بسم الله الرحمن الرحيم

١٤١٦٠١

گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

توسیع محض گروه های فشرده موضعی و همولوژی آنها

از

علی سعیدی

استاد راهنما

دکترحسین سهله

مهرماه ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم که تنها سرمایه های زندگی ام هستند.

تقدیر و تشکر:

با سپاس به درگاه خداوند متعال که به من توفیق انجام این پایان نامه را عنایت فرمود.
بدین وسیله، از استاد راهنمای گرامی، دکتر حسین سهله، به خاطر زحمات فراوان و راهنمایی های به جا در طول انجام این پایان نامه قدر دانی می کنم. همچنین برای ایشان و سایر اساتید محترم، که در طول این دوره از محضرشان بهره بردم،آرزوی سلامت و توفیقات بیش از پیش را دارم.

فهرست

چکیده:

توسیع محض گروه های فشرده موضعی و همولوژی آنها

علی سعیدی

فرض کنید £ نشان دهنده کاتگوری گروه های آبلی فشرده موضعی باشد. زیر گروه A از گروه B را محض گوییم اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح مثبت n، $nA = A \cap nB$.

در این پایان نامه، نقش گروه های محض را در کاتگوری £ مورد بررسی قرار داده و تعاریف معادل زیر گروه محض را در این کاتگوری بیان می کنیم. مجموعه ی تمام گسترش ها و گسترش های محض از گروه A به گروه C را به ترتیب با $Ext(C,A)$ و $Pext(C,A)$ نشان می دهیم. گروه $Pext(C,A)$ را به عنوان زیر گروه $Ext(C,A)$ تعریف کرده و با مثالی نشان می دهیم که لزوما برای $n \geq 2$، $Pext^n(C,A)$ زیر گروه $Ext^n(C,A)$ نیست.

کلید واژه: فشرده موضعی، زیرگروه محض، گسترش، گسترش محض.

ABSTRACT:

Pure extension of locally compact groups and their homology

Ali Saeedi

Let £ be the category of locally compact Abelian groups. A subgroup A of a group B is a pure subgroup if and only if for each positive integer n, $nA = A \cap nB$.
In this dissertation we study the role of purity in the category of locally compact Abelian groups and many equivalent definitions for the purity is given. The set of all extension and pure extension of A by C are denoted by $Ext(C,A)$ and $Pext(C,A)$, respectively. We consider $Pext(C,A)$ as a subgroup of $Ext(C,A)$ and will show by an example that for $n \geq 2$, $Pext^n(C,A)$ is not necessarily a subgroup of $Ext^n(C,A)$.

Key word: locally compact, pure subgroup, extension, pure extension.

مقدمه:

در این پایان نامه £ نشاندهنده کاتگوری گروه های آبلی فشرده ی موضعی (هاسدورف)است که درآن مورفیسم ها، همریختی های پیوسته اند.

اگر A و B گروه هایی در £ باشند، آنگاه $Hom(A,B)$مجموعه ی تمام همریختی های پیوسته از A به B می باشد.

مورفیسم $f : A \to B$ سره نامیده می شود اگر و فقط اگر برای هر u باز در A ، $f(u)$ در Bباز باشد.

دنباله ی دقیق $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ را دقیق محض گوییم اگر و فقط اگر $\alpha(A)$ در B محض باشد.

واین دنباله را دقیق سره گوییم اگر و فقط اگر αو β مورفیسم های سره باشند.

زیر گروه A از گروه B محض است اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح مثبت n، $nA = A \cap nB$.

هدف این پایان نامه بررسی هومولوژیکی محض بودن در £ است. این مفهوم دارای تعاریف معادل زیادی در نظریه گروه های آبلی است که برخی از تعاریف در این کاتگوری (£) مورد بررسی قرار می گیرد و در نظریه گروه های آبلی گسسته و مدول ها کاربردهای فراوانی دارد.

در این پایان نامه رابطه ی Hom و محض بودن و همچنین رابطه حاصل ضرب تانسوری اعضای £ و محض بودن مورد بررسی قرار می گیرد.

یک مورفیسم $\eta : E \to E'$ از گسترش ها یک سه تایی $\eta = (\alpha, \beta, \gamma)$از هومومورفیسم ها است به طوری که دیاگرام زیر جابجایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\chi} & C & \xrightarrow{\sigma} & B & \to & 0 \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & A' & \xrightarrow{\chi'} & C' & \xrightarrow{\sigma'} & B' & \to & 0 \end{array}$$

بنا به $[13, p.68 \,\&\, 69]$، اگر A , B دوگروه باشند، مجموعه ی $Ext(B,A)$ تحت عمل جمع بئر تشکیل یک گروه آبلی می دهد.

در این پایان نامه نشان داده می شود که $Pext(B,A)$ همواره زیر گروهی از $Ext(B,A)$ است.

سوال اساسی این است:

۱)تحت چه شرایطی $Pext(B,A) = Ext(B,A)$؟

۲)آیا $Pext^n(B,A)$ همواره برای $n \geq 2$ نیز زیر گروه $Ext^n(B,A)$ است؟

در فصل اول تعاریف، مثال هاوقضایای مورد نیاز ارایه می گردد.

در فصل دوم گسترش و گسترش محض را تعریف کرده و به بیان قضایاوگزاره هایی خواهیم پرداخت که به سوال اول پاسخ می دهد.

در فصل سوم گروه های تصویری و انژکتیو،تصویری محض و انژکتیو محض را تعریف کرده و به رده بندی آنها درکاتگوری های مختلف می پردازیم و با استفاده از آنها به سوال دوم نیز پاسخ داده می شود.

این پایان نامه بر مبنای مقاله ی $[4]$ است.

همچنین در این پایان نامه Z اعداد صحیح، T گروه دایره(گروه خارج قسمتی R/Z)، R^n گروه برداری، $Z(n)$ گروه دوری با مولد n ،

Z_p اعداد صحیح $P-adic$ و T_p $P-adic \quad selenoid$ می باشند. برای دیدن جزئیات به $[7]$ رجوع کنید.

نحوه شماره گذاری به صورت زیر است:

ابتدا شماره ی فصل و در نهایت شماره ی قضیه(تعریف،مثال) ذکر می شود. به عنوان مثال ۱-۱۹ یعنی فصل ۱، قضیه ی ۱۹ .

ارجاعات در اینجا بدین صورت است که اگر نوشته شود، گزاره ی $[1, P.360]$منظور منبع ۱، گزاره ی صفحه ۳۶۰ است.

همچنبن در ادامه به جای واژه ی توسیع از گسترش استفاده می کنیم.

فصل ۱

تعاریف، مثال ها و قضایای مورد نیاز

دراین فصل تعاریف، مثال ها و قضایای مقدماتی را که در فصول بعد مورد استفاده قرار می گیرند بیان می کنیم.

تعاریف، مثال ها و قضایای این بخش از منابع [2] و [14] است، مگر اینکه منبع دیگری ذکر شده باشد.

تعریف(۱-۱): یک سه تائی (G,O,τ) یک گروه توپولوژیک است هرگاه:

الف) G یک گروه باشد.

ب) G یک فضای توپولوژیکی باشد و توابع $\begin{array}{c} G\to G \\ x\mapsto x^{-1}\end{array}$ و $\begin{array}{c} G\times G\to G \\ (x,y)\mapsto xy\end{array}$ پیوسته باشند.

مثال(۱-۲): هرگروه با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک است.

مثال(۱-۳): گروه $GL(n,R)$ از ماتریسهای $n\times n$ وارون پذیر با درایه های حقیقی یک گروه توپولوژیک است. توپولوژی گروه $GL(n,R)$ توپولوژی نسبی القا شده ازفضای برداری $M_n(R)$ شامل تمام ماتریسهای $n\times n$ با درایه های در R است.

تعریف(۱-۴): فضای توپولوژیک X را فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز X دارای زیر پوششی متناهی باشد.

تعریف(۱-۵): فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. $C(X,Y)$ را مجموعه ی همه ی توابع پیوسته از X بتوی Y می نامیم. اگر $N(A,B)=\{f\in C(X,Y)|f(A)\subseteq B\}$، آنگاه گردایه ی شامل تمام $N(A,B)$ها که A یک زیر مجموعه ی فشرده X و B یک زیر مجموعه ی باز Y است، می تواند یک زیر پایه برای توپولوژی روی $C(X,Y)$ باشد. این توپولوژی را توپولوژی فشرده- باز گوییم.

تعریف(۱-۶): گروه توپولوژیک G را فشرده گوییم، هرگاه فضای توپولوژیک G فشرده باشد. $[9,P.2]$

تعریف(۱-۷): گروه فشرده موضعی یک گروه توپولوژیکی است که توپولوژی روی آن فضای هاسدورفی باشد که همانی دارای همسایگی فشرده باشد. $[9,P.2]$

تذکر(۱-۸): اگر G یک گروه توپولوژیک و H زیرگروهی ازآن باشد، دراین صورت با توجه به توپولوژی القائی، H نیز یک گروه توپولوژیک است. اگر H زیرفضای فشرده ای از G باشد دراین صورت H یک گروه فشرده است.

تعریف(۱-۹): فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و a عنصری از G باشد. عنصر a را فشرده گوییم هرگاه کوچکترین زیر گروه بسته ی G شامل a، فشرده باشد.

گزاره(۱-۱۰): فرض کنید G یک گروه آبلی و فشرده موضعی باشد. مجموعه ی B شامل همه ی عناصر فشرده ی G یک زیر گروه بسته ی G است.[7, P.92]

تعریف(۱-۱۱): فرض کنید G و G' دو گروه توپولوژیکی باشند. آنگاه نگاشت $f : G \to G'$ را یک یکریختی توپولوژیکی گوییم، هرگاه:

۱) f یک یکریختی گروهی باشد؛

۲) f یک همیومورفیسم ازفضای توپولوژیک G به فضای توپولوژیک G' باشد.

اگرگروه های توپولوژیک G و H با هم یکریخت باشند، دراین صورت می نویسیم $G \cong H$.[9, P.5]

مثال(۱-۱۲): گروه ضربی $C^* = C - \{0\}$ ازاعداد مختلط ناصفربا توپولوژی القائی یک گروه توپولوژیک است. زیرگروه $S^1 = \{z \in C; |z| = 1\}$ شامل تمام اعداد مختلط با طول ۱ روی S^1 گروه توپولوژیکی است که به آن گروه دایره می گویند.

قضیه(۱-۱۳): مورفیسم $f : R \to C^*$ با $f(t) = e^{2\pi i t}$ مورفیسمی ازگروه های توپولوژیک است که یکریختی $f' : T \to S^1$ با $f'(t+Z) = e^{2\pi i t}$ از گروه های آبلی فشرده را القا می کند. [9, P.8]

تعریف(۱-۱۴): فرض کنید G و H دو گروه توپولوژیک باشند بطوریکه H آبلی است. فرض کنید $Hom(G,H)$ مجموعه ی تمام همریختی های پیوسته از G به H باشد. به ازای هر f,g متعلق به $Hom(G,H)$ و هر $x \in G$، تعریف می کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

آنگاه $Hom(G,H)$ با عمل فوق یک گروه است.

اکنون اگر مجموعه $Hom(G,H)$ را با توپولوژی فشرده - باز در نظر بگیریم آنگاه، $Hom(G,H)$ یک گروه توپولوژیک است. [7, P.374]

تذکر(۱-۱۵): برای دو مجموعه ی X و Y، مجموعه ی تمام توابع $f : X \to Y$ با Y^X نشان داده می شود.

تعریف(۱–۱۶): اگر A یک گروه آبلی باشد، دراین صورت گروه $Hom(A,T) \subseteq T^A$ از همه ی مورفیسم های از گروه آبلی A بتوی گروه دایره (S^1)، گروه مشخصه A نامیده می شود و با $\hat{A}$ نشان داده می شود. [9, P.11]

قضیه(۱–۱۷): اگر A گروهی آبلی گسسته باشد، آنگاه $\hat{A}$ گروهی آبلی فشرده است. [9, P.11]

تذکر(۱–۱۸): اگر E گروهی آبلی متناهی باشد، دراین صورت $\hat{E}$ با E ایزومورف است. [9, P.12]

لم(۱–۱۹): اگر A گروه آبلی باشد، دراین صورت تابع $\eta_A : A \to \hat{\hat{A}}$ که $\eta_A(a)(\chi) = \chi(a)$ مورفیسمی یک به یک از گروه های آبلی است.

نتیجه(۱–۲۰): اگر A گروه آبلی متناهی باشد دراین صورت $\hat{A}$ یکریخت با A است و از طرفی نیز $\hat{\hat{A}}$ یکریخت با A است و $\eta_A : A \to \hat{\hat{A}}$ نیزیک به یک می باشد، درنتیجه η_A یکریختی است.

تعریف(۱–۲۱): اگر p یک عدد اول باشد، $(1/p^\infty)Z$ را گروهی از همه ی اعدادی در نظر می گیریم که بتوان آن را به صورت m/p^n نوشت که m عدد صحیح و n اعداد طبیعی است. همچنین تعریف می کنیم $Z(p^\infty) = (1/p^\infty)Z/Z$.

در جدول زیر برخی از گروه ها و دوگان آنها را نشان می دهیم.

تبصره(۱–۲۲): جدول گروه های مشخصه اساسی: [9, P.28]

Group	Z	T	$Z(n)$	Z_p	$Z(p^\infty)$	T_p	$(1/p^\infty)Z$
Character Group	T	Z	$Z(n)$	$Z(p^\infty)$	Z_p	$(1/p^\infty)Z$	T_p

Group	A	B	$A \oplus B$	E Finite	$Z^n \oplus E$	$T^n \times E$	R
Character Group	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{A} \oplus \hat{B}$	E Finite	$T^n \times E$	$Z^n \oplus E$	R

قضیه(۱-۲۳): (قضیه ی دوگان پنتریاگین): برای هر گروه آبلی A، مورفیسم $\eta_A : A \to \hat{\hat{A}}$ یک یکریختی است.

قضیه(۱-۲۴): اگر G فشرده باشد، آنگاه $\hat{G}$ گسسته است و همچنین اگر G گسسته باشد آنگاه $\hat{G}$ فشرده است. $[7, P.362]$

تعریف(۱-۲۵): فرض کنید X یک مجموعه و $F(X)$ یک گروه همراه با تابع $j : X \to F(X)$ باشد. گوئیم $F(X)$ گروه آبلی آزاد روی مجموعه ی X است اگر برای هرتابع $f : X \to A$ که A گروه آبلی است مورفیسم یکتائی مانند $f' : F(X) \to A$ وجود داشته باشد به طوری که $f = f' \circ j$.

قضیه(۱-۲۶): هرزیرگروه یک گروه آبلی آزاد، یک گروه آبلی آزاد است.

تعریف(۱-۲۷): اگر A یک گروه آبلی باشد دراین صورت $t(A) = \{a \in A; \exists n \in N; na = 0\}$ زیرگروه تابی A نامیده می شود. و اگر $t(A) = 0$ آنگاه گروه A را بی تاب گویند.

تذکر(۱-۲۸): گروه خارج قسمت $A/t(A)$ بی تاب است.

تعریف(۱-۲۹): برای هرعدد طبیعی p، گروه A را یک p-گروه گویند، هرگاه برای هر عنصر $a \in A$، $n \in N$ای وجود داشته باشد به طوری که $p^n a = 0$.

برای هرگروه A، مجموعه ی $A_p = \{ a \in A; \exists\, n \in N\ ; p^n a = 0 \}$ زیرگروه p- سیلوی از A نامیده می شود.[10]

تعریف(۱-۳۰): فرض کنید A یک گروه آبلی باشد. عنصر $a \in A$ را بخشپذیر گویند اگربرای هرعدد طبیعی n، $x \in A$ای وجود داشته باشد که $nx = a$. مجموعه ی $\bigcap_{n \in N} \mu_n(A)$ از همه ی عنصرهای بخشپذیر را با $D(A)$ نشان می دهیم.

گروه A را بخشپذیر گویند اگر $A \subseteq D(A)$.

همچنین گوئیم A تحویل یافته است اگر 0 تنها زیرگروه بخشپذیر A باشد.$[13, P.632]$

تذکر(۱-۳۱): اگر A گروهی آبلی باشد به ازای هر $x \in A$ می نویسیم $\mu_n(x) = nx$.

مثال(۱-۳۲): Q و R گروه های بخشپذیرهستند.

مثال(۱-۳۳): تصویرهمریخت یک گروه بخشپذیر، بخشپذیراست. بنابراین T بخشپذیر است.

مثال(۱-۳۴): $Z(1/p^{\infty})$ بخشپذیر نیست اما $Z(p^{\infty})$ بخشپذیر است. $[9,P.633]$

قضیه(۱-۳۵): هرگروه آبلی A یکریخت با $D(A)\oplus A/D(A)$ است که درآن $A/D(A)$ تحویل یافته است.

گزاره(۱-۳۶): اگر A یک گروه بخشپذیر باشد دراین صورت $A=t(A)\oplus A'$ و همه ی زیرگروه های p - سیلوی A_p بخشپذیرند.که در آن $A'\cong A/D(A)$.

تعریف(۱-۳۷): فضای توپولوژیک X را همبند گوییم، هرگاه X را نتوان بصورت اجتماع دو مجموعه ی باز از هم جدا نوشت.

تعریف(۱-۳۸): گروه توپولوژیک G را همبند گوییم، هرگاه فضای توپولوژیکی G همبند باشد.

تعریف(۱-۳۹): فضای توپولوژیک X را ناهمبند کلی گوییم، هرگاه مولفه های همبند فضا تک نقطه ای ها باشند.

تعریف(۱-۴۰):گروه توپولوژیک G را ناهمبند کلی گوییم، هرگاه فضای توپولوژیک G ناهمبند کلی باشد.

قضیه(۱-۴۱): فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و C مولفه ی همانی در G باشد. آنگاه G/C یک گروه هاسدورف و ناهمبند کلی است.

قضیه(۱-۴۲): فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی و C مولفه ی همانی G باشد.آنگاه C، اشتراک همه ی زیرگروه-های باز G است.

تعریف(۱-۴۳): فضای توپولوژیک X را سیگما- فشرده گوییم، هرگاه X اجتماع شمارشپذیر از زیر مجموعه های فشرده باشد.

تعریف(۱-۴۴): گروه توپولوژیک G را سیگما- فشرده گوییم، هرگاه فضای توپولوژیک G سیگما- فشرده باشد.

قضیه(۱-۴۵)(نگاشت باز برای گروه های فشرده موضعی): فرض کنید G و H گروه هایی فشرده موضعی و G سیگما- فشرده باشد. اگر مورفیسم $f:G\to H$ پیوسته و پوشا باشد، آنگاه f بازاست. $[\ 9,P.650\ ]$

تعریف(۱–۴۶): فرض کنید G یک گروه باشد. nGرا به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$nG=\{nx \ ;x\in G\}.$$

تعریف(۱–۴۷): گروه تابدار G را کراندار گوییم، هرگاه عدد صحیح مثبتی چون n وجود داشته باشد بطوریکه $nG=0$.

تعریف(۱–۴۸): فرض کنید A , B دوگروه باشند. یک گسترش از A به Bیک دنباله ی دقیق کوتاه به صورت $E:0\to A\xrightarrow{\chi} C\xrightarrow{\sigma} B\to 0$ از گروه ها و همومورفیسم ها است .مجموعه گسترش های از A به B را با $Ext(B,A)$ نشان می دهیم .

تعریف(۱–۴۹): فرض کنید A , B دوگروه باشند. یک گسترش محض از A به B یک دنباله ی دقیق کوتاه به صورت $E:0\to A\xrightarrow{\chi} C\xrightarrow{\sigma} B\to 0$ از گروه ها و همومورفیسم ها است.مجموعه این گسترش های محض را با $Pext(B,A)$ نشان می دهیم.

تعریف(۱–۵۰): گروه G را هم تاب گوییم، هرگاه برای هر گروه بی تاب J، $Ext(J,G)=0$.

گزاره (۱–۵۱): یک گروه تابدار، هم تاب است اگر و تنها اگر جمع مستقیم یک گروه بخشپذیر و یک گروه کراندار باشد.

تعریف(۱–۵۲): گروه توپولوژیکی G به طورفشرده تولید شده است اگر زیر مجموعه ی فشرده K به قسمی وجود داشته باشد که $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(K\cup K^{-1})^{n}$.

گزاره (۱–۵۳): هر گروه به طور فشرده تولید شده سیگما- فشرده است.

قضیه(۱–۵۴): گروه G در £ به طور فشرده تولید شده است اگر و فقط اگر $G\cong R^{n}\oplus Z^{m}\oplus C$ که در آن R^{n} گروه برداری $n-$بعدی و C گروهی فشرده است.

تعریف(۱–۵۵): گروه G در £ را بدون زیر گروه کوچک گوییم، هرگاه همسایگی U از 0 وجود داشته باشد که شامل زیر گروه های غیر بدیهی نباشد.

قضیه(۱-۵۶): گروه G در £ بدون زیر گروه کوچک است اگر و فقط اگر $G \cong R^n \oplus T^m \oplus D$ که در آن R^n گروه برداری n-بعدی ، T^m چنبره m-بعدی و D گروهی گسسته است .

تعریف(۱-۵۷): اگر G گروه آبلی فشرده موضعی باشد آنگاه دوگان G گروهی توپولوژیک از مشخصه های پیوسته G است که با $\hat{G}$ نشان داده می شود.

نتیجه(۱-۵۸): G در £ به طور فشرده تولید شده است اگر و فقط اگر $\hat{G}$ بدون زیرگروه کوچک باشد.

برهان:

با توجه به تبصره(۱-۲۲) و این نکته که دوگان گروه گسسته، گروه فشرده است نتیجه با استفاده از قضیه(۱-۵۲)و (۱-۵۴) برقرار است.

تعریف(۱-۵۹): فرض کنید R حلقه ای یکدار باشد، گروه آبلی و جمعی M را یک R-مدول (چپ) گویند اگر تابعی چون $\psi : R \times M \to M$ که $\psi(r,m) = rm$ موجود باشد به قسمی برای $r_1, r_2, r, r' \in R$ و $m, m' \in M$،

۱) $r(m+m') = rm + rm'$;

۲) $(r+r')m = rm + r'm$;

۳) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$.

هرگاه R دارای واحد 1_R باشد و

۴) $1_R m = m$ ،

آنگاه گوییم M R-مدول یکانی است.

تعریف(۱-۶۰): G-مدول E دوری نامیده می شود اگرعنصری مانند $w \in E$ وجود داشته باشد به قسمی که $E = \overline{\langle w \rangle}$.

هرعنصر w با این خاصیت را مولد می نامیم.

قضیه(۱-۶۱): گروه آبلی فشرده موضعی G به طورتوپولوژیکی یکریخت با $R^n \times G_0$ است که G_0 گروه آبلی فشرده موضعی است که شامل زیرگروه فشرده ی باز است.[7, P.389]

قضیه(۱-۶۲): فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد.آنگاه:

۱) اگر G بخشپذیر باشد، $\hat{G}$ بی تاب است.

۲) اگر G گسسته یا فشرده باشد، G بخشپذیر است اگر و فقط اگر $\hat{G}$ بی تاب باشد. $[7, P.385]$

قضیه(۱-۶۳): اگر G گروهی به طور فشرده تولید شده در £ و $\hat{G}$ گروه مشخصه G باشد، آنگاه:

۱) G بی تاب است اگرو تنها اگر $\hat{G}$ بخشپذیر باشد.

۲) G بخشپذیراست اگر و تنها اگر $\hat{G}$ بی تاب باشد.

لم(۱-۶۴): فرض کنید $0 \to A \longrightarrow B \longrightarrow C \to 0$ گسترشی در £ باشد. اگر:

۱) زیرگروه فشرده ماکسیمم C برابر صفر باشد،

۲)یا A همبند باشد،

۳) یا C بی تاب و A/A_0 متناهی باشد;

آنگاه $B \cong A \oplus C$.

تعریف(۱-۶۵): فرض کنید $\varphi : G \to H$ مورفیسمی در £ باشد. آنگاه نگاشت $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G}$ که با $\hat{\varphi}(\chi) = \chi \circ \varphi$ تعریف می شود نیز مورفیسمی از £ است و دوگان φ نامیده می شود.

تذکر(۱-۶۶): اگر $E : 0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\theta} C \to 0$ دنباله ی دقیق کوتاه در £ باشد، آنگاه دوگان E که به صورت $\hat{E} : 0 \to \hat{C} \xrightarrow{\hat{\theta}} \hat{B} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{A} \to 0$ تعریف می شود، دنباله ی دقیق کوتاه است.

تذکر(۱-۶۷): اگر G گروهی تابی باشد، دنباله ی دقیق محض $0 \to G_b \longrightarrow G \longrightarrow G/G_b \to 0$ وجود دارد که G_b حاصل جمع مستقیم ازگروه های دوری است و G/G_b حاصل جمع مستقیم گروه های یکریخت با $Z(p^\infty)$ است. $[6, p.370]$

قضیه(۱-۶۸): شرایط زیربرای دنباله های دقیق کوتاه $0 \to A \longrightarrow B \longrightarrow C \to 0$ از R-مدولها هم ارزند:

۱) برای هر $r \in R$، همومورفیسم طبیعی $Hom(R/Rr, B) \longrightarrow Hom(R/Rr, C)$ پوشاست.

۲) برای هر $r \in R$، همومورفیسم طبیعی $R/Rr \otimes A \longrightarrow R/Rr \otimes B$ یک به یک است.

۳) برای هر $r \in R$، $rA = A \cap nB$.

تعریف (۱-۶۹) : فرض کنید G یک گروه آبلی توپولوژیک و H زیرگروه بسته ی G باشد. H را جمعوند مستقیم G گوییم، هرگاه G شامل یک زیر گروه بسته مانند K باشد بطوریکه $K \cap H = 0$ ونگاشت $(h,k) \mapsto h+k$ یک همیومورفیسم از $H \times K$ بتوی G باشد.

تعریف(۱-۷۰):گروه A را به طور جبری فشرده گوییم اگر A جمعوند مستقیم گروه دلخواه G باشد که به عنوان زیرگروه محض شامل A است.

مثال(۱-۷۱):گروه های بخشپذیر و گروه های کراندار به طور جبری فشرده اند.$[1, p.159]$

تعریف (۱-۷۲): فرض کنیم A یک $R-$مدول باشد، یک حل برای A روی R، دنباله ی دقیق $\ldots \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots \to C_1 \to C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ از $R-$مدول ها می باشد.

حال اگر فرض کنیم $C: \ldots \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots \to C_0 \to 0$ یک زنجیر مرکب از $R-$مدول ها باشد تابع ε را همریختی افزایش گویند و اگر حل $C \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ برای همه ی C_i ها آزاد باشد، آنگاه به این زنجیر مرکب، حل آزاد گوییم.

تعریف (۱-۷۳): فرض کنیم $C_*(X,R) = \{C_q(X,R) \ ,\partial q \ \}$ زنجیر مرکب

$$\ldots \to C_q(X,R) \xrightarrow{\partial q} C_{q-1}(X,R) \to \ldots$$

باشد.حال گر فانکتور Hom را روی زنجیر بالا اثر دهیم، داریم:

$$\ldots \to Hom\ (C_{q-1}(X,R),R) \xrightarrow{\delta} Hom\ (C_q(X,R),R) \to \ldots$$

اگر فرض کنیم $C^q(X,R) = Hom(C_q(X,R),R)$ در این صورت داریم:

$$\ldots \to C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1} \to \ldots$$

و اگر $Z^q(X,R)=Ker\delta^q$ و $B^q(X,R)=\operatorname{Im}\delta^{q-1}$ آنگاه کوهومولوژی مرتبه q ام به صورت

$H^q(X,R)=\dfrac{Z^q(X,R)}{B^q(X,R)}$ تعریف می شود.