگر به ازای هر n، f یکنوای ماتریسی از مرتبه n باشـد،آنگاه مـی گـوییم f یکنـوای ماتریسی یا یکنوای عملگری است. به راحتی می‌توان دیدکه اگـر f و g یکنـوای عملگـری باشـند و α,β اعداد حقیقی مثبتی باشند، آنگاه $\alpha f+\beta g$ نیز یکنوای عملگری است. اگر f_n یکنوای عملگری باشد و $f_n(x)\to f(x)$، آنگاه f نیز یکنوای عملگری است.

مثال ۳.۳.۱. تابع $f(t)=\alpha+\beta t$ یکنوای عملگری است برای هر $\beta\geq 0,\alpha\in\mathbb{R}$.

مثال ۴.۳.۱. تابع $f(t)=t^{2}$ روی $[0,\infty)$ یکنوای عملگری نیست. به عبارت دیگر ماتریس های مثبـت A و B وجود دارند به طوریکه $B-A$ مثبـت اسـت امَا $B^{2}-A^{2}$ مثبـت نیسـت. بـرای مشـاهده ایـن موضوع ماتریسهای $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ را در نظربگیرید. این مثال نشان مـی‌دهدکـه هرتـابع حقیقی که یکنوا باشد لزوماً یکنوای عملگری نیست.

مثال ۵.۳.۱. تابع $f(t)=\dfrac{-1}{t}$ روی $(0,\infty)$ یکنوای عملگری است.

قضیه ۶.۳.۱. تابع $f(t)=t^{r}$ روی $[0,\infty)$ برای $0\leq r\leq 1$ یکنوای عملگری است.

اثبات : ترکیب دو تابع یکنوای عملگـری یـک تـابع یکنـوای عملگـری اسـت. از طرفـی چـون تـابع $f(t)=\dfrac{-1}{t}$ یکنوای عملگری اسـت، بنـابراین تـابع $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ روی بـازه $(0,\infty)$ یکنـوای عملگـری

است. همچنین برای هر $\lambda\rangle 0$ تابع $f(t)=\frac{t}{\lambda+t}$ روی بازه $(0,\infty)$ یکنوای عملگری است. انتگرال زیر را داریم.

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^{r-1}}{1+\lambda}d\lambda=\pi \cos c\, r\pi,\quad 0\le r\le 1$$

بایک تغییرمتغیر فرمول زیر را به دست می‌آوریم که به ازای هر $t\ge 0$ و $0\le r\le 1$ برقرار است.

$$t^r=\frac{\sin r\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{t}{\lambda+t}\lambda^{r-1}d\lambda$$

این فرمول را می‌توان به صورت $t^r=\int_0^\infty \frac{t}{\lambda+t}d\mu(\lambda)$ نوشت بطوریکه μ یک اندازه مثبت روی $(0,\infty)$است. حال با توجه به اینکه تابع $f(t)=\frac{t}{\lambda+t}$ یکنوای عملگری است، در اینصورت تابع $f(t)=t^r$ روی بازه $(0,\infty)$ برای $0\le r\le 1$ یکنوای عملگری است.□

می‌توان نشان داد که اگر f یک تابع یکنوای عملگری باشد، آنگاه نمایش انتگرالی به فرم زیر دارد.

$$f(t)=\alpha+\beta t+\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{\lambda-t}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)\, d\mu(\lambda)$$

این مطلب در[۱،صفحه ۱۴۴] بیان شده است. با یک تغیر متغیر این رابطه را می توان به صورت

$$f(t)=\alpha+\beta t+\int_0^\infty\left(\frac{1}{\lambda^2+1}-\frac{1}{\lambda+t}\right)\, d\mu(\lambda)$$

نوشت به طوریکه $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\ge 0$ و μ یک اندازه مثبت روی $(0,\infty)$ است و

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2+1}\, d\mu(\lambda)<\infty$$

قضیه ۱.۳.۸. فرض کنید A و B ماتریس های هرمیتی باشند و فرض کنید A معین مثبت و B نیمه معین مثبت باشند.آنگاه $A \geq B$، اگر وفقط اگر $P(BA^{-1}) \leq 1$.

قضیه ۱.۳.۹. فرض کنید A و B معین مثبت باشند. آنگاه $A \geq B$، اگر وفقط اگر $B^{-1} \geq A^{-1}$.