دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

نامساوی‌هایی برای مجموع و مجموع مستقیم عملگرها روی فضاهای هیلبرت

استاد راهنما:

دکتر رحمت ا... لشکری پور

تحقیق و نگارش:

مجتبی سرگزی

تیر ۱۳۸۹

تقدیر و تشکر:

با حمد و سپاس فراوان به درگاه خداوند متعال که به بنده حقیر سعادت تلاش و کوشش در راه کسب علم و دانش را عنایت فرمود. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته‌ام، در راه رضای او و پیشرفت جامعه بکارگیرم.

پیمودن این راه میّسر نمی‌شد مگر با یاد خدا و راهنمایی های استاد گرامی، دکتر رحمت ا... لشکری پور(استاد راهنما) که با متانت و خلق وخوی نیکو مرا یاری نمودند. از خداوند متعال برای ایشان آرزوی طول عمر با عزّت و توفیق روز افزون دارم.

از آقای دکتر علیرضا احمدی و دکتر غلامرضا رضایی که داوری پایان نامه را متقبل شده‌اند، سپاسگزارم.

همچنین از زحمات آقای دکتر حسن رضایی، نماینده تحصیلات تکمیلی قدردانی می‌نمایم.

جا دارد نهایت سپاس خود را به همسر عزیزم که با راهنماییهای خود بر من منت گذاشته و در پیشرفت کارهایم نقش بسزایی داشتند، اعلام دارم.

مجتبی سرگزی

چکیده

در این پایان نامه نامساوی‌هایی از مقادیر تکین و نرم‌های بطور یکانی پایا شامل مجموع و مجموع مستقیم عملگرها روی فضاهای هیلبرت را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین در فصل‌های ۴ و ۵ نامساوی‌هایی برای جابه‌جاگرها و جابه‌جاگرهای تعمیم یافته‌ی عملگرها روی فضاهای هیلبرت را اثبات می‌کنیم.

فهرست مندرجات

تاریخچه

مفهوم مقدار تکین در ابتدا بوسیله ارهارد اشمیت[۱] در سال ۱۹۰۷ میلادی معرفی شد. اگرچه در آن زمان اشمیت مقادیر تکین را مقادیر ویژه نامید. نام مقدار تکین برای نخستین بار توسط اسمیثز[۲] در ۱۹۳۷ میلادی بیان شد. در سال ۱۹۵۷ میلادی آلاخوردیف[۳] مقادیر تکین را بصورت زیر مشخص کرد:

$$s_n(T) = \inf\{\|T-L\| : rank\, L < n\}.$$

این فرمول‌بندی باعث شد تا مفهوم مقدار تکین به عملگرها روی فضاهای باناخ توسیع داده شود. بسیاری از نرم‌ها در فضاهای هیلبرت بوسیله مقادیر تکین تعریف می‌شوند. در این پایان‌نامه نامساوی‌های مقادیر تکین که در کارهای کیتانه[۴] و هیرزالله[۵] آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[۱] Erhard schmidt

[۲] Smithies

[۳] Allakhverdiev

[۴] Kittaneh

[۵] Hirzallah

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

هدف از این فصل بیان تعاریف و قضایای مقدماتی می‌باشد که در ادامه پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱—۱ فضاهای هیلبرت و عملگرها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F از اعداد حقیقی یا مختلط باشد. نگاشت

$$\langle .,. \rangle \; : \; X \times X \; \to F$$

را ضرب داخلی گوییم، هرگاه

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۲) به ازای هر $x_1, x_2, y \in X$، $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in F$، $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

(۴) به ازای هر $x, y \in X$، $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($\overline{\langle x, y \rangle}$ مزدوج مختلط $\langle x, y \rangle$ است).

تعریف ۲.۱.۱. به هر فضای برداری دارای ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی گویند.

تعریف ۳.۱.۱. فضای ضرب داخلی H را فضای هیلبرت گویند، هرگاه نسبت به نرم تعریف شده توسط ضرب داخلی، $||x|| = \langle x, x \rangle^{1/2}$، کامل باشد.

تعریف ۴.۱.۱. اگر H و K فضاهای هیلبرت باشند، نگاشت $T : H \to K$ یک عملگر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $h_1, h_2 \in H$ و $\lambda \in F$ (F میدان اسکالرهاست) داشته باشیم:

$$T(\lambda h_1 + h_2) = \lambda T(h_1) + T(h_2).$$

مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K را با $B(H, K)$ نمایش می‌دهیم. اگر $H = K$، آنگاه $B(H, H)$ را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

(۱) فضای K^n با ضرب داخلی $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x(j)\overline{y(j)}$ برای هر $x, y \in K^n$ یک فضای هیلبرت می‌باشد.

(۲) فضای $l^{۲}$ با ضرب داخلی $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{j=۱}^{\infty}x(j)\overline{y(j)}$ برای هر $x,y\in l^{۲}$ یک فضای هیلبرت می‌باشد.
(۳) فضای $L^{۲}(T)$ با ضرب داخلی $\langle x,y\rangle=\int\limits_{T}x\,\overline{y}\,d\mu$، که T یک فضای اندازه با اندازه μ است، یک فضای هیلبرت می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱. نرم عملگر A، $\|A\|$، در فضای هیلبرت H بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=۱}\|Ax\|=\sup_{\|x\|=\|y\|=۱}|\langle y,Ax\rangle|\ .$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $A\in B(H,K)$ باشد. آنگاه عملگر $B\in B(K,H)$ را که $\langle Ah,k\rangle=\langle h,Bk\rangle$ الحاق A می‌نامیم و با نماد $B=A^{*}$ نمایش می‌دهیم. اگر $A=A^{*}$، عملگر A را خودالحاق یا هرمیتی می‌گویند.

گزاره ۷.۱.۱. اگر H یک فضای هیلبرت و $T\in B(H)$ باشد، آنگاه

$$\|T\|=\|T^{*}\|=\|T^{*}T\|^{\frac{۱}{۲}}\,.$$

اثبات. به [۵] مراجعه شود. ■

گزاره ۸.۱.۱. اگر عملگر A هرمیتی باشد، نرم A بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=۱}|\langle x,Ax\rangle|$$

اثبات. به [۵] مراجعه شود. ■

گزاره ۹.۱.۱. اگر $A\in B(H)$ عملگری خودالحاق باشد و برای اعداد حقیقی $a_{۱},a_{۲}$، $a_{۱}\leq A\leq a_{۲}$ و همچنین اگر $a=\frac{a_{۱}+a_{۲}}{۲}$ باشد، آنگاه $-\left(\frac{a_{۲}-a_{۱}}{۲}\right)\leq A-a\leq\frac{a_{۲}-a_{۱}}{۲}$، و در نتیجه

$$\|A-a\|\leq\frac{a_{۲}-a_{۱}}{۲}.$$

اثبات. بوضوح از خواص نرم بدست می‌آید. ■

گزاره ۱۰.۱.۱ (قضیه تجزیه دکارتی). هر عملگر A می‌تواند بصورت $A = \mathrm{Re}\, A + i\, \mathrm{Im} A$ تجزیه شود، که $\mathrm{Re}\, A = \frac{A+A^*}{۲}$ و $\mathrm{Im} A = \frac{A-A^*}{۲i}$ عملگرهایی هرمیتی می‌باشند.

اثبات. به [۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۱.۱.۱. هر گاه داشته باشیم: $AA^* = A^*A$، عملگر A را نرمال گویند.

گزاره ۱۲.۱.۱. اگر $S \in B(H)$ نرمال باشد بطوریکه $S = A + iB$ تجزیه دکارتی S باشد، آنگاه $S - z$ برای تمام اعداد مختلط z نرمال است و

$$\|S - z\|^۲ \leq \|A - a\|^۲ + \|B - b\|^۲ ,$$

که $z = a + ib$ تجزیه دکارتی z می‌باشد.

اثبات. با توجه به خواص نرم و نامساوی مثلث حکم بوضوح برقرار است. ■

تعریف ۱۳.۱.۱. ماتریس $A \in M_n$ نیمه معین مثبت است، هرگاه برای هر $x \in C^n$ ، $\langle Ax, x\rangle \geq ۰$.

بنابراین برای هر ماتریس نیمه معین مثبت A داریم:$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$. لذا $A = A^*$ و این بدان معناست که هر ماتریس نیمه معین مثبت هرمیتی است.

تعریف ۱۴.۱.۱. برای ماتریس‌های هرمیتی A و B می‌نویسیم $A \geq B$، هرگاه برای هر $x \in H$ داشته باشیم:

$$\langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle .$$

در این صورت عملگر $A - B$ نیمه معین مثبت است. بنابراین $A \geq ۰$، یعنی A نیمه معین مثبت است.

گزاره ۱۵.۱.۱. ماتریس معکوس‌پذیر $A \in M_n$ مثبت است اگرو تنها اگر $A^{-۱}$ مثبت باشد.

اثبات. به [۶] مراجعه شود. ■

گزاره ۱۶.۱.۱. اگر $A \in M_n$ نیمه معین مثبت باشد، آنگاه A^k برای $k = ۱, ..., n$ نیمه معین مثبت است.

اثبات. به [۶] مراجعه شود. ■

گزاره ۱.۱.۱۷. فرض کنید $A \in B(H)$ عملگری مثبت و $\alpha = \frac{\|A\|}{۲}$ باشند، آنگاه

$$\|A - \alpha\| \le \alpha .$$

اثبات. به [۶] مراجعه شود. ■

گزاره ۱.۱.۱۸. فرض کنید $A \in B(H)$ بطوریکه $A \ge ۰$ باشد. اگر x برداری در فضای هیلبرت H باشد که $\|x\| \le ۱$، آنگاه

$$\langle Ax, x\rangle^r \le \langle A^r x, x\rangle \ , \qquad r \ge ۱ .$$

اثبات. به [۱۸] مراجعه شود. ■

تعریف ۱.۱.۱۹. نرم طیفی A را با $\|A\|_\infty$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|A\|_\infty = Sup\{\|Ax\| : \|x\| = ۱, x \in C^n\} .$$

همچنین نرم طیفی خاصیت زیرضربی دارد، یعنی

$$\|AB\|_\infty \le \|A\|_\infty \|B\|_\infty .$$

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید $A \in M_n$ و $x \in C^n$ باشد. معادله

$$Ax = \lambda x, \qquad x \ne ۰,$$

که $\lambda \in C$ را در نظر بگیرید. اگر λ و بردار غیرصفر x در معادله بالا صدق کنند، آنگاه λ را یک مقدار ویژه برای A و x را بردار ویژه متناظر با λ می‌گویند. مجموعه مقادیر ویژه A را با $\sigma_p(A)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۱.۲۱. فرض کنید $A, B \ge ۰$ و به ازای $j = ۱, ۲, ..., n$، u_j بردار ویژه متعامد یکه از $A + B$ متناظر با مقدار ویژه $\lambda_j(A + B)$ باشد. دراین صورت نامساوی زیر برقرار می‌باشد:

$$\sum_{j=۱}^{k} \langle \left\{ A(A + I)^{-۱} + B(B + I)^{-۱} \right\} u_j, u_j\rangle \ge \sum_{j=۱}^{k} \langle (A + B)(A + B + I)^{-۱} u_j, u_j\rangle$$

اثبات. به [۱] مراجعه شود. ■

گزاره ۲۲.۱.۱. اگر عملگر A نرمال باشد، نرم را بصورت زیر می‌توان تعریف کرد:

$$\|A\| = \max\{|\lambda_j| \,:\, \lambda_j \in \sigma_p(A)\}.$$

اثبات. به [۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۲۳.۱.۱. طیف عملگر $T : X \to Y$ را با $\sigma(T)$ نمایش می‌دهند و عبارتست از

$$\sigma(T) = \{\lambda \in F \,:\, \lambda - T \notin Inv(Y)\},$$

که $Inv(Y)$ مجموعه عناصر معکوس‌پذیر Y هستند.

گزاره ۲۴.۱.۱(قضیه نگاشت طیفی). اگر A عملگری نرمال در $B(H)$ باشد، آنگاه برای هر f روی $C(\sigma(A))$، داریم

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

اثبات. به [۶] مراجعه شود. ■

گزاره ۲۵.۱.۱. اگر T یک عملگر خودالحاق در H باشد، آنگاه طیف T حقیقی است.
اثبات. به [۶] مراجعه شود. ■

گزاره ۲۶.۱.۱. اگر T یک عملگر مثبت در H باشد، آنگاه طیف T نامنفی است.
اثبات. به [۶] مراجعه شود. ■

تعریف ۲۷.۱.۱. شعاع طیفی، $spr(T)$، برای عملگر $T \in B(H)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$spr(T) = \inf\left\{\|T^n\|^{\frac{۱}{n}} : n = ۱, ۲, ...\right\}.$$

واضح است که $۰ \leq spr(T) \leq ||T||$.

گزاره ۲۸.۱.۱. فرض کنید $B \geq 0$ و $A > 0$ باشد. آنگاه $B \leq A$ اگروتنهااگر $spr(A^{-1}B) \leq 1$.

اثبات. به [۷] مراجعه شود. ■

تعریف ۲۹.۱.۱. برد اساسی عملگر T در فضای هیلبرت H مجموعه تمام $\lambda \in C$ می‌باشد بطوریکه برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم:

$$\mu \{x \in H \,:\, |T(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0,$$

که μ یک اندازه روی فضای هیلبرت H می‌باشد. برد اساسی عملگر T را با $\Re(T)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید (X, Φ, μ) یک فضای اندازه باشد. برای φ در $L^{\infty}(\mu)$ نگاشت M_{φ} را روی $L^{2}(\mu)$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{\varphi} \,:\, L^{2}(\mu) \underset{f \to \varphi f}{\to} L^{2}(\mu)$$

در اینجا φf نمایانگر ضرب نقطه‌ای می‌باشد. می‌توان نشان داد که M_{φ} یک عملگر خطی وکراندار است.

گزاره ۳۱.۱.۱. اگر $\varphi \in L^{\infty}(\mu)$ باشد، آنگاه

$$\sigma(M_{\varphi}) = \Re(\varphi)$$

اثبات. به [٦] مراجعه شود. ■

تعریف ۳۲.۱.۱. عملگر A روی فضای هیلبرت H یک انقباض است، هرگاه $||A|| \leq 1$.

گزاره ۳۳.۱.۱. عملگر $T \in B(H)$ یک انقباض است اگر وتنها اگر $I - T^{*}T \geq 0$.

اثبات. به [٦] مراجعه شود. ■

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت باشند و $A : H \to K$ یک عملگر خطی باشد. اگر $\overline{A(BallH)}$ در K فشرده باشد، که در آن $BallH = \{h \in H : ||h|| = 1\}$، آنگاه A را یک عملگر فشرده می‌گویند.

گزاره ۳۵.۱.۱. عملگر$A \in B(H)$ فشرده است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه متعامد یکه $\{e_j\}$ در H، داشته باشیم: $\langle Ae_j, e_j\rangle \to ۰$ وقتی $j \to \infty$.

اثبات. به [۱۷] مراجعه شود. ■

گزاره ۳۶.۱.۱. فرض کنید M یک زیرفضای خطی بسته از فضای هیلبرت H و $h \in H$ باشد و Ph یک نقطه منحصربفرد در M باشد بطوریکه $h - Ph \perp M$. آنگاه

(۱) P یک تبدیل خطی روی H است؛

(۲) برای هر $h \in H$، $||Ph|| \leq ||h||$؛

(۳) $P^۲ = P$؛

(۴) $ran\, P = M$ و $\ker P = M^{\perp}$.

در این صورت نگاشت P با خصوصیات بالا را یک تصویر متعامد یکه از H بروی M می‌نامند.

اثبات. به [٦] مراجعه شود. ■

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنید عملگرهای X, B, A در $B(H)$ باشند. عملگر به صورت $AX - XA$ را یک جابه‌جاگر و عملگر به صورت $AX - XB$ را یک جابه‌جاگر تعمیم یافته می‌گویند.

۱ـــ۲ مقادیر تکین و نرم‌های بطور یکانی پایا

تعریف ۱.۲.۱. مقادیر تکین از یک ماتریس $A \in M_n$، مقادیر ویژه قدر مطلق آن، یعنی مقادیر ویژه $|A| = (A^*A)^{\frac{۱}{۲}}$ هستند، که به ترتیب نزولی و با توجه به تعداد تکرارشان بصورت $s_۱(A) \geq ... \geq s_n(A)$ مرتب می‌شوند. هر ماتریس $A \in M_{m\times n}$ به تعداد $\min\{m, n\}$ مقدار تکین دارد.

گزاره ۲.۲.۱. فرض کنید H و K فضاهای هیلبرت و $T \in B(H, K)$ باشد. برای هر عدد صحیح نامنفی k تعریف می‌کنیم:

$$s_k(T) = \inf\{\|T - R\| \ : R \in B(H, K),\ rank\, R \leq k\}.$$

اعداد $s_{0}(T) \geq s_{1}(T) \geq ... \geq 0$ را مقادیر تکین عملگر T می‌گویند.

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

گزاره ۳.۲.۱. با توجه به تعریف مقادیر ویژه و مقادیر تکین می‌توان گزاره‌های زیر را بدست آورد:

(۱) برای هر ماتریس نیمه معین مثبت، مقادیر تکین با مقادیر ویژه یکی است و همچنین

$$s_j(A) = s_j(A^*) \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

(۲) عملگرهای AB و BA مقادیر ویژه یکسان دارند، یعنی

$$\lambda_j(AB) = \lambda_j(BA) \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

(۳) اگر A هرمیتی باشد، آنگاه $\lambda_j(A)$ حقیقی است و

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

اثبات. به [۷] مراجعه شود. ■

گزاره ۴.۲.۱ (اصل یکنوایی ویل[1]). فرض کنید $A, B \in H_n$. اگر $A \geq B$، آنگاه

$$\lambda_j(A) \geq \lambda_j(B), \qquad (\forall j).$$

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

گزاره ۵.۲.۱ (اصل ماکزیمم–مینیمم). فرض کنید $A \in B(H)$ فشرده و نامنفی و $\lambda_1(A), ..., \lambda_n(A)$ مقادیر ویژه A باشند. آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\lambda_n = \min_{M} \left(\max_{||x||=1} \langle Ax, x \rangle \right),$$

که $x \perp M$ و $dim\, M = n - 1$.

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

[1] Weyl

گزاره ۶.۲.۱. فرض کنید $A, B, X \in B(H)$ باشند بطوریکه عملگر X فشرده است، آنگاه

$$s_j(AXB) \leq \|A\| \, \|B\| \, s_j(X),$$

برای $j = ۱, ۲, ...$.

اثبات. از نتایج مستقیم اصل مینیمم—ماکزیمم می‌باشد. ■

گزاره ۷.۲.۱. فرض کنید $A, B \in B(H)$ بطوریکه A و B فشرده‌اند. آنگاه

$$s_j(A+B) \ \leq \ s_j(A) + \|B\|,$$

برای $j = ۱, ۲, ...$.

اثبات. با توجه به اصل مینیمم—ماکزیمم برقرار می‌باشد. ■

گزاره ۸.۲.۱(قضیه تجزیه مقدار تکین). برای هر $A \in M_n$، ماتریس‌های یکانی U و V وجود دارند بطوریکه

$$A = U diag(s_۱(A), ..., s_n(A))V^*.$$

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

گزاره ۹.۲.۱. فرض کنید $A, B, C, D, X \in B(H)$ بطوریکه X فشرده، $۰ \leq A \leq C$ و $۰ \leq B \leq D$ باشند. آنگاه

$$s_j\left(A^{\frac{۱}{۲}} X B^{\frac{۱}{۲}}\right) \leq s_j\left(C^{\frac{۱}{۲}} X D^{\frac{۱}{۲}}\right),$$

برای $j = ۱, ۲, ...$.

اثبات. به [۱۲] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۰.۲.۱. مجموعه $N \subset R$ یک ایده‌ال جبری(دوطرفه) از حلقه R است، اگر خواص زیر را داشته باشد:

(۱) برای هر دو عملگر A و B از N داشته باشیم: $A^* + B \in N$.

(۲) برای هر دو عملگر A و B از N داشته باشیم: $AB, BA \in N$.

(۳) $N \neq \circ$ و $N \neq R$.

اگر عملگر A متعلق به ایده‌ال دوطرفه N از حلقه R باشد، آنگاه عملگر A^* نیز متعلق به این ایده‌ال است. به عبارت دیگر، هر ایده‌ال دوطرفه خودالحاق می‌باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. تابعک $|.|_s$ تعریف شده روی یک ایده‌ال دوطرفه $\Im$ از حلقه R یک نرم متقارن است، اگر خواص نرم را داشته باشد:

(۱) $(A \in \Im\ ,\ A \neq \circ)$ $|A|_s > \circ$؛

(۲) $(A \in \Im\ ,\ \lambda \in C)$ $|\lambda A|_s = |\lambda|\ |A|_s$؛

(۳) $(A, B \in \Im)$ $|A+B|_s \leq |A|_s + |B|_s$؛

و علاوه بر آن دارای خواص زیر نیز باشد:

(۴) $(P, Q \in R\ ,\ A \in \Im)$ $|PAQ|_s \leq |P|\ |A|_s |Q|$؛

(۵) برای هر عملگر یک بعدی A داشته باشیم: $|A|_s = |A| \equiv s_۱(A)$.

و همچنین اگر برای عملگرهای یکانی U و V رابطه $|UAV|_s = |A|_s$ برقرار باشد، تعریف نرم بطور یکانی پایا بدست می آید.

تعریف ۱۲.۲.۱. نرم $|||.|||$ روی M_n بطور یکانی پایاست، هرگاه علاوه بر دارا بودن خواص نرم، برای هر عملگر A و هر دو عملگر یکانی U و V، در خاصیت $|||A||| = |||UAV|||$ صدق کند. اگر فضا نامتناهی‌البعد باشد، نرم‌های بطور یکانی پایا روی ایده‌ال نرمی متناظر با $|||.|||$(مشمول در ایده‌ال عملگرهای فشرده) و اگر فضا با بعد متناهی باشد، روی تمام عملگرها تعریف می‌شود.

برای هر نرم بطور یکانی پایا، چون نامساوی‌های مقادیر تکین ضعیف‌تر از نامساوی‌های ترتیب جزیی لونر[۱] و

[۱] lowner

قوی تر از نامساوی‌های نرم‌های بطور یکانی پایا می‌باشد، بنابراین

$$|A| \leq |B| \Rightarrow s_j(A) \leq s_j(B) \quad \forall j \Rightarrow |||A||| \leq |||B||| \,.$$

گزاره ۱۳.۲.۱. نرم‌های بطور یکانی پایا، توابعی صعودی از مقادیر تکین می‌باشند.

اثبات. با توجه به گزاره ۸.۲.۱ واضح است. ■

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید S_n فضای تمام n تایی‌ها از اعداد حقیقی به صورت $U = (u_1, ..., u_n)$ باشد. تابع حقیقی مقدار $\Phi(U) = \Phi(u_1, ..., u_n)$ روی S_n یک تابع مقیاس نامیده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\Phi(u_1, ..., u_n) > 0$ (غیر از $u_1 = ... = u_n = 0$)؛

(۲) برای هر $c \geq 0$ $\Phi(cu_1, ..., cu_n) = c\,\Phi(u_1, ..., u_n)$؛

(۳) $\Phi(u_1 + v_1, ..., u_n + v_n) \leq \Phi(u_1, ..., u_n) + \Phi(v_1, ..., v_n)$.

Φ تابع مقیاس متقارن است، اگر علاوه بر شرایط فوق شرط زیر نیز برقرار باشد:

(۴) $\Phi(u_1, ..., u_n) = \Phi(\varepsilon_1 u_{\rho(1)}, ..., \varepsilon_n u_{\rho(n)})$، که در آن $\varepsilon_i = \pm 1$ و $\rho(1), ..., \rho(n)$ جایگشت‌هایی روی اعداد $1, ..., n$ می‌باشند.

گزاره ۱۵.۲.۱ (قضیه فون نیومان[1]). اگر Φ یک تابع مقیاس متقارن و A یک ماتریس مختلط $n \times n$ با مقادیر تکین مرتب شده $s_1(A), ..., s_n(A)$ باشد، آنگاه تابع ماتریسی تعریف شده با $\Phi(s_1(A), ..., s_n(A))$ یک نرم بطور یکانی پایاست. بالعکس هر نرم بطور یکانی پایا $|||.|||$ یک نمایش به صورت $|||A||| = \Phi(s_1(A), ..., s_n(A))$، که Φ یک تابع مقیاس متقارن روی R^n است، دارد.

به عبارت دیگر یک نرم $|||.|||$ روی $M_{m\times n}$ بطور یکانی پایاست اگر و تنها اگر یک تابع مقیاس متقارن g وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $A \in M_{m\times n}$ داشته باشیم:

$$|||A||| = g(s(A)) \,.$$

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

[1] Von-Neumann

تعریف ۱.۲.۱۶. از معروف ترین نرم‌های بطور یکانی پایا، نرم‌های کی—فن[۱] $(k = ۱, ۲, ..., n)$, $\|.\|_{(k)}$ و شاتن[۲] p—نرم‌ها $(۱ \leq p < \infty)$, $\|.\|_p$ هستند که به ترتیب بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|A\|_{(k)} = \sum_{j=۱}^{k} s_j(A) \ , \quad (k = ۱, ۲, ..., n).$$
$$\|A\|_p = (\sum_{j=۱}^{n} (s_j(A))^p)^{\frac{۱}{p}} \ , \quad (۱ \leq p < \infty).$$

اگر در تعریف شاتن p—نرم‌ها قرار دهید $p = ۲$، نرم فروبنیوس[۳] یا هیلبرت—اشمیت[۴] بدست می آید که به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_۲ = (tr\ AA^*)^{\frac{۱}{۲}} = (tr\ A^*A)^{\frac{۱}{۲}} = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}} .$$

گزاره ۱.۲.۱۷ (اصل تسلط فن). برای ماتریس‌های A و B اگر $(k = ۱, ۲, ..., n)$ $\|A\|_{(k)} \geq \|B\|_{(k)}$، آنگاه برای هر نرم بطور یکانی پایای $|||.|||$ خواهیم داشت:

$$|||A||| \geq |||B|||.$$

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

گزاره ۱.۲.۱۸. برای ماتریس‌های $A, B \geq ۰$ اگر $(k = ۱, ۲, ..., n)$ $\|A\|_{(k)} \geq \|B\|_{(k)}$، آنگاه برای هر نرم بطور یکانی پایای $|||.|||$ و هر تابع نامنفی، نانزولی و محدب $f(t)$ روی $[۰, \infty)$ خواهیم داشت:

$$|||f(A)||| \geq |||f(B)|||.$$

اثبات. به [۲] مراجعه شود. ■

گزاره ۱.۲.۱۹ (نامساوی میانگین هندسی—حسابی برای نرم‌های بطور یکانی پایا).

فرض کنید $A, B, X \in B(H)$ بطوریکه A و B مثبت باشند. آنگاه برای هر نرم بطور یکانی پایا،

$$۲|||AXB||| \leq |||A^۲X + XB^۲|||.$$

---

[۱] Ky-Fan

[۲] Schatten

[۳] Ferbinus

[۴] Hilbert-Schmit