بسم الله الرحمن الرحیم

۱۴۲۳۳۴

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت اخذ درجه فوق لیسانس ریاضی محض گرایش جبر

موضوع

همنهشتی‌های کامل روی توپولوژی‌ها و مشبکه‌ی مجموعه‌های پایینی

استاد راهنما

سرکار خانم دکتر مژگان محمودی

استاد مشاور

جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی

نگارش

فریده فرساد

بهمن ۱۳۸۸

تاریخ ....

شماره ....

پیوست........................

دانشگاه شهید بهشتی

« بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۲۰۰/۱۰۷۸۹/د مورخ ۸۸/۱۰/۱۸ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: خانم **فریده فرساد** شماره شناسنامه: ۲۴۶۶ صادره از: بم متولد: ۱۳۶۳ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: **ریاضی محض**

با عنوان:

همنهشتی کامل روی توپولوژی‌ها و مشبکه‌ی مجموعه‌های پایینی

به راهنمایی:

خانم دکتر مژگان محمودی

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۸/۱۱/۱۴ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸/۷۵ (هجده و هفتاد و پنج صدم) و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** خانم دکتر مژگان محمودی	استاد	شهید بهشتی	
۲-**مشاور:** آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	ابراهیمی
۳- **داور:** آقای دکتر رجبعلی برزویی	استاد	شهید بهشتی	
۴- **داور:** آقای دکتر سید علیرضا حسینیون	استاد	شهید بهشتی	
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

تقدیم به:

خانواده‌ام به خاطر همراهی و همکاری‌های بی‌دریغشان و همه‌ی کسانی که
دوستشان دارم

تشکر و قدر دانی

حمد و سپاس بی قیاس خداوند سبحان را که به بندگان خود منت نهاد و او را به زیور عقل و خرد آراست تا به وسیله‌ای آن عبودیت کمال و ذات بی‌همتای خداوند را پیشه کند تا تعالی و کمال یابد.

بر خود لازم می‌دانم از استاد ارجمند سرکار خانم دکتر مژگان محمودی که در این مدت زحمت راهنمایی این پایان نامه را پذیرفته‌اند صمیمانه تشکر کنم.

از جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی که به عنوان استاد مشاور بنده را راهنمایی نموده‌اند نیز کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر حسینیون و جناب آقای دکتر برزویی که زحمت داوری این پایان نامه را متحمل شده‌اند سپاسگزارم.

از دوست عزیزم خانم حلیمه مقبلی دامنه که در تمام مراحل تحصیلی‌ام و در سخت‌ترین شرایط همراه و پشتیبان من بوده‌اند سپاسگزارم.

در پایان جا دارد که از همه‌ی اعضاء گروه ریاضی دانشگاه شهید بهشتی به خاطر محبتهای بی‌دریغشان قدردانی کنم.

فهرست مطالب

چکیده

در سال ۱۹۳۷ میلادی، الکساندروف برای اولین بار در [۱] فضاهای توپولوژیکی را مطالعه کرد که در شرط T_0 صدق می‌کنند و اشتراک هر خانواده از زیر مجموعه‌های باز آن، باز است. او مشبکه‌ی $D(X)$ متشکل از تمام زیر مجموعه‌های پایینی مجموعه‌های مرتب جزئی $(X, \leq)$، را به عنوان مثال این فضاها ارائه داد. بیرخوف در [۶] دوگان سازی بین مجموعه‌های مرتب جزئی متناهی و مشبکه‌های توزیع پذیر متناهی ارائه داد. در این پایان نامه، با به کارگیری مشبکه‌های فوق جبری این دوگان سازی را به رسته‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی و رسته‌ی مشبکه‌های فوق جبری توسیع می‌دهیم. توجه اصلی در این پایان نامه به دست آوردن همنهشتی‌های کامل و خارج قسمت کامل فضاهای توپولوژیک و فریم مجموعه‌های باز است. همچنین با اعمال بعضی شرایط مانند آنچه سیمونز [۲۷] و [۳۳] و والمن در [۳۵] مطالعه کردند، زمینه القایی شدن همنهشتی‌های دلخواه روی فضاهای توپولوژیک و کامل شدن همنهشتی القایی را فراهم می‌کنیم.

پیشگفتار

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول این پایان نامه، مفاهیم و تعریف‌های اولیه‌ی مشبکه‌ها و فریم‌ها را توضیح می‌دهیم. همچنین مطالبی را از نظریه‌ی رسته و جبر جامع بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، نقش مشبکه‌ی مجموعه‌های پایینی را در دو حیطه‌ی نظریه ترتیب و توپولوژی بررسی می‌کنیم. همچنین با کمک مجموعه‌های پایینی به رابطه‌ی رسته‌ای جالبی بین رسته‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی و رسته‌ی فضاهای توپولوژیک شبه گسسته می‌رسیم.

در فصل سوم، دو دسته‌ی خاص از مشبکه‌ها را به نام‌های مشبکه‌های فوق جبری و فوق پیوسته معرفی می‌کنیم. با بکارگیری مشبکه‌های فوق جبری، دوگان سازی بیرخوف (که در [٦] بیان شده است.) بین مجموعه مرتب جزئی متناهی و مشبکه‌های توزیع پذیر متناهی را به دوگان سازی بین رسته‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی و رسته‌ی مشبکه‌های فوق جبری توسیع می‌دهیم. همچنین با استفاده از کامل سازی یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ارتباط این دو مشبکه را با مشبکه‌های جداشونده بررسی می‌کنیم. در پایان یکی از نتایج این پایان نامه را که بیان می‌کند خارج قسمت کامل فریم مجموعه‌های پایینی مشبکه‌ای فوق جبری است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی مرتب جزئی زمینه پراکنده شونده باشد اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم، مفاهیم دو فضای توپولوژیک به طور ضعیف هوشیار و به طور ضعیف پراکنده شونده را معرفی می‌کنیم. همچنین همنهشتی القایی روی فضاهای توپولوژیک را معرفی کرده و ارتباط آن را با سایر همنهشتی‌های روی این فضاها بررسی می‌کنیم. یکی از نتایج این پایان نامه این است که کامل بودن همنهشتی القایی روی مشبکه مجموعه‌های پایینی (الکساندروف توپولوژی) دقیقا در تناظر یک به یک با مجموعه مرتب جزئی زمینه است، در این فصل بیان و اثبات می‌کنیم. در پایان، همنهشتی‌های کامل روی فضاهای توپولوژیک و ارتباط جالب آنها را

با فضاهای توپولوژیک به طور ضعیف هوشیار و به طور ضعیف پراکنده شونده و همچنین با همنهشتی القایی روی فریم مجموعه‌های باز مورد مطالعه قرار می‌دهیم و به روابط جالبی راجع بین همنهشتی‌های روی فضاهای توپولوژیک شبه گسسته می‌رسیم.

مقاله‌ی اصلی مورد مطالعه در این پایان نامه مقاله‌ی [۱۶] است.

فصل ۱

تعریف‌ها و قضیه‌های مقدماتی

این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول مفاهیمی را از مجموعه‌های مرتب جزئی و مشبکه‌ها و فریم‌ها بیان می‌کنیم. در بخش دوم مطالبی را از نظریه‌ی رسته می‌آوریم و در بخش سوم به بیان مباحثی از جبر جامع می پردازیم. تقریباً همه‌ی مطالبی را که در این فصل می‌آوریم در فصل‌های بعدی مورد نیاز است و مطالبی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز نباشد برای کامل کردن بعضی مفاهیم آورده شده که برای خواننده‌ی علاقه‌مند بی‌فایده نیست.

۱.۱ مشبکه‌ها و فریم ها

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم P مجموعه‌ای ناتهی است. یک ترتیب یا ترتیب جزئی روی P رابطه‌ای دوتایی چون $\leq$ است، به طوری که هر سه عضو از P مثل x, y, z، دارای سه خاصیت: $x \leq x$ (بازتابی)، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$ (پادتقارنی)، و اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$ (تعدی) هستند. مجموعه‌ی P همراه با رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq$ را مجموعه‌ی مرتب جزئی یا مجموعه‌ی مرتب می گوییم و با نماد $(P, \leq)$ یا اگر امکان اشتباه نباشد، با P نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ رابطه‌ی دوتایی $\leq$ روی مجموعه‌ی P، که بازتابی و تعدی است و لزوماً پادتقارنی نیست را پیش‌ترتیب می گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض می‌کنیم P مجموعه‌ی مرتب جزئی است و $x, y \in P$. در این صورت اگر $x \leq y$ یا $y \leq x$، x و y را مقایسه پذیر می‌گوئیم. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$ را مجموعه‌ی مرتب خطی (زنجیر) می‌نامیم هرگاه هر دو عضو آن مقایسه پذیر باشند. مثلا $\mathbb{Q}$ با رابطه کوچکتری معمولی اعداد یک زنجیر است.

تعریف ۴.۱.۱ فرض می‌کنیم $(P, \leq)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی است. رابطه‌ی ترتیب جزئی $\leq^{\partial}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$x \leq^{\partial} y \Leftrightarrow y \leq x$$

در این صورت $(P, \leq^{\partial})$ را دوگان مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$ می گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض می‌کنیم $(P, \leq)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی است. زیر مجموعه‌ی ناتهی $D \subseteq P$ را جهتدار می‌گوییم اگر برای هر دو عضو $d_1, d_2 \in D$، عضو $d_3 \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $d_1, d_2 \leq d_3$.

مثال ۶.۱.۱ فرض کنیم $(P, \leq)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی است. هر زنجیر در P و هر زیرمجموعه از P با بزرگترین عضو، مثال هایی از مجموعه‌های جهتدار هستند.

تعریف ۷.۱.۱ یک زیرمجموعه از مجموعه مرتب جزئی P را ایده‌آل نامیم اگر از پائین بسته و جهتدار باشد. دوگان ایده‌آل را فیلتر نامیم. مجموعه تمام ایده‌آل‌های P را با نماد $Id(P)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر زیرمجموعه‌ی Q از P و هر عضو $x \in P$، تعریف می کنیم :

$$\downarrow Q := \{y \in P : (\exists\, x \in Q)\ y \leq x\} \quad , \quad \uparrow Q := \{y \in P : (\exists\, x \in Q)\ x \leq y\}$$

$$\downarrow x := \{y \in P : y \leq x\} \quad , \quad \uparrow x := \{y \in P : x \leq y\}$$

مثال ۸.۱.۱ مجموعه‌ی $\downarrow x$ یک ایده‌آل است و به آن ایده‌آل اصلی گوییم و مجموعه‌ی $\uparrow x$ یک فیلتر است و به آن فیلتر اصلی گوییم.

تعریف ۹.۱.۱ اگر $(A, \leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزئی باشد، آنگاه:

- می‌گوییم عضو $a \in A$ ماکسیمم (مینیمم) است، هرگاه برای هر $b \in A$ داشته باشیم $b \leq a$ $(a \leq b)$.
- می‌گوییم $a \in A$ بیشین (کمین) است، هرگاه اگر $b \in A$ چنان موجود باشد که $a \leq b$ $(b \leq a)$، آنگاه $a = b$.

تعریف ۱۰.۱.۱ عضو $d \in P$ را کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی X می‌نامیم هرگاه :

(یک) d یک کران بالا برای مجموعه‌ی X باشد.

(دو) اگر $u \in P$ یک کران بالای مجموعه‌ی X باشد، آنگاه $d \leq u$.

کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی X در صورت وجود منحصر به فرد است و آن را با نماد $\vee X$ نمایش می‌دهیم.

بزرگترین کران پایین مجموعه‌ی X به صورت دوگان تعریف می‌شود و در صورت وجود آن را با نماد $\wedge X$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم Q, P مجموعه‌های مرتب جزئی هستند. در این صورت نگاشت $\varphi : P \longrightarrow Q$:

(یک) حافظ ترتیب (یکنوا) است، هرگاه $x \leq y$ در P نتیجه دهد $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ در Q.

(دو) نشاننده‌ترتیبی است در صورتی که:

$x \leq y$ در P اگر و تنها اگر $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ در Q.

به روشنی هر نشاننده ـ ترتیبی، یک به یک است.

(سه) یکریختی‌ـترتیبی است، اگر نشاننده ـ ترتیبی و پوشا باشد. در این صورت مجموعه‌های مرتب جزئی P و Q را یکریخت می‌گوییم و می‌نویسیم $P \cong Q$.

قضیه ۱۲.۱.۱ دو مجموعه‌ی مرتب جزئی P و Q یکریخت هستند اگر و تنها اگر نگاشت های حافظ ترتیب $\varphi : P \longrightarrow Q$ و $\psi : Q \longrightarrow P$ وجود داشته باشند به طوری که $\varphi \circ \psi = id_Q$ و $\psi \circ \varphi = id_P$.

برهان . واضح است و می‌توانید آن را در [۸] ببینید.

تعریف ۱۳.۱.۱ یک مشبکه عبارت است از مجموعه‌ی مرتب جزئی A به طوری که هر زیر مجموعه‌ی دو عضوی $\{a, b\}$ از آن دارای کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین باشد، که به ترتیب آنها را با $a \vee b$ و $a \wedge b$ نمایش می دهیم و می‌گوییم $(A, \vee, \wedge)$ یک مشبکه است.

تعریف ۱۴.۱.۱ هرگاه $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد، به طوری که هر زیرمجموعه‌ی دلخواه (نه لزوماً دو عضوی یا متناهی) L دارای کوچک‌ترین کران بالا یا بزرگ‌ترین کران پایین باشد، آنگاه می‌گوییم مشبکه L کامل است.

البته اگر هر زیر مجموعه‌ی دلخواه L دارای کوچک‌ترین کران بالا باشد، می‌توان نتیجه گرفت که هر زیر مجموعه‌ی دلخواه L دارای بزرگ‌ترین کران پایین نیز هست. چرا که اگر $A \subseteq L$ برای به دست آوردن بزرگ‌ترین کران پایین A کافی است کوچک‌ترین کران بالای مجموعه‌ی همه‌ی کران‌های پایین A را به دست آوریم.

مثال ۱۵.۱.۱

(یک) بدیهی است که هر مشبکه‌ی متناهی یک مشبکه‌ی کامل است.

(دو) هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، $(O(X), \subseteq)$ یک مشبکه‌ی کامل است، که در آن $O(X)$ رده‌ی مجموعه‌های باز X است.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو مشبکه و $f : L_1 \to L_2$ تابع باشد. می‌گوییم f همریختی مشبکه‌ای است، هرگاه برای هر $a, b \in L_1$ داشته باشیم $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ و $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

نکته: به راحتی دیده می‌شود که هر همریختی مشبکه‌ای یکنوا (حافظ ترتیب) است.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم $L_۱$ و $L_۲$ دو مشبکه‌ی کامل هستند. نگاشت $f : L_۱ \longrightarrow L_۲$ را همریختی کامل می‌گوییم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی K از $L_۱$،

$$f(\bigwedge K) = \bigwedge K \text{ و } f(\bigvee K) = \bigvee f(K)$$

همچنین اگر $f : L_۱ \longrightarrow L_۲$ همریختی کامل پوشا باشد، $L_۲$ را تصویرهمریخت کامل $L_۱$ و نگاشت f را برووریختی کامل می‌گوییم.

قضیه ۱۸.۱.۱ فرض کنیم $L_۱$ و $L_۲$ دو مشبکه و نگاشت $f : L_۱ \to L_۲$ یکریختی است. در این صورت، f سوپریمم و اینفیمم دلخواه از $L_۱$ را در صورت وجود حفظ می‌کند.

برهان . فرض می‌کنیم نگاشت $f : L_۱ \to L_۲$ یکریختی است. زیرمجموعه‌ی $X \subseteq L_۱$ را که $\bigvee X$ وجود دارد در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in X$ داریم $x \leq \bigvee X$ و چون نگاشت f حافظ ترتیب است برای هر $x \in X$ داریم $f(x) \leq f(\bigvee X)$. در نتیجه $f(\bigvee X)$ یک کران بالای $\{f(x)\}_{x\in X}$ است. حال نشان می‌دهیم $f(\bigvee X)$ کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی $\{f(x)\}_{x\in X}$ است. فرض می‌کنیم t کران بالای دیگری از $\{f(x)\}_{x\in X}$ است. چون f نشاننده است پس $f^{-۱}$ حافظ ترتیب است و در نتیجه برای هر $x \in X$ داریم $x \leq f^{-۱}(t)$ و بنابراین $\bigvee X \leq f^{-۱}(t)$. در نتیجه $f(\bigvee X) \leq t$. پس داریم $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $f(\bigwedge X) = \bigwedge f(X)$.

تعریف ۱۹.۱.۱ مشبکه‌ی L را توزیع پذیر می‌نامیم هرگاه قوانین زیر در آن برقرار باشد.

$D۱$: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$D۲$: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

البته باید توجه کنیم که مشبکه‌ی L در شرط $D۱$ صدق می‌کند اگرو تنها اگر در شرط $D۲$ صدق کند. برای اثبات می‌توان به [۸] مراجعه کرد.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه است. L را به طور کامل توزیع پذیر می‌گوییم هرگاه قوانین زیر برقرار باشند:

$$\bigwedge\{\bigvee A \quad : \quad A \in \mathcal{X}\} = \bigvee\{\bigwedge B \quad : \quad B \in \mathcal{X}^{\sharp}\}$$

که در آن $\mathcal{X}$، هر گردایه از زیرمجموعه‌های L است و $\mathcal{X}^{\sharp}$ شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های $\bigcup \mathcal{X}$ که با هر عضو $\mathcal{X}$ اشتراک دارند، است.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه کامل است. عضو $a \in L$ رابه طور کامل $\bigvee$ - تحویل ناپذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $S \subseteq L$ که $a = \bigvee S$، نتیجه بگیریم $a \in S$. مجموعه‌ی تمام عضوهای $\bigvee$ - تحویل ناپذیر L را با $j(L)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه کامل است. عضو $a \in L$ رابه طور کامل $\bigvee$ - اول می‌نامیم هرگاه برای هر $S \subseteq L$ که $a \leq \bigvee S$، نتیجه بگیریم $s \in S$ وجود داشته باشد که $a \leq s$.

قضیه ۲۳.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه کامل است. در این صورت

(یک) هر عضو به طور کامل $\bigvee$ - اول، به طور کامل $\bigvee$ - تحویل ناپذیر است.

(دو) اگر L مشبکه‌ای به طور کامل توزیع پذیر باشد آنگاه هر عضو به طور کامل $\bigvee$ - تحویل ناپذیر در L، به طور کامل $\bigvee$ - اول است.

برهان .

(یک) فرض می‌کنیم $a \in L$، به طور کامل $\bigvee$ - اول است. در این صورت برای هر زیر مجموعه‌ی دلخواه S از L که $a = \bigvee S$، داریم $a \leq \bigvee S$ ، پس $s \in S$ وجود دارد که $a \leq s$. حال چون برای هر $s \in S$ داریم $s \leq a$، پس $a = s$ یعنی $a \in S$.

(دو) فرض می‌کنیم $a \in L$، به طور کامل $\bigvee$ - تحویل ناپذیر است. در این صورت برای هر زیر

مجموعه‌ی دلخواه S از L که $a \leq \bigvee S$ داریم

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee_{s \in S} a \wedge s$$

پس بنا به فرض $s_1 \in S$ وجود دارد که $a = a \wedge s_1$ یعنی $a \leq s_1$.

قضیه ۲۴.۱.۱ (قضیه نمایش بیرخوف[1])

فرض کنیم $(P, \leq)$ مجموعه مرتب جزئی متناهی و L مشبکه توزیع پذیر متناهی است. در این صورت

(یک) نگاشت $\eta : L \to D(j(L))$ که هر $a \in L$ را به مجموعه‌ی $\{x \in j(L) \ : \ x \leq a\}$ می‌نگارد، یکریختی مشبکه‌ای از L به $D(j(L))$ است.

(دو) نگاشت $\varepsilon : P \to j(D(P))$ که هر $x \in P$ را به $x\downarrow$ می‌نگارد، یکریختی مشبکه‌ای از P به $j(D(L))$ است.

برهان . به [۱۵] مراجعه شود.

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه است. عضو $a \in L$ را فشرده می‌گوییم اگر برای هر مجموعه‌ی $A \subseteq L$ که $\bigvee A$ وجود دارد و $a \leq \bigvee A$، مجموعه‌ی متناهی $B \subseteq A$ وجود داشته باشد به طوری که $a \leq \bigvee B$.

تعریف ۲۶.۱.۱ مشبکه‌ی کامل L را جبری می‌گوییم اگر هر عضو $a \in L$ سوپریمم عضوهای فشرده باشد.

مثال ۲۷.۱.۱ فرض کنیم G گروه است. در این صورت $Sub(G)$ شامل تمام زیرمجموعه‌های G با ترتیب شمول مشبکه‌ای کامل و جبری است.

[1] Birkhoff

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه است و $a, c \in L$ دلخواه هستند. گوئیم c در رابطه زیر راهی با a است و می‌نویسیم $c \ll a$، اگر برای هر زیر مجموعه‌ی پایینی و جهتدار D از L که $\bigvee D$ وجود دارد و $a \leq \bigvee D$، داشته باشیم $c \in D$.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم L مشبکه کامل است. L رامشبکه‌ای پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر $a \in L$ داشته باشیم

$$a = \bigvee_{c \ll a} c$$

تعریف ۳۰.۱.۱ مجموعه‌ی مرتب جزئی $(X, \leq)$ را جدا شونده می‌گوییم هرگاه برای هر $a, b \in X$ که $a \nleq b$، عضوهای $c, d \in X$ وجود داشته باشند به طوری که $a \nleq d$ و $c \nleq b$ و $X = \uparrow c \cup \downarrow d$. همچنین اگر $c \nleq d$ یا $X - \uparrow c = \downarrow d$ آنگاه مجموعه‌ی مرتب جزئی $(X, \leq)$ را به طور اصلی جدا شونده می‌گوییم.

تعریف ۳۱.۱.۱ فرض کنیم $(P, \leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزئی است و $x, y \in P$. عضو y را یک پوشش برای x می‌گوییم و با نماد $x \prec y$ نمایش می‌دهیم، اگر $x < y$ و $x \leq z < y$ نتیجه دهد $x = z$.

تعریف ۳۲.۱.۱ مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$ را به طور ضعیف اتمیک می‌گوییم هرگاه هر بازه نابدیهی در آن شامل یک جفت پوشش باشد. به عبارت دیگر برای هر $a \neq b$ که $a < b$ دو عضو $u, v \in [a, b]$ وجود داشته باشند به طوری که $u \prec v$.

مثال ۳۳.۱.۱ برای هر مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P, \leq)$، مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های پایینی P با ترتیب شمول، به طور ضعیف اتمیک است.

قضیه ۳۴.۱.۱ هر مشبکه جبری به طور ضعیف اتمیک است.

برهان . به [۸] مراجعه شود.

حال قصد داریم مطالبی از مبانی ریاضیات را که در اثبات بعضی از قضیه‌های این پایان نامه از آنها استفاده خواهیم کرد، بیان کنیم.

تعریف ۳۵.۱.۱ فرض می کنیم X یک مجموعه است. در این صورت

(یک) **اصل انتخاب**

برای هر خانواده ناتهی $A = A_I \in I$ از مجموعه‌های ناتهی، نگاشت $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \in I$، $f(i) \in A_i$. به f تابع انتخاب برای A می‌گوئیم.

(دو) **اصل انتخاب پیوستار**

فرض کنیم R رابطه‌ای دوتایی روی X است. اگر برای هر $x \in X$، عضو $y \in X$ وجود داشته باشد به طوری که xRy، آنگاه دنباله $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از اعضای X موجود است که برا ی هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n R x_{n+۱}$.

قضیه ۳۶.۱.۱ (لم زورن)

فرض کنیم $(A, \leq)$ مجموعه‌ای مرتب جزئی است به طوری که هر زنجیر در آن دارای کران بالاست، در این صورت A عضو بیشین دارد.