۸۷/۱/۱۰۱۸۹۷

۸۶ ۱/۲۴

بسم الله الرحمن الرحیم

۲۱/۱۰/۱۳۸۷

۱۰۷۶۴۲

دانشگاه تبریز

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان

نمایش جبرهای لی، ماتریس‌های پوچتوان و C-برد عددی

استاد راهنما

دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور

دکتر حمید موسوی

پژوهشگر

حمید خدابنده نوشری

شهریورماه ۱۳۸۷

نام خانوادگی: خدابنده نوشری **نام:** حمید

عنوان پایان‌نامه: نمایش‌های جبرلی،ماتریس‌های پوچتوان C-برد عددی

استاد راهنما: دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور: دکتر حمید موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **دانشگاه:** تبریز

دانشکده: ریاضی **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** شهریور ۱۳۸۷ **تعداد صفحه:** ۸۵

کلید واژه‌ها: نمایش‌های جبر لی،ماتریس‌های پوچتوان،فرم‌های جوردن،تجزیه کلبش-گوردان، C-برد عددی،NMR-طیف سنجی

چکیده:

در این پایان‌نامه نظریه نمایش‌های جبر لی را بررسی کرده و نمایش‌ها را در فرم کلبش-گوردان-جوردن بدست می‌آوریم تا با استفاده از آن ارتباطی مابین نمایش یکانی و مدار یکانی ماتریس‌های پوچتوان بیابیم.با بررسی C-برد عددی و کمترین مربعات در نمایش‌ها و با توجه به ضرایب تجزیه کلبش-گوردان در نمایش‌های تحویل‌ناپذیر، ماکسیموم تابع انتقال را می‌یابیم که این تابع در NMR-طیف‌سنجی و نظریه کوانتوم کاربرد دارد.

این مقاله با عنوان

Lie algebra representation, nilpotent matrices, and C -numerical rang

توسط

G. Dirr, U. Helmke, M. Kleinsteuber

تالیف و در سال ۲۰۰۶ در

Linear Algebra and its Applications ٤١٣ (٢٠٠٦) ٥٣٤–٥٦٦

چاپ شده است.

مقدمه و پیشینه پژوهش

این مقاله شامل ٤ فصل و ٦ بخش می‌باشد؛ که مطالب ذیل برای راهنمایی ومطالعه بهتر آن می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

فصل۱ شامل شش بخش تقریبا مستقل می‌باشد که حاوی مطالبی کلاسیک از جبر لی، گروه لی و جبر خطی می‌باشد. در این فصل تمام ابزاری را که در فصول آتی به آن نیازمندیم را فراهم می‌سازیم.

بخش اول اطلاعاتی در مورد نظریه نمایش جبر لی به ما می‌دهد که برای مطالعه بیشتر می‌توان به کتاب [Hum] مراجعه نمود. در این بخش؛ قضیه۱–۲ (وایل[1]) قضیه‌ایی است بسیار مهم؛ که صورت‌های مشابه‌ای از آن در جبر شرکت‌پذیر نیز وجود دارد و توسط آن نمایش‌های کاملا تحویل‌پذیر[2] به مجموعی از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر[3] تبدیل می‌شود.

بخش دو به جبر خطی اختصاص دارد. قضیه۱–۳ فرم جوردن[4] ماتریس‌های پوچتوان[5] رامعرفی می‌کند و به ما این امکان را می‌دهد که با توجه به رده تشابه به این نتیجه برسیم که آیا دو ماتریس (عملگر) با‌هم متشابهند یا خیر و کلاسهای تشابه را دسته‌بندی نماییم.ادامه این بخش به فضاهای ضرب داخلی و معرفی عملگرهای این فضا می‌پردازد و در خاتمه این بخش ما فرم‌ها را توضیح می‌دهیم که در شناختن گروه‌ها وجبرهای لی کلاسیک بسیار مفید هستند.

بخش سوم در رابطه با گروه‌های لی ماتریسی می‌باشد که سریعترین راه برای رسیدن به نظریه گروه‌های لی بدون وارد شدن به هندسه منیفلد است.بدیهی است که اگر چه مطالب این بخش نتایج کمی از گروه‌های لی را دارد اما برای رسیدن به اهداف ما در این مقاله کفایت می‌کند. لم۱–۱۷ و قضیه۱–۱۸ این توانایی را برایمان ایجاد می‌کند که از نمایش‌های جبر لی به نمایش‌های گروه لی و بالعکس برسیم. برای مطالعه بیشتر [Bur] منبع کاملی می‌باشد.در ادامه این بخش مختلط‌سازی[6] بررسی می‌شود؛ در واقع $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ فرم حقیقی و فشرده $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ می‌باشد، با مراجعه به [Hel] می‌توان به نتایج زیبایی در مورد فرم‌های حقیقی[7] ،تجزیه کارتان[8]، زیرجبرهای کارتان[9] و... رسید. در

[1] weyl
[2] Completely reducible
[3] irreducible
[4] jordan
[5] nilpotent
[6] complexification
[7] Real form
[8] Cartan subalgebra (CSA)
[9] Cartan decomposition

قضیه۱-۱۹ ارتباط نمایش‌های حقیقی و مختلط‌شده بیان می‌گردد که در ادامه از آن استفاده می‌شود.

بخش چهارم، به نمایش‌های $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ و $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ اختصاص داده شده است. قضیه۱-۲۵ در این بخش از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا ارتباط بین نمایش یکانی و مدارهای تشابه را بیان می‌دارد و در فصل۲ مکرر از آن استفاده می‌شود. برای مطالعه بیشتر درباره نمایش‌ها می‌توان به کتاب [Ful] مراجعه نمود.

بخش پنجم مربوط به ماتریس‌های جایگشتی می‌باشد. این بخش تنها از این جهت که مستقل از بخش‌های دیگر بود بطور مجزا آورده شد؛ قضیه۱-۲۶ این فصل، در انتهای فصل۳ و بشکل نامحسوس‌تری در کل فصل٤ استفاده می‌گردد.

بخش ششم در مورد C-برد عددی[۱۰] است. در این فصل، قضیه۱-۲۷ را بیان می‌کنیم تا ارتباط C-برد عددی نمایش‌های حقیقی و مختلط را بیان کنیم. برای مطالعه بیشتر در این رابطه به [Gol] مراجعه شود.

فصل۲ به مطالعه نمایش‌های یکانی[۱۱] و مدار[۱۲] یکانی ماتریس‌های پوچتوان می‌پردازیم در قضیه۲-۲ ما هر نمایش تحویل‌ناپذیر را در CGJ[۱۳]-فرم نمایش می‌دهیم تا براحتی بتوانیم به نمایش یکانی آن دست بیابیم. در ادامه تجزیه کلبش-گوردان حاصل‌ضرب تانسوری دو نمایش تحویل‌ناپذیر را در قضیه۲-٤ می‌آوریم تا در نتایج محاسبات عددی فصل٤ از آن استفاده کنیم. قضیه۲-۸ از قضایای کلیدی این فصل می‌باشد که مکرر از آن استفاده می‌شود. برای مطالعه بیشتر درباره مدارهای ماتریس‌های پوچتوان کارهای گسترده‌ای توسط Ness و Sekiguchi انجام شده که می‌توان به [Nes] و [Sek] مراجعه نمود

در فصل۳ ما فاصله بین دو نمایش راتعریف می‌کنیم تا به توسط آن مینیموم فاصله دو نمایش را بیابیم قضیه۳-۲ و۳-۳ توصیف کاملی از این فرایند را به ما می‌دهد. در واقع آزمونی برای یافتن اکسترمم فاصله در اختیار ما قرار می‌دهد. در ادامه ارتباط C-برد عددی نمایش $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ و $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ را با توجه به بخش٦ فصل۱ بررسی می‌کنیم.

در فصل٤ ما از کاربرد تمام نتایجی که در فصول قبل بدست آورده‌ایم، در اکسترمم نمودن تابع انتقال[۱٤] استفاده می‌کنیم. تابع انتقال در NMR[۱۵]-طیف سنجی[۱٦] و نظریه کوانتوم کاربرد دارد.

[۱۰] C -Numerical rang
[۱۱] unitary
[۱۲] orbit
[۱۳] Clebsch-Gordan-Jordan
[۱٤] Transfer function
[۱۵] Nuclear magnetic resonance
[۱٦] spectroscopy

قضـــایا و لم‌های گفته‌شده در ایــن فصــل محاسبـات پیاپی حاصل‌ضــرب تانــسـوری نمـایــش‌هـای می‌باشد و از ضـرایـب کلبش-گوردان در محاسبات عددی اکسترمم نمـودن تـابع انتـــقال استـــفاده می‌گردد.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

فصل ۱

بخش ۱- جبر لی

اگر L یک فضای برداری روی میدان F باشد وعمل دوتایی بنام براکت

$$[\ ,\ ]: L \times L \to L$$

با شرایط زیر موجود باشد،

۱- $[\ ,\ ]$ نسبت به هردو مولفه خطی باشد

۲- برای هر x در L $\quad [x,x]=0$

۳- برای هر x, y, z در L $\quad [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

آنگاه L یک جبر لی روی میدان F خواهد بود.

هر زیرفضـای خطی $M \subset L$ که با عمل براکـت L خود یک جبـر لی باشد را یـک زیـرجبـــر لـی L می‌نامند.

هر زیرجبر لی $I \subset L$ را که

$$\text{برای هر } x \text{ در } L \quad [x,I] \subset I$$

یک ایده‌آل L می‌گویند.

جبر لی L آبلی[۱] است هرگاه

$$\text{برای هر } x, y \text{ در } L \quad [x,y]=0$$

اگر L و K دو جبر لی روی میدان F باشند و $\Phi: L \to K$ یک نگاشت خطی باشد و

$$\Phi([x,y])=[\Phi(x),\Phi(y)]$$

آنگاه Φ یک هومومورفیسم[۲] جبر لی می‌باشد.

---

[۱] abelian

اگر Φ یک‌به‌یک وپوشا باشد یک ایزومورفیسم جبر لی است.

مثالهایی از جبر لی

مجموعه تمام ماتریس‌های مربعی $n\times n$ روی میدان دلخواه F همراه با عمل براکت

$$[A,B]=AB-BA$$

یک جبر لی می‌باشد که با $\mathfrak{gl}_n(F)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه تمام عملگرهای خطی V که فضای برداری روی میدان F می‌باشد، همراه با عمل براکت

$$[S,T]=ST-TS$$

یک جبر لی می‌باشد که با $\mathfrak{gl}(V)$ نمایش می‌دهیم. اگر V متناهی‌البعد و از بعد n باشد دو جبر لی بالا ایزومورف هستند و

$$\mathfrak{gl}(V)\cong\mathfrak{gl}_n(F)$$

و از جبرهای لی معرفی شده در بالا زیر جبرهای زیر بدست می‌آید.

$$\mathfrak{sl}_n(F)=\{x\in\mathfrak{gl}_n(F)\,|\,tr(x)=0\}$$

و اگر V متناهی‌البعد باشد

$$\mathfrak{sl}(V)=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\,|\,tr(x)=0\}$$

عملگرخطی $ad_x:L\to L$ با رابطه

$$ad_x(y)=[x,y]$$

تعریف می‌شود و نگاشت خطی

$$ad:L\to\mathfrak{gl}(L)$$

$$ad(x)=ad_x$$

[۲] homomorphism

را نمایش الحاقی[۳] گویند، که یک همومورفیسم جبرهای لی می‌باشد.

فرم متقارن k روی جبرهای لی متناهی‌البعد با تعریف

$$k : L \times L \to F$$

$$k(x,y) = tr\left(ad_x \circ ad_y\right)$$

را فرم killing روی جبر لی می‌گویند.

جبر لی L را ساده[۴] می‌نامند هرگاه ایده‌آل غیر بدیهی نداشته باشد.

جبر لی L را نیم‌ساده[۵] می‌نامند هرگاه ایده‌آل آبلی نداشته باشد.

اگر V فضایی برداری روی میدان F و L یک جبر لی روی همان میدان باشد؛ هرگاه عمل

$$(\ ,\ ) : L \times V \to V$$

$$(l, v) = l.v \quad l \in L, v \in V$$

با شرایط زیر موجود باشد

$$\forall l_1, l_2 \in L \quad v \in V \quad \alpha \in F \qquad (\alpha l_1 + l_2).v = \alpha(l_1.v) + (l_2.v)$$

$$\forall l \in L \quad v_1, v_2 \in V \quad \alpha \in F \qquad l.(\alpha v_1 + v_2) = \alpha l.v_1 + l.v_2$$

$$\forall l_1, l_2 \in L \quad v \in V \quad \alpha \in F \qquad [l_1, l_2].v = l_1.(l_2.v) - l_2.(l_1.v)$$

آنگاه L روی V عمل می‌کند و V را یک $L-$ مدول[۶] می‌نامیم.

اگر

$$\pi : L \to \mathfrak{gl}(V)$$

[۳] adjoint representation
[۴] simple
[۵] semisimple
[۶] module

یک هومورفیسم از جبر لی L به $\mathfrak{gl}(V)$ باشد(V فضایی برداری روی میدان F و L جبر لی روی همان میدان) آنگاه π یک نمایش جبر لی می‌باشد.

در واقع V یک L- مدول با عمل زیر است

$$\pi(x)(v) = x.v$$

بین هر مدول و نمایش یک تناظر است که از هر کدام می‌توان با توجه به رابطه بالا به دیگری رسید.

مدول جبر لی $\Longleftrightarrow$ نمایش جبر لی

دو نمایش $\pi_1, \pi_2 : L \to \mathfrak{gl}(V)$ معادلند[۷] اگر $P \in GL(V)$ وجود داشته باشد که

$$\pi_1 = P\pi_2P^{-1} \quad \text{یا} \quad \pi_1(l) = P\pi_2(l)P^{-1}, l \in L \qquad (۱)$$

اگر V و W، L- مدول باشند و

$$\theta : V \to W$$

نگاشتی خطی بین آنها باشد اگر

$$\forall l \in L \quad v \in V \quad \theta(x.v) = x.\theta(v)$$

آنگاه θ یک L- هومورفیسم است.

اگر V یک L- مدول و $W \subset V$ زیرفضای برداری آن باشد؛ اگر $L.W \subset W$ آنگاه W را یک زیر مدول V می‌نامیم.

در واقع W تحت نمایش متناظر با این مدول پایا است و

$$\pi(L)(W) \subset W$$

و در نمایش ماتریسی آن (در حالتی که V متناهی‌البعد است) در پایه‌ایی مشخص داریم

$$\forall l \in L \quad \pi(l) = \begin{pmatrix} \pi(l)|_{W_1} & B(l) \\ 0 & C(l) \end{pmatrix} \qquad (۲)$$

---

[۷] equivalent

$L-$ مدول V ساده یا تحویل‌ناپذیراست اگر زیرمدول غیر بدیهی نداشته باشد.

$L-$ مدول V کاملا تحویل‌پذیر است هرگاه برای هر زیرمدول W_1, زیرمدول W_2 وجود داشته باشد که

$$V = W_1 \oplus W_2$$

یا برای نمایش متناظر (متناهی‌البعد) با مدول داریم؛ اگر نمایش ماتریسی آن تحت زیرفضای پایای W_1 به صورت بلوکی بالا مثلثی موجود باشد؛ آنگاه پایه‌ایی موجود است که نمایش آن بلوکی قطری است.

$$\forall l \in L \quad \pi(l) = \begin{pmatrix} \pi(l)|_{W_1} & 0 \\ 0 & C(l) \end{pmatrix} \quad (۳)$$

در واقع $C(l) = \pi(l)|_{W_2}$ یا هر زیرفضای پایا مکمل پایا دارد.

مجموع مستقیم و حاصل‌ضرب تانسوری دو نمایش جبر لی L چنین تعریف می‌شود

$$\pi_1 : L \to \mathfrak{gl}(V_1)\ ,\ \pi_2 : L \to \mathfrak{gl}(V_2),\ \ \pi_3 : L \to \mathfrak{gl}(V_3)$$

$$l \in L\ ,\ v_1 \in V_1\ , v_2 \in V_2$$

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : L \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)\ ,\ \pi_1 \oplus \pi_2(l)(v_1 + v_2) = \pi_1(l)(v_1) \oplus \pi_2(l)(v_2)$$

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(l) = \begin{pmatrix} \pi_1(l) & 0 \\ 0 & \pi_2(l) \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 \otimes \pi_2 : L \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$$

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(l) = \pi_1(l) \otimes I_{V_2} + I_{V_1} \otimes \pi_2(l)$$

$$(\pi_1 \oplus \pi_2) \otimes \pi_3 = (\pi_1 \otimes \pi_3) \oplus (\pi_2 \otimes \pi_3)$$

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \pi_3 = (\pi_1 \otimes \pi_2) \otimes \pi_3 = \pi_1 \otimes (\pi_2 \otimes \pi_3)$$

$$n \bullet \pi_1 = \underbrace{\pi_1 \oplus \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_1}_{n-times} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$.\pi_1^n = \underbrace{\pi_1 \otimes \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_1}_{n-times} \quad n \in \mathbb{N}$$

که در آن V_1, V_2 و V_3 فضاهایی متناهی‌البعد روی میدان F و L جبر لی متناهی‌البعد روی همان میـدان است.

لم ۱-۱: (شور[۸])

اگر V یک L- مدول ساده روی میدان $\mathbb{C}$ باشد پس هر L- ایزمورفیسم آن مضربی از نگاشت همانی است.

برهان: مراجعه شود به [Hal] ٤-٢٦

قضیه ۱-۲: (وایل)

هرمدول از یک جبر لی نیم‌ساده؛کاملا تحویل‌پذیر است.

برهان: مراجعه شود به [Hum] ٦-٣

******

بخش ۲- جبرخطی

در تمام این بحث V فضایی برداری n بعدی روی میدان $\mathbb{C}$ است وتمام عملگرهای خطی روی آن را با $End(V)$ وهمچنین مجموعه تمام ماتریس‌های مربعی n در n را با $M_n(\mathbb{C})$ نمایش مـی‌دهـیم کـه یک جبر می‌باشد و

$$M_n(\mathbb{C}) \cong End(V) \quad (٤)$$

و نتایج بدست‌آمده برای ماتریس‌ها وعملگرها یکسان می‌باشند.

---

[۸] schur

دوعملگر (ماتریس) T_1,T_2 مشابهند هرگاه عملگر (ماتریس) $P \in GL(V)$ ($P \in GL_n(\mathbb{C})$) موجود باشد که

$$T_1 = PT_2P^{-1}$$

تشابه در مجموع $End(V)$ ($M_n(\mathbb{C})$) یک رابطه هم‌ارزی است.

$\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه[۹] (طیف[۱۰]) عملگر (ماتریس) T می‌باشد هرگاه $\lambda I - T$ وارون‌پذیر نباشد که در آن I عملگر (ماتریس) همانی روی V است. این معادل است با

$$\det(\lambda I - T) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \text{ مقدار ویژه عملگر } T$$

چندجمله‌ای $f(x) = \det(xI - T)$ را چندجمله‌ای مشخصه عملگر (ماتریس) T می‌نامند و $f(T) = 0$ چندجمله‌ای p با کمترین درجه و با ضریب پیشرو یک، که $p(T) = 0$ باشد را چندجمله‌ای مینیمال T می‌گوییم و p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند.

عملگر (ماتریس) T پوچتوان است هرگاه

$$\exists m \in \mathbb{N}, T^m = 0 \qquad (۵)$$

کوچکترین عدد m را رتبه پوچتوانی T می‌نامند.

قضیه ۱-۳:

اگرعملگر (ماتریس) T روی فضای n بعدی V از رتبه[۱۱] پوچتوانی n_1 باشد، اعداد یکتای $n_1 \geq n_2 \geq \ldots\ldots \geq n_r$ با شرط $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r = n$ وجود دارند که نمایش ماتریسی T در پایه‌ای بشکل

[۹] Characteristic value
[۱۰] spectrum
[۱۱] rank

$$[T]=\begin{pmatrix} N_{n_1} & . & . & . & 0 \\ . & N_{n_2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & N_{n_r} \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad N_{n_i}=\begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n_i\times n_i} \quad 1\le i\le r \qquad (٦)$$

که فرم جوردن T می‌نامند.

برهان: [هالموس] بخش ۵۵ قضیه ۲

در واقع فرم جوردن عملگر (ماتریس) پوچتوان T یکتاست وهر ماتریس پوچتوان یک فرم جوردن با نمایشی به شکل بالا دارد که با آن مشابه است و N_{n_i}ها بلوک‌های جوردن نامیده می‌شوند.

تعداد فرم‌های جوردن معرفی شده در قضیه فوق با تعداد کلاسهای هم‌ارزی ماتریس‌های پوچتوان برابر می‌باشد که مساوی با افراز عدد n است.

حاصل‌ضرب تانسوری (کرونکر[۱۲]) دو ماتریس $A=\left(\alpha_{i,j}\right)_{n\times n}$ و $B=\left(\beta_{i,j}\right)_{m\times m}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & . & \alpha_{1,n} \\ . & . & . \\ \alpha_{n,1} & . & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & . & \beta_{1,m} \\ . & . & . \\ \beta_{m,1} & . & \beta_{m,m} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{1,1}B & . & \alpha_{1,n}B \\ . & . & . \\ \alpha_{n,1}B & . & \alpha_{n,n}B \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \alpha_{1,1}\beta_{1,1} & . & \alpha_{1,1}\beta_{1,m} & . & \alpha_{1,n}\beta_{1,1} & . & \alpha_{1,n}\beta_{1,m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{1,1}\beta_{m,1} & . & \alpha_{1,1}\beta_{m,m} & . & \alpha_{1,n}\beta_{m,1} & . & \alpha_{1,n}\beta_{m,m} \\ \hline . & . & . & . & . & . & . \\ \hline \alpha_{n,1}\beta_{1,1} & . & \alpha_{n,1}\beta_{1,m} & . & \alpha_{n,n}\beta_{1,1} & . & \alpha_{n,n}\beta_{1,m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n,1}\beta_{m,1} & . & \alpha_{n,1}\beta_{m,m} & . & \alpha_{n,n}\beta_{m,1} & . & \alpha_{n,n}\beta_{m,m} \end{array}\right)\in M_{nm}(\mathbb{C})$$

[۱۲] kronecker

نرم فربینیوس[۱۳]

در جبر عملگرهای یک فضای برداری یا جبر ماتریس‌ها؛ ضرب داخلی

$$\langle T,S\rangle_F = tr\left(S^*T\right) \quad (۷)$$

را ضرب داخلی فربینیوس می‌نامیم و نرم القایی توسط این ضرب داخلی را نرم فربینیوس می‌نامند و روابط زیر را داریم

$$\|T\|_F^2 = tr\left(T^*T\right) \quad (۸)$$

$$\|T\pm S\|_F^2 = \|T\|_F^2 + \|S\|_F^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle T,S\rangle_F$$

که در آن $S^* = \overline{\left(S^t\right)}$ الحاقی[۱۴] S می‌باشد.

عملگر (ماتریس) T را که داشته باشیم

متقارن[۱۵]	$T = T^t$
پادمتقارن[۱۶]	$T = -T^t$
هرمیتی[۱۷]	$T = T^*$
پادهرمیتی[۱۸]	$T = -T^*$
یکانی[۱۹]	$T^{-1} = T^*$
نرمال[۲۰]	$TT^* = T^*T$
نامنفی[۲۱]	$T = T^*, \langle T(x), x\rangle \geq 0$

۱۳ frebenius
۱۴ adjoint
۱۵ symmetric
۱۶ skew-symmetric
۱۷ hermitian
۱۸ skew-hermitian
۱۹ unitary
۲۰ normal
۲۱ non-negative

مثبت[۲۲] اگر $x \neq 0$ $\langle T(x),x\rangle > 0$ و $T=T^*$

می‌نامند.

مجموعه ماتریس‌های هرمیتـی و پادهرمیتـی در $M_N(\mathbb{C})$؛ دو زیرفـضای حقیقـی و مکمـل یکـدیگر می‌باشند ($M_N(\mathbb{C})$ را بعنوان فضایی حقیقی از بعد $2N^2$ می‌توان در نظـر گرفـت) اگرمـاتریس‌هـای هرمیتی و پادهرمیتی را با H و $\tilde{H}$ نشان دهیم آنگاه $M_N(\mathbb{C})=H\underset{\mathbb{R}}{\oplus}\tilde{H}$ زیـرا

(۹) برای هر $x\in M_N(\mathbb{C})$ ، $x=\dfrac{x+x^*}{2}+\dfrac{x-x^*}{2}$ که $\dfrac{x+x^*}{2}\in H$ و $\dfrac{x-x^*}{2}\in\tilde{H}$

$$H\bigcap\tilde{H}=0_N$$

اکنون لم زیر را با توجه به ضرب داخلی فربینیوس خواهیم داشت.

لم ۱-٤:

اگر $B\in\tilde{H}$ آنگاه $\operatorname{Re} tr(B^*A)=0$ اگر وتنها اگر $A\in H$

برهان: اول نشان می‌دهیم با فرض $B\in\tilde{H}$؛ اگر $A\in H$ آنگاه $tr(B^*A)$ موهومی است زیرا با اسـتفاده از رابطه $\langle A,B\rangle_F=\overline{\langle B,A\rangle_F}$ که در هر ضرب داخلی برقرار است

$$tr(B^*A)=-tr(BA)=-tr(AB)=-tr(A^*B)=-\overline{tr(B^*A)} \quad (۱۰)$$

(اگر برای عدد مختلط z داشته باشیم $\overline{z}=-z$ آنگاه z موهومی می‌باشد) و

$$\operatorname{Re} tr(B^*A)=0$$

برای عکس قضیه اول نشان می‌دهیم که اگر $B_1\in\tilde{H}$ آنگاه $tr(B^*B_1)$ حقیقی است؛ زیرا که

$$tr(B^*B_1)=-tr(BB_1)=-tr(B_1B)=tr(-B_1B)=tr(B_1^*B)=\overline{tr(B^*B_1)} \quad (۱۱)$$

(اگر برای عدد مختلط z داشته باشیم $\overline{z}=z$ آنگاه z حقیقی می‌باشد)آنگاه

$$tr(B^*B_1)\in\mathbb{R}.$$

[۲۲] positive

در آخر از جمع مستقیم رابطه (۹) نتیجه می‌شود اگر $\operatorname{Re} tr\left(B^{*}A\right)=0$ و $A=A_1+A_2$ که A_1 و A_2 به ترتیب هرمیتی و پادهرمیتی باشند و

$$tr\left(B^{*}A\right)=tr\left(B^{*}\left(A_1+A_2\right)\right)=\underbrace{tr\left(B^{*}A_1\right)}_{\text{imaginary}}+\underbrace{tr\left(B^{*}A_2\right)}_{\text{real}} \quad (۱۲)$$

آنگاه اگر $\operatorname{Re} tr\left(B^{*}A\right)=0$ باشد داریم، $tr\left(B^{*}A_2\right)=0$ و $A_2=0$ در نتیجه داریم A هرمیتی است.

لم ۱-۵:

اگرعملگر (ماتریس) T وارون‌پذیر باشد آنگاه $N=TT^{*}$ یک عملگر مثبت است (عکس آن هم برقرار است)

$$\left\langle N(x),x\right\rangle=\left\langle TT^{*}(x),x\right\rangle=\left\langle T^{*}(x),T^{*}(x)\right\rangle\geq 0$$

$$N^{*}=\left(TT^{*}\right)^{*}=TT^{*}=N \quad (۱۳)$$

بعلت وارون‌پذیری T و با توجه به رابطه $\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle x,T^{*}(y)\right\rangle$ برای $x\neq 0$ داریم $y=0 \Leftrightarrow T^{*}(y)=0$ و T^{*} هم وارون‌پذیر است و نامساوی بالا اکید می‌باشد.

قضیه ۱-۶: (تجزیه قطبی[۲۳])

عملگر (ماتریس) وارون‌پذیر T تجزیه‌ای یکتا به عملگرهای (ماتریس‌های) یکانی U و مثبت N دارد که $T=UN$ و

$$N=\sqrt{TT^{*}} \quad (۱٤)$$

برهان: مراجعه شود به [Hof] ۹-۵ قضیه ۱٤

لم ۱-۷:

[۲۳] polar decomposition