دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر لی

سیستم‌های ریشه به طور موضعی آفین توسیعی

استاد راهنما

خانم دکتر ملیحه یوسف‌زاده

پژوهشگر

مریم جمالی گندمانی

چکیده

در این پایان‌نامه، تعمیمی طبیعی از مفهوم سیستم ریشه به طور موضعی متناهی و سیستم ریشه آفین توسیعی تعریف شده توسط سائیتو مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه طبقه بندی این سیستم‌های تعمیم یافته مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: سیستم ریشه به طور موضعی متناهی، سیستم ریشه به طور موضعی آفین توسیعی

فهرست مطالب

مقدمه

یکی از مباحث مهم در جبر لی مفهوم سیستم ریشه است. هدف ما در این پایان‌نامه معرفی و طبقه‌بندی نوع خاصی از سیستم‌های ریشه به نام سیستم ریشه به طور موضعی آفین توسیعی است و در نهایت قصد داریم ارتباط این نوع سیستم ریشه را با جبر لی بیان کنیم.

اما قبل از هر چیز لازم است مطالبی از پیشینه سیستم‌های ریشه را بیان کنیم.

تعریف ۰.۰.۱. سه تایی $(V, (\cdot,\cdot), \mathcal{R})$ را یک *سیستم ریشه متناهی تحویل‌ناپذیر* می‌نامیم، هرگاه V یک فضای اقلیدسی و مجهز به یک فرم دو خطی معین مثبت $(\cdot,\cdot)$ باشد به طوری که:

$A1$) $0 \notin \mathcal{R}$ و $\mathcal{R}$، V را پدید آورد،

$A2$) برای تمامی $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$، $\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$،

$A3$) برای تمامی $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$، $\sigma_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \mathcal{R}$،

$A4$) $\mathcal{R}$ تحویل‌ناپذیر باشد، به این معنا که $\mathcal{R}$ را نتوان به صورت اجتماع دو زیرمجموعه غیرتهی جدا از هم و متعامد از $\mathcal{R}$ نوشت.

در سال ۱۹۸۹ سائیتو در مرجع [۱۸] نظریه‌ای مبنی بر تعمیم سیستم ریشه متناهی تحویل‌ناپذیر ارائه داد. او فضای اقلیدسی از بعد متناهی V را به یک فضای برداری کلی روی $\mathbb{R}$ تعمیم داد. هم‌چنین فرم مربوط به این فضا را به گونه‌ای معرفی کرد که لزوما معین مثبت نبود. به‌علاوه اصل $(A1)$ را با جمله

به ازای $\alpha \in \mathcal{R}$، $(\alpha,\alpha) \neq 0$ و $\mathcal{R}$، V را پدید آورد،

جایگزین کرد. البته این تغییر طبیعی است، چراکه در فضای اقلیدسی که $\alpha \neq 0$ داریم، $(\alpha,\alpha) \neq 0$. سائیتو دو اصل دیگر به صورت زیر را نیز به اصول قبل اضافه کرد.

$A5$) زیرگروه جمعی تولید شده توسط $\mathcal{R}$ در V، یک شبکه کامل است (اگر $Q(\mathcal{R})$ زیرگروه جمعی تولید شده توسط $\mathcal{R}$ باشد، آن‌گاه $V \simeq \mathbb{R} \otimes Q(\mathcal{R})$)،

$A6$) هم بعد رادیکال V متناهی است.

او چنین سیستم ریشه‌ای را یک *سیستم ریشه آفین توسیعی* نامید.

در مرجع [۱] می‌بینیم که مفهوم متفاوتی برای یک سیستم ریشه آفین توسیعی بیان شده است، اما اعظم در مرجع [۳] نشان داد که تناظری طبیعی بین این دو مفهوم وجود دارد. توجه کنیم که مطالب این پایان‌نامه از مرجع [۲۱] انتخاب شده است. یوشی در این مرجع اصول سائیتو از یک سیستم ریشه آفین توسیعی را بسط داد و نتایج خوبی به‌دست آورد. او فضای اقلیدسی V در تعریف ۱.۰.۰ را به یک فضای برداری از بعد نامتناهی روی $\mathbb{Q}$ که بر روی آن یک فرم معین مثبت وجود دارد، تغییر داد و با تعمیم مفهوم سیستم ریشه متناهی تحویل ناپذیر، سیستم‌های ریشه‌ای را معرفی کرد که شامل سیستم‌های ریشه شناخته شده‌ای به نام سیستم‌های ریشه به طور موضعی متناهی است. هم‌چنین او اصل $(A5)$ را با اصل

$A7$) $\langle \mathcal{R} \rangle$ آزاد است،

جایگزین کرد.

در فصل اول این پایان‌نامه بعد از بیان برخی از تعاریف اولیه به معرفی و طبقه‌بندی سیستم‌های ریشه به طور موضعی متناهی می‌پردازیم. در بخش اول از فصل دوم که یکی از مهم‌ترین بخش‌های پایان‌نامه است، سیستم‌های ریشه به طور موضعی آفین توسیعی معرفی می‌شود. سپس در طی یک قضیه، که قضیه اصلی پایان‌نامه است، سیستم‌های ریشه به طور موضعی آفین توسیعی را طبقه‌بندی خواهیم کرد. هم‌چنین برخی از روابط میان دو سیستم ریشه به طور موضعی آفین توسیعی مثل یکریختی و تشابه را در بخش دوم از فصل دوم بیان می‌کنیم و قضایایی در این زمینه را مورد بررسی

قرار خواهیم داد. در بخش پایانی این فصل حالت خاصی از سیستم‌های ریشه به طور موضعی آفین توسیعی را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، ابتدا به معرفی جبرهای لی ساده به طور موضعی شکافته شدنی پرداخته و سپس با استفاده از چنین جبرهایی مفهوم جبرهای (G,τ)-حلقوی پیچشی و غیر پیچشی و هم‌چنین جبرهای به طور موضعی متناهی (G,τ)-حلقوی پیچشی و غیر پیچشی را بیان می‌کنیم. یکی از مباحث مهم در این فصل معرفی جبر لی به طور موضعی آفین توسیعی و بررسی ارتباط آن با سیستم‌های ریشه به طور موضعی آفین توسیعی است که در قسمت آخر این فصل بیان می‌شود.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ جبر خطی

در این بخش به بیان برخی از تعاریف در مورد جبرخطی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، *فرم دوخطی* بر V نگاشتی چون

$$(\cdot,\cdot):\ V\times V\longrightarrow \mathbb{F}$$

است، که به ازای هر $a,b\in\mathbb{F}$ و هر $v,\ v_۱,v_۲,u,u_۱,u_۲\in V$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $(au_۱+bu_۲,v)=a(u_۱,v)+b(u_۲,v)$

۲. $(u,av_۱+bv_۲)=a(u,v_۱)+b(u,v_۲).$

هم‌چنین

الف) اگر به ازای هر $v,w\in V$، $(v,w)=(w,v)$، فرم $(\cdot,\cdot)$ را *متقارن* گوییم.

ب) اگر $\mathbb{F}$ میدان اعداد گویا یا میدان اعداد حقیقی باشد و به ازای هر بردار غیر صفر $v \in V$، $0 < (v,v)$ باشد، فرم $(\cdot,\cdot)$ را معین مثبت می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $(\cdot,\cdot)$ یک فرم دو خطی متقارن روی V باشد. به ازای $v \in V$، تابعک خطی

$$\begin{aligned} T_v : V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ w &\longmapsto (v,w) \end{aligned}$$

و تبدیل خطی

$$\begin{aligned} L : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto T_v \end{aligned}$$

را در نظر می‌گیریم، هسته نگاشت L یعنی

$$V^{\perp} := \{v \in V : \ (v,w) = 0, \forall w \in V\}$$

را *رادیکال فرم* $(\cdot,\cdot)$ می‌نامیم. به علاوه اگر $V^{\perp} = \{0\}$، فرم $(\cdot,\cdot)$ را *ناتباهیده* گوییم.

۲.۱ جبر لی

در این بخش به بیان برخی از تعاریف در مورد جبر لی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. *فضای برداری $\mathcal{A}$ را روی میدان $\mathbb{F}$ در نظر می‌گیریم. اگر فضای برداری $\mathcal{A}$ مجهز به عمل دوتایی*

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$(a,b) \longmapsto a \cdot b \qquad (a,b \in \mathcal{A})$$

چنان باشد که، به ازای هر $r \in \mathbb{F}$ و $a,b,c \in \mathcal{A}$،

$$(ra+b)\cdot c = ra \cdot c + b \cdot c, \qquad c \cdot (ra+b) = rc \cdot a + c \cdot b$$

$(\mathcal{A},.)$ را یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم. به‌علاوه اگر به ازای $a,b,c \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

جبر $(\mathcal{A},.)$ را شرکت‌پذیر گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنیم $\mathcal{G}$ همراه با ضرب دوخطی $[\cdot,\cdot]$ یک جبر باشد، $\mathcal{G}$ را یک جبر لی می‌نامیم هرگاه*

۱ - *به ازای هر $x \in \mathcal{G}$، $[x,x]=0$،*

۲ - *به ازای هر $x,y,z \in \mathcal{G}$ داشته باشیم*

$$[[x,y],z]+[[z,x],y]+[[y,z],x]=0 \qquad \text{(اتحاد ژاکوبی)}\ .$$

مثال ۳.۲.۱. *جبر شرکت‌پذیر $\mathcal{A}$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $x,y \in \mathcal{A}$، قرار می‌دهیم $[x,y] := xy - yx$. جبر $\mathcal{A}$ همرا با این عمل دوتایی یک جبر لی است، زیرا :*

۱ - *برای هر* $x \in \mathcal{A}$ ،$[x,x] = xx - xx = 0$ *است.*

۲ - *چون* $\mathcal{A}$ *یک جبر شرکت‌پذیر است، اتحاد ژاکوبی نیز برقرار است.*

در واقع برای هر $x, y, z \in \mathcal{A}$

$$
\begin{aligned}
[[x,y],z] + [[z,x],y] + [[y,z],x] &= [xy - yx, z] + [zx - xz, y] + [yz - zy, x] \\
&= (xy)z - (yx)z - z(xy) + z(yx) + (zx)y - (xz)y \\
&- y(zx) + y(xz) + (yz)x - (zy)x_x(yz) + x(zy) = 0
\end{aligned}
$$

چنین جبر لی را با نماد $[\mathcal{A}]$ *نمایش می‌دهیم.*

یک زیرفضای $\mathcal{K}$ *از* $\mathcal{A}$ *را یک زیر جبر لی از* $\mathcal{A}$ *می‌نامیم، هرگاه برای هر* $x, y \in \mathcal{K}$ ،$[x,y] \in \mathcal{K}$.
به وضوح هر زیرجبر از $\mathcal{A}$ *خود یک جبر لی است.*

تعریف ۴.۲.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، جبر شرکت‌پذیر $\mathrm{End}(V)$، شامل کلیه‌ی تبدیلات خطی روی فضای برداری V، همراه با عمل

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f, \quad f, g \in \mathrm{End}(V)$$

یک جبر لی است که آن را با نماد $\mathfrak{gl}(V)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{G}$ یک جبر لی باشد. برای زیرفضاهای I و J از جبر لی $\mathcal{G}$ قرار می‌دهیم

$$[I,J] := \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{\ [x,y] : x \in I,\ y \in J\ \},$$

و برای $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{G}^{1} := \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}^{n+1} := [\mathcal{G}, \mathcal{G}^n], \quad n \geq 1.$$

الف) جبر لی $\mathcal{G}$ را *آبلی* نامیم، هرگاه $\mathcal{G}^{2} = \{0\}$ و آن را *کامل* گوییم هرگاه $\mathcal{G}^{2} = \mathcal{G}$.

ب) جبر لی $\mathcal{G}$ را *پوچ‌توان* نامیم، هرگاه عدد مثبت n چنان موجود باشد که $\mathcal{G}^n = \{0\}$.

ج) جبر لی $\mathcal{G}$ را *ساده* نامیم، هرگاه تنها ایده‌آل‌هایش، $\{0\}$ و $\mathcal{G}$ بوده و $\mathcal{G}$ آبلی نباشد.

و) زیرجبر پوچ‌توان $\mathcal{H}$ از جبر لی $\mathcal{G}$ را یک زیرجبر *کارتان* نامیم هرگاه، $N_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ که $N_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) := \{\, x \in \mathcal{G} : [x, \mathcal{H}] \subseteq \mathcal{H} \,\}$ است.

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنیم $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$ دو جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، نگاشت $\theta : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ یک *همریختی جبرهای لی* نامیده می‌شود اگر θ خطی و برای هر $x, y \in \mathcal{G}_1$، $\theta[x, y] = [\theta x, \theta y]$. مفاهیمی هم‌چون تکریختی، برو‌ریختی، یکریختی، درون‌ریختی و خودریختی به‌طور معمول تعریف می‌شوند.

مثال ۱.۲.۷. جبر لی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم و برای $x \in \mathcal{G}$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathcal{G}} x : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ y &\longmapsto [x, y], \quad (y \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} &\longrightarrow [\mathrm{End}(\mathcal{G})] \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_{\mathcal{G}} x, \quad (x \in \mathcal{G}) \end{aligned}$$

یک همریختی از جبرهای لی می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۸. جبر لی $\mathcal{G}$ و فضای برداری V بر روی میدان $\mathbb{F}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) یک *نمایش از جبر لی $\mathcal{G}$ بر روی فضای برداری V* یک همریختی جبرهای لی به شکل

$$\pi : \mathcal{G} \longrightarrow [\mathrm{End}(V)]$$

می‌باشد. به عبارت دیگر اثر π روی یک تبدیل خطی از $\mathcal{G}$ به $\mathrm{End}(V)$ چنان می‌باشد که به ازای هر $x, y \in \mathcal{G}$ و $v \in V$ داشته باشیم

$$\pi([x, y])(v) = \pi(x)\pi(y)(v) - \pi(y)\pi(x)(v).$$

ب) فضای برداری V را یک $\mathcal{G}-$ *مدول* چپ نامیم، هرگاه عمل

$$\cdot : \mathcal{G} \times V \longrightarrow V$$
$$(x, v) \longmapsto x \cdot v, \quad (x \in \mathcal{G},\ v \in V)$$

با ویژگی‌های زیر موجود باشد:

۱. نگاشت فوق نسبت به هر دو مؤلفه‌اش خطی باشد.

۲. به ازای هر $x, y \in \mathcal{G}$ و $v \in V$ داشته باشیم

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

ج) زیرفضای W از V را یک *زیرمدول* V نامیم، هرگاه W نسبت به عمل $\mathcal{G}-$ مدول V پایا باشد یعنی به ازای هر $w \in W$ و $x \in \mathcal{G}$، $x \cdot w \in W$ باشد.

د) $\mathcal{G}-$ مدول چپ V را *تحویل ناپذیر* نامیم، هرگاه $\{0\}$ و V تنها زیرمدول‌های V باشند.
هرگاه فضای برداری V یک $\mathcal{G}-$ مدول چپ باشد، برای راحتی گوییم V یک $\mathcal{G}-$ مدول است.

جبر لی $\mathcal{G}$ و فضای برداری V روی میدان $\mathbb{F}$ را در نظر می‌گیریم.

- فرض کنیم V همراه با عمل $\cdot : \mathcal{G} \times V \longrightarrow V$ یک مدول باشد. برای $x \in \mathcal{G}$ تعریف می‌کنیم

$$\pi(x) : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto x \cdot v, \quad (v \in V)$$

در این صورت

$$\pi : \mathcal{G} \longrightarrow [\mathrm{End}(V)]$$
$$x \longmapsto \pi(x), \quad (x \in \mathcal{G})$$

یک نمایش از جبر لی $\mathcal{G}$ است.

• فرض کنیم همریختی $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow [\mathrm{End}(V)]$ یک نمایش از جبر لی $\mathcal{G}$ بر روی فضای V باشد. به راحتی دیده می‌شود که V همراه با عمل $\cdot : \mathcal{G} \times V \longrightarrow V$ که به ازای هر $x \in \mathcal{G}$ و $v \in V$، $x \cdot v := \pi(x)(v)$ یک $\mathcal{G}-$ مدول است.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک جبر لی آبلی، V یک فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ و $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow [\mathrm{End}(V)]$ یک نمایش از $\mathcal{H}$ بر روی فضای V باشد. تابعک خطی $\lambda \in \mathcal{H}^*$ را در نظر می‌گیریم. بردار $v \in V$ را یک *بردار وزنی از وزن* λ (وابسته به $\mathcal{H}$) نامیم، اگر برای هر $h \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\pi(h)v = \lambda(h)v.$$

به ازای هر $\lambda \in \mathcal{H}^*$، $\lambda-$ فضای وزنی $V^\lambda(\mathcal{H})$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$V^\lambda(\mathcal{H}) := \{\ v \in V : (\forall h \in \mathcal{H})\ \ \pi(h)v = \lambda(h)(v)\ \}.$$

به وضوح $V^\lambda(\mathcal{H})$ یک $\mathcal{H}-$ زیر مدول از V است. زمانی که جبر لی $\mathcal{H}$ مشخص باشد، از نماد V^λ به جای $V^\lambda(\mathcal{H})$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک جبر لی آبلی و $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow [End(V)]$ یک نمایش از $\mathcal{H}$ باشد. اگر $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{H}^*} V^\lambda$، گوییم $\mathcal{H}-$ مدول V دارای یک *تجزیه فضاهای وزنی* است. تابعک خطی $\lambda \in \mathcal{H}^*$ که به ازای آن $V^\lambda \neq \{0\}$ را یک *وزن از* V وابسته به $\mathcal{H}$ و π و مجموعه‌ی چنین تابعک‌های خطی را *سیستم وزنی متناظر* می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. هرگاه $T : V \longrightarrow V$ یک تبدیل خطی روی فضای برداری V باشد، گوییم تبدیل خطی T روی این فضای برداری *قطری شدنی* است هرگاه پایه‌ای برای V وجود داشته باشد که هر بردار آن یک بردار ویژه برای T باشد. در این صورت $\Lambda \subseteq \mathbb{F}$ موجود است طوری که

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V^\lambda, \quad V^\lambda = \{\ v \in V : (T - \lambda 1)(v) = 0\ \}. \quad (\lambda \in \Lambda)$$

به‌علاوه فرض کنیم $\{\ T_i : V \longrightarrow V :\ \ i \in I\ \}$ خانواده‌ای از تبدیلات خطی قطری شدنی باشد، این خانواده از تبدیلات خطی را هم‌زمان قطری شدنی گوییم، هرگاه پایه‌ای برای V وجود

داشته باشد که هر بردار آن یک بردار ویژه برای هر یک از تبدیلات خطی T_i، $i \in I$ باشد. در این صورت $\Lambda \subseteq \mathbb{F}^I$ موجود است که $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V^\lambda$، جایی که برای $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{F}^I$،

$$V^\lambda = \{ \, v \in V : \; (\forall i \in I) \; (T_i - \lambda_i 1)(v) = 0 \, \}.$$

تعریف ۱.۲.۱۱. زیرجبر آبلی $\mathcal{H}$ از جبر لی $\mathcal{G}$ را یک زیرجبر *کارتان* نامیم اگر زیرجبر $\mathcal{H}$ آبلی بیشین باشد و درون‌ریختی‌های $\mathrm{ad}_{\mathcal{G}} h$ برای $h \in \mathcal{H}$ همزمان قطری شدنی باشند. در این صورت $C_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ که $C_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{G} : \; [x, \mathcal{H}] = 0\}$ و $\Delta \subseteq \mathcal{H}^* \setminus \{0\}$ موجود است که

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathcal{G}^\alpha,$$

جایی‌که برای $\alpha \in \mathcal{H}^*$،

$$\mathcal{G}^\alpha := \{ \, x \in \mathcal{G} : \; [h, x] = \alpha(h)x, \quad h \in \mathcal{H} \quad \text{به ازای} \},$$

و برای $\alpha \in \Delta$، $\mathcal{G}^\alpha \neq \{0\}$.

الف) چنین تجزیه‌ای را یک *تجزیه‌ی ریشه‌ای* برای جبر لی $\mathcal{G}$ نسبت به زیرجبر کارتان شکافته شدنی $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

ب) زیرفضاهای $\mathcal{G}^\alpha$ برای $\alpha \in \Delta$ را *فضاهای ریشه* و عناصرش را *بردارهای ریشه* می‌نامیم.

ج) Δ را *سیستم ریشه‌ی* نظیر به $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ نامیم.

د) اگر $\mathcal{G}$ شامل یک زیرجبر کارتان شکافته شدنی $\mathcal{H}$ باشد، جفت $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ (یا به‌طور ساده $\mathcal{G}$) را یک *جبر لی شکافته‌شدنی* نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنیم $\mathcal{G}$ یک جبر لی از بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد.

الف) فرم دوخطی

$$\mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(x, y) \longmapsto \mu(x, y), \quad (x, y \in \mathcal{G})$$

روی جبر لی $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم. اگر به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{G}$، $\mu([x, y], z) = \mu(x, [y, z])$ فرم μ را *پایا* نامیم.

ب) به ازای $x, y \in \mathcal{G}$ تعریف می‌کنیم

$$\kappa_{\mathcal{G}}(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathcal{G}}x\ \mathrm{ad}_{\mathcal{G}}y)$$

در این صورت $\kappa_{\mathcal{G}}$ یک فرم دوخطی متقارن پایا بر روی $\mathcal{G}$ است. $\kappa_{\mathcal{G}}$ را فرم *کیلینگ* متناظر با جبر لی $\mathcal{G}$ نامیم.

۳.۱ اجتماع مستقیم

در این بخش ابتدا به تعریف رسته و سپس به تعریف اجتماع مستقیم خانواده‌ای از جبرهای لی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. خانواده‌ای از اشیا را رسته $\mathcal{C}$ می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

۱) برای هر دو شی A, B، مجموعه تمام همریختی‌های از A به B را با $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان می‌دهیم، به ازای هر چهار شی C, B, A و D که $(A, B) \neq (C, D)$، داشته باشیم

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset،$$

۲) برای هر سه شی B, A و C تابع

$$\cdot : \ Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$
$$(g, f) \longmapsto gf$$

وجود داشته باشد به طوری که

الف) برای چهار شی C, B, A و D اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ و $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$، آن‌گاه $h(gf) = (hg)f$،

ب) برای هر شی A عضو $1 \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ موجود باشد که برای هر عضو $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ و هر عضو $g \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$، $f1_A = f$ و $1_A g = g$.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی I همراه با یک رابطه‌ی مرتب جزئی $\preceq$ را یک *مجموعه‌ی جهت‌دار* می‌نامیم، اگر برای هر $i, j \in I$، $k \in I$ چنان موجود باشد که، $i \preceq k$ و $j \preceq k$.

تعریف ۳.۳.۱. رسته‌ی ملموس $\mathcal{C}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از اشیای این رسته باشد که با مجموعه‌ی جهت‌دار I اندیس گذاری شده است. اگر برای هر $i \preceq j$، ریختار $\theta_{ij} : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_j$ چنان موجود باشد که

۱. برای هر $i \in I$، $\theta_{ii} = \mathrm{id}$،

۲. برای $i \preceq j \preceq k$، $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$، به عبارت دیگر نمودار

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_i \arrow[rr, "\theta_{ij}"] \arrow[dr, "\theta_{ik}"'] & & \mathcal{M}_j \arrow[dl, "\theta_{jk}"] \\
& \mathcal{M}_k &
\end{tikzcd}$$

جابجایی باشد، آن‌گاه $(\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}, \{\theta_{ij}\}_{i,j\in I})$ را یک **سیستم مستقیم** می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم $(I, \preceq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار و $(\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}, \{\theta_{ij}\}_{i,j\in I})$ یک سیستم مستقیم از یک رسته‌ی ملموس $\mathcal{C}$ باشد. اگر شی $\mathcal{M}$ همراه با کلاس $\{ g_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}, i \in I \}$ از ریختارهای این رسته چنان موجود باشد که

۱. به ازای هر $i \preceq j$، $g_j \circ \theta_{ij} = g_i$، به عبارت دیگر نمودار

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_i \arrow[rr, "\theta_{ij}"] \arrow[dr, "g_i"'] & & \mathcal{M}_j \arrow[dl, "g_j"] \\
& \mathcal{M}_{ij} &
\end{tikzcd}$$

جابجایی باشد،

۲. برای هر شی X همراه با کلاس $\{ f_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow X : i \in I \}$ از نگاشت‌هایی که برای هر $i \preceq j$، $f_j \circ \theta_{ij} = f_i$، نگاشت یگانه‌ی $\psi : \mathcal{M} \longrightarrow X$ چنان موجود باشد که

$\psi \circ g_i = f_i$، به عبارت دیگر نمودار

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_i \arrow[rr, "\theta_{ij}"] \arrow[dr, "g_i"] \arrow[ddr, "f_i"'] & & \mathcal{M}_j \arrow[dl, "g_j"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& \mathcal{M} \arrow[d, "\psi"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

جابجایی باشد، آن‌گاه $\mathcal{M}$ را *حد مستقیم* سیستم مستقیم $(\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}, \{\theta_{ij}\}_{i,j\in I})$ می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathcal{M} = \varinjlim_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

مثال ۱.۳.۵. فرض کنیم $\mathcal{G}$ یک جبر لی و $(\{\mathcal{G}_i\}_{i\in I}, \{\theta_{ij}\}_{i,j\in I})$ یک سیستم مستقیم از زیرجبرهای $\mathcal{G}_i$ از $\mathcal{G}$ چنان باشند که، برای $i, j \in I$، $\theta_{ij} : \mathcal{G}_i \hookrightarrow \mathcal{G}_j$ نگاشت شمول است. در این صورت

$$\varinjlim_{i\in I} \mathcal{G}_i = \sum_{i\in I} \mathcal{G}_i = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i,$$

در این حالت اگر $\mathcal{G} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}_i$، گوییم $\mathcal{G}$ *اجتماع مستقیم* $\{\mathcal{G}_i\}_{i\in I}$ است.

۴.۱ سیستم ریشه به طور موضعی متناهی

در این بخش قصد داریم به معرفی سیستم‌های ریشه به طور موضعی متناهی بپردازیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری نابدیهی روی میدان $\mathbb{Q}$، مجهز به یک فرم دو خطی، متقارن و معین مثبت

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$$

باشد. در این‌صورت به ازای $\alpha \in V$، خودریختی

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &: V \longrightarrow V \\ \beta &\longmapsto \beta - \frac{۲\,(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \end{aligned}$$

را یک *انعکاس* از V می‌نامیم:

در ضمن، به ازای $\beta,\gamma \in V$، $(\sigma_\alpha(\beta),\sigma_\alpha(\gamma)) = (\beta,\gamma)$.

تعریف ۲.۴.۱. سه تایی $(V,(\cdot,\cdot),\mathcal{R})$ را یک *سیستم ریشه به طور موضعی متناهی* می‌نامیم، هرگاه V یک فضای برداری نابدیهی روی میدان $\mathbb{Q}$ و مجهز به یک فرم دو خطی معین مثبت $(\cdot,\cdot)$ باشد به طوری که:

۱ - $\mathcal{R}$ به طور موضعی متناهی باشد(به ازای هر زیرفضای برداری از بعد متناهی V مثل W، $\mathcal{R}\cap W$ متناهی داشته باشد)،

۲ - $\mathcal{R}$، V را تولید کند،

۳ - برای تمامی $\alpha,\beta \in \mathcal{R}$، $\langle\alpha,\beta\rangle := \frac{۲(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$،

۴ - برای تمامی $\alpha,\beta \in \mathcal{R}$، $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha \in \mathcal{R}$.

هرگاه $\mathcal{R}$ متناهی و V از بعد متناهی باشد، $(V,(\cdot,\cdot),\mathcal{R})$ را یک *سیستم ریشه متناهی* می‌نامیم. هر عضو از $\mathcal{R}$ یک ریشه از آن و بعد فضای برداری V *رتبه‌ی* $\mathcal{R}$ نامیده می‌شود. رتبه یک سیستم ریشه متناهی $\mathcal{R}$ را با نماد $rank(\mathcal{R})$ نمایش می‌دهیم.