دانشگاه تربیت معلم

دانشکده ی علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه ی تحصیلی جهت اخذ درجه ی کارشناسی ارشد

رشته ی ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

موضوع :

بررسی جوابهای معین نامنفی

معادلات ماتریسی

استادان راهنما:

دکتراسماعیل بابلیان

دکترشهنام جوادی

تدوین :

سلمان جهانشاهی

شهریور ماه ۱۳۸۷

قدردانی.

پروردگارا سپاس بی کرانم را تقدیمت می دارم که بر این بنده به دادن نعمت های خوبت منت نهادی و مرا به غیر وانگذاشتی و به من فرصت عطا فرمودی تا بتوانم گوشه‌ای از خلقت با شکوهت را درک کنم. بهترین و صمیمانه‌ترین قدردانی‌ها را نثار آنهایی می‌کنم که وقت، عمر و دانش خود را با نهایت سخاوت در اختیارم قرار دادند و همواره از لطف و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام.

اینک که به لطف الهی نگارش این پایان‌نامه به انجام می‌رسد بر خود فرض می‌دانم که موقع را غنیمت شمرده و از صمیم قلب مراتب قدرشناسی و سپاسگزاری خود را به استاد فرهیخته جناب آقای پرفسور اسماعیل بابلیان که افتخار شاگردی ایشان را داشتم و همواره اینجانب را از راهنمایی های بی شائبه خود بی‌نصیب نگذاشته تقدیم می‌دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر شهنام جوادی که زحمت مشاوره و راهنمایی اینجانب را متقبل شدند، سپاسگزارم. از تمامی استادان خود در تمامی مقاطع تحصیلی به ویژه جناب آقای دکتر جهانشاهلو و سرکار خانم دکتر ماهیار که در دانشگاه تربیت معلم افتخار شاگردی ایشان را داشتم کمال تشکر را دارم.

از زحمات و دلسوزی‌های پدر و مادرم که در زندگی تکیه‌گاهم بودند و رنج‌ها و مشقت‌های فراوانی در این راه کشیده‌اند سپاسگزارم و دستان پر مهر آنان را می‌بوسم.

از تمامی دوستان و همکلاسی های خود آقایان مداحی، مولایی، میر صالحی، شکری، قاسمی، غیاثی، احمدی و سایر دوستان که نامشان در این مختصر نمی گنجد و خاطرات خوشی در ذهن من به یادگار گذاشته اند تشکر می کنم. دست پر مهر همسر مهربان و دلسوزم که با لطف خود زحمت تایپ این پایان نامه را کشیده است، از صمیم قلب می بوسم.

سلمان جهانشاهی

شهریور ۱۳۸۷

چکیده.

اخیراً مفهوم پایداری لیاپونوف، در سیستم‌های کنترل کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. در حقیقت، نظریهٔ کلی که در مورد سیستم‌های دینامیکی ارائه شده، روی روشهای لیاپونوف پایه‌گذاری شده است.

دراین پایان‌نامه به بررسی وجود جوابهای معین نامنفی برای رده خاصی از معادلات ماتریسی که به تعمیم معادلات لیاپونوف معروف هستند می پردازیم. برای بعضی معادلات مشخص، شرط لازم و کافی برای وجود جواب را بیان کرده ایم و برای بعضی دیگر از معادلات ماتریسی، فقط شرط لازم را برای وجود جواب ذکر کرده ایم.

واژه‌های کلیدی: معادله ماتریسی، معادله ماتریسی لیاپونوف، ماتریس معین نامنفی، تابع معین نامنفی، تبدیل فوریه، قضیه بوچر، مجانباً پایدار، نقطه تعادل.

پیشگفتار

بررسی اینکه نقطه تعادل یک سیستم پایدار است یا ناپایدار، اهمیت فراوان و کاربرد عملی بسیاری در مسائل فیزیک و مهندسی دارد. یکی از انواع پایداری، پایداری به مفهوم لیاپونوف است که اولین بار توسط محقق روسی به نام لیاپونوف تعریف شده است. روشهای مختلفی برای تشخیص پایداری نقطه تعادل سیستم ها معرفی شده است که در این پایان نامه دو روش مستقیم و غیرمستقیم لیاپونوف بررسی شده است.

در روش مستقیم لیاپونوف، توابع لیاپونوف تعریف شده‌اند، با استفاده‌از این توابع به رده خاصی از معادلات ماتریسی می رسیم. برای هر سیستم، یک معادله ماتریسی معین تشکیل می شود که با بررسی وجود جواب معین نامنفی برای معادله ماتریسی متناظر، می توانیم تشخیص دهیم که نقطه تعادل سیستم، پایدار است.

در فصل اول این پایان نامه تعاریف و قضایایی از آنالیز و جبر خطی که در فصل های آینده مورد نیاز است بیان شده و قضایای مهم اثبات شده‌اند.

در فصل دوم، به معرفی پایداری و توابع لیاپونوف پرداخته‌ایم و سپس چند معادله ماتریسی خاص از جمله معادله ماتریسی لیاپونوف را بررسی کرده و رابطه‌ای را برای جواب این معادلات، در صورت وجود، به دست آورده‌ایم.

در نهایت در فصل سوم، تعمیم معادله ماتریسی لیاپونوف یعنی $\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu A^{m-\nu} X A^\nu = B$ را معرفی کرده و لم ها و قضایای اساسی برای یافتن جواب را اثبات می کنیم. سپس برای هر معادله ماتریسی، یک چند جمله‌ای ویژه معرفی کرده و با قرار دادن شرط هایی روی صفرهای این چند جمله‌ای ها، وجود جواب معین نامنفی برای این معادلات تشخیص می دهیم و در پایان فصل سوم چند مثال را برای فهم بهتر مطالب بیان کرده‌ایم.

در این پایان نامه از مقالات زیر استفاده شده است:

[1] R. Bhatia, D. Drisi, Generalized Lyapunove equation and positive definite functions, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2005) 103-114.

[2] Aleksander S. Cvetkovic, Gradimir V. Milovanovic, Positive definite solu-

tion of some matrix equations. Linear Algebra and its Applications. In press.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم آنالیز و جبرخطی

مقدمه

دراین فصل ابتدا به بیان تعاریف وقضایایی از آنالیز حقیقی می پردازیم. سپس تبدیلات فوریه را معرفی کرده و قضایای مورد نیاز در این پایان نامه رااثبات می کنیم. در بخش سوم، مفاهیم مورد نیاز از جبر خطی را بیان کرده وبه اثبات قضایا می پردازیم. در بخش چهارم، توابع معین مثبت را تعریف کرده و در آنجا نیز چند قضیه مهم را اثبات می کنیم.

۱—۱ مفاهیم آنالیز حقیقی

تعریف ۱—۱.۱ فضای $C^n(R)$ عبارتست از مجموعه تمام توابع که روی R، n بار مشتق پذیر و دارای مشتق nام پیوسته هستند.

تعریف ۱—۲.۱ فضای $C^\infty(R)$ رده ای از توابع است که روی R، بی نهایت بار مشتق پذیر هستند.

تعریف ۱—۳.۱ تابع $f : X \to R$ را در نقطه $x_0 \in X$ تحلیلی گوییم هرگاه f در یک همسایگی از x_0 دارای بسط سری توانی باشد.

نکته. هر تابع تحلیلی در x_0، در همسایگی این نقطه C^∞ است، ولی عکس این موضوع برقرار نیست.

تعریف ۱—۴.۱ مجموعه توابع اندازه‌پذیر تعریف شده روی R که توان pام $(p \geq 1)$ آنها انتگرال پذیر است رابا $L^p(R)$ نمایش می دهیم و برای هر $f \in L^p(R)$، تعریف می کنیم

$$\| f \| = \| f \|_p = \{\int_R | f |^p\}^{\frac{1}{p}}$$

لم ۱—۵.۱ نامساوی هولدر [۱]. فرض کنیم p و q دو عدد حقیقی نامنفی باشند به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ باشد، اگر $f \in L^p(R)$ و $g \in L^q(R)$ باشند، آنگاه $fg \in L^1(R)$ است و

[۱] Holder's inequality

داریم

$$\int_R | fg | \leq \| f \|_p . \| g \|_q$$

اثبات. رجوع کنید به [۲].

تعریف ۱—۶.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی R و $\| . \|$ یک نرم برداری باشد که روی X تعریف شده است، سپس $(X, \| . \|)$ را یک فضای نرمدار گوییم.

تعریف ۱—۷.۱ فضای X را یک فضای باناخ [۲] گوییم، هرگاه X یک فضای نرمدار و کامل باشد.

تعریف ۱—۸.۱ فرض کنیم H یک فضای باناخ روی R باشد، آنگاه تابع $<,>$ بر $H \times H$ به توی R، یک ضرب داخلی است هرگاه برای هر $x, y \in H$ و $\alpha, \beta \in R$ داشته باشیم

۱) $< \alpha x_1 + \beta x_2, y >= \alpha < x_1, y > + \beta < x_2, y >$

۲) $< x, y >=< y, x >$

۳) $0 \leq < x, x >$ و $< x, x >= 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد.

فضای H با خواص فوق را فضای هیلبرت [۳] گوییم.

[۲] Banach space
[۳] Hilbert space

۱—۲ تبدیلات فوریه

تعریف ۱—۱.۲ نقطه $z_۰$ یک نقطه تکین تابع f نامیده می شود، اگر f در $z_۰$ تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی $z_۰$ تحلیلی باشد. نقطه تکین $z_۰$ را تنها گوییم هرگاه، همسایگی محذوفی از $z_۰$ مانند $۰ <| z - z_۰ |< \epsilon$ موجود باشد که f در سراسر آن تحلیلی است.

مثال. تابع $\frac{z+۱}{z^۳(z^۲+۱)}$ دارای دو نقطه تکین تنهای $z = \pm i$ و نقطه تکین $z = ۰$ است.

تعریف ۱—۲.۲ فرض کنیم f یک تابع مختلط و $z_۰$ یک نقطه تکین تنهای f باشد، مانده f در نقطه $z_۰$ را با $Resf(z)_{z=z_۰}$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Resf(z)_{z=z_۰} = \lim_{z\to z_۰}(z - z_۰)f(z).$$

قضیه ۱—۳.۲ فرض کنیم C مسیر ساده و بسته ای در جهت مثبت دایره مثلثاتی باشد. اگر تابع f در درون و روی C به جز در تعدادی متناهی نقطه تکین z_k ،$(k = ۱, ۲, \dots, n)$ که در داخل C هستند، تحلیلی باشد، آنگاه

$$\int_c f(z)d(z) = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} Resf(z)_{z=z_k}.$$

اثبات. رجوع کنید به [۱].

تعریف ۱—۴.۲ فرض کنیم $f \in L^۱(R)$ باشد. آنگاه تبدیل فوریه [۴] تابع f را با $\hat{f}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

[۴] Fourier transform

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx,$$

تبدیل معکوس تابع $\hat{f}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

نکته. اگر f یک تابع زوج باشد، آنگاه

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx.$$

در این قسمت برای نوشتن تبدیلات فوریه توابع، از قضیه (۱—۳.۲) استفاده می کنیم.

قضیه ۱—۵.۲ اگر $f(x) = \frac{۱}{\cosh x + t}$ که $-۱ < t < ۱$ آنگاه

$$\hat{f}(\xi) = \frac{۲\pi \sinh(\xi \arccos t)}{\sqrt{۱ - t^۲} \sinh \xi\pi} \tag{۱}$$

اثبات. طبق تعریف (۱—۴.۲) داریم

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t} dx \tag{۲}$$

با استفاده از روش مانده ها، انتگرال فوق را محاسبه می کنیم. برای این منظور تابع زیر را در نظر می گیریم

$$\varphi(z) = \frac{e^{i\xi z}}{\cosh z + t} \tag{۳}$$

نقاط تکین تابع φ از رابطه زیر بدست می آید.

$$\cosh z + t = ۰ \Rightarrow \cos \frac{z}{i} = -t$$

$$\Rightarrow \frac{z}{i} = \arccos(-t) = \pi \pm \arccos t \Rightarrow z = i(\pi \pm \arccos t).$$

فرض کنیم S مستطیل $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i]$ باشد که $R > 0$. هر دو نقطه تکین تابع φ یعنی $z_1 = i(\pi + \arccos t)$ و $z_2 = i(\pi - \arccos t)$ درون این مستطیل قرار دارند. از طرفی روی محیط این مستطیل در جهت مثبت دایره مثلثاتی روی محور xها از $-R$ تا R داریم $z = x$، در امتداد محور yهااز 0 تا $2\pi i$ داریم $z = R + iy$ که $0 \leq y \leq 2\pi$، در امتداد محور xها از R تا $-R$ داریم $z = x + 2\pi i$ که $-R \leq x \leq R$ و در امتداد محور yها از $2\pi i$ تا 0 داریم $z = -R + iy$ که $0 \leq y \leq 2\pi$. بنابراین داریم

$$\int_S \varphi(z)dz = \int_{-R}^{R} \varphi(x)dx + i\int_0^{2\pi} \varphi(R+iy)dy$$

$$-\int_{-R}^{R} \varphi(x+2\pi i)dx - i\int_0^{2\pi} \varphi(-R+iy)dy$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t}dx + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t}dy$$

$$-\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi(x+2\pi i)}}{\cosh(x+2\pi i)+t}dx - i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)+t}dy \qquad (4)$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t}dx + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t}dy$$

$$-\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}.e^{-2\xi\pi}}{\cosh x + t}dx - i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)+t}dy$$

$$= (1-e^{-2\xi\pi})\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t}dx + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t}dy - i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)+t}dy$$

از طرفی طبق تعریف (۱—۲.۲) و قضیه (۱—۳.۲) داریم

$$\int_S \varphi(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\varphi(z)_{z=z_k} = 2\pi i(Res\varphi(z)_{z=z_1} + Res\varphi(z)_{z=z_2})$$

$$= 2\pi i(\frac{e^{i\xi z_1}}{\sinh z_1} + \frac{e^{i\xi z_2}}{\sinh z_2}) \qquad (5)$$

با توجه به روابط (۴) و (۵) داریم

$$(1 - e^{-2\xi\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t} dx + i \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t} dy$$

$$- i \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\xi(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)+t} dy = 2\pi i(\frac{e^{i\xi z_1}}{\sinh z_1} + \frac{e^{i\xi z_2}}{\sinh z_2}) \qquad (6)$$

از طرفی

$$0 \leq \left| \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t} \right| \leq \frac{2 \mid e^{i\xi R - \xi y} \mid}{\mid e^{R+iy} + e^{-R-iy} + 2t \mid}$$

$$\leq \frac{2e^{-\xi y}}{\mid e^{R+iy} \mid - \mid e^{-R-iy} \mid -2 \mid t \mid}$$

چون $2\pi \leq y \leq 0$ پس برای هر ξ دلخواه داریم $e^{-\xi y} \leq max\{1, e^{-2\pi\xi}\} = M$، در نتیجه

$$0 \leq \left| \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t} \right| \leq \frac{2M}{e^{R} - e^{-R} - 2 \mid t \mid}$$

باحد گیری از طرفین رابطه بالا و با استفاده از قضیه فشردگی داریم

$$\lim_{R\to\infty} \frac{e^{i\xi(R+iy)}}{\cosh(R+iy)+t} = 0$$

مشابهاً

$$\lim_{R\to\infty} \frac{e^{i\xi(-R+iy)}}{\cosh(-R+iy)+t} = 0.$$

پس باحد گیری از طرفین رابطه (۶) وقتی $R \to \infty$ داریم

$$\lim_{R\to\infty} (1 - e^{-2\pi\xi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t} dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi i(\frac{e^{i\xi z_1}}{\sinh z_1} + \frac{e^{i\xi z_2}}{\sinh z_2}).$$

در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t} dx = \frac{۲\pi i}{(۱ - e^{-۲\pi\xi})} (\frac{e^{i\xi z_۱}}{\sinh z_۱} + \frac{e^{i\xi z_۲}}{\sinh z_۲}). \tag{۷}$$

طبق روابط $\cosh iz = \cos z$ و $\sinh iz = i \sin z$ داریم

$$\sinh z_{۱,۲} = \sinh(i(\pi \pm \arccos t)) = i \sin(\pi \pm \arccos t)$$

$$i(\sin\pi . \cos(\arccos t) \pm \cos\pi . \sin(\arccos t) = \mp i\sqrt{۱ - t^۲} \tag{۸}$$

با جایگذاری (۸) در (۷) داریم

$$\frac{۲\pi i}{۱ - e^{-\xi ۲\pi}} (\frac{e^{i\xi z_۱}}{\sinh z_۱} + \frac{e^{i\xi z_۲}}{\sinh z_۲})$$

$$= \frac{۲\pi i}{۱ - e^{-\xi ۲\pi}} (\frac{e^{-\xi(\pi + \arccos t)} - e^{-\xi(\pi - \arccos t)}}{-i\sqrt{۱ - t^۲}})$$

$$= \frac{۲\pi}{۱ - e^{-\xi ۲\pi}} \cdot \frac{e^{-\xi\pi}(e^{-\xi \arccos t} - e^{\xi \arccos t})}{-\sqrt{۱ - t^۲}}$$

$$= \frac{۲\pi e^{-\xi\pi}}{۱ - e^{-\xi ۲\pi}} \cdot \frac{\sinh(\xi \arccos t)}{\sqrt{۱ - t^۲}} \cdot \frac{e^{\xi\pi}}{e^{\xi\pi}}$$

$$= \frac{۲\pi \sinh(\xi \arccos t)}{\sqrt{۱ - t^۲} \sinh \xi\pi}$$

و اثبات تمام است. ■

قضیه ۱—۶.۲ برای $t > ۱$ ، تبدیل فوریه تابع $f(x) = \frac{۱}{\cosh x + t}$ به صورت زیر است

$$\hat{f}(\xi) = \frac{۲\pi \sin(\xi \cosh^{-۱} t)}{\sqrt{t^۲ - ۱} \sinh \xi\pi}. \tag{۹}$$

اثبات. تابع با ضابطه $\varphi(z) = \frac{e^{i\xi z}}{\cosh z + t}$ را در نظر می گیریم. وقتی $t > ۱$ آنگاه نقاط تکین تابع φ عبارتند از $z = \pm\cosh^{-۱}t + ik\pi$ که k یک عدد فرد است. برای مقادیر بزرگ R، مستطیل معرفی شده در قضیه قبل شامل دو مجانب از φ می باشد که عبارتند از $z_۱ = \cosh^{-۱}t + i\pi$ و $z_۲ = -\cosh^{-۱}t + i\pi$. طبق قضیه قبل داریم

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\cosh x + t}dx = \frac{۲\pi i}{۱ - e^{-\xi ۲\pi}}\left(\frac{e^{i\xi z_۱}}{\sinh z_۱} + \frac{e^{i\xi z_۲}}{\sinh z_۲}\right) \qquad (۱۰)$$

برای $t > ۱$ اگر $\alpha = \cosh^{-۱}t$ آنگاه

$$t = \cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{۲} = \frac{e^{۲\alpha} + ۱}{۲e^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow e^{۲\alpha} - ۲te^{\alpha} + ۱ = ۰ \Rightarrow e^{\alpha} = t \pm \sqrt{t^۲ - ۱} \Rightarrow \alpha = \ln(t + \sqrt{t^۲ - ۱})$$

یعنی

$$\cosh^{-۱}t = \ln(t + \sqrt{t^۲ - ۱}). \qquad (۱۱)$$

مشابهاً

$$\sinh(\cosh^{-۱}t) = \frac{t + \sqrt{t^۲ - ۱} - \frac{۱}{t + \sqrt{t^۲ - ۱}}}{۲} = \frac{۲t^۲ + ۲t\sqrt{t^۲ - ۱} - ۲}{۲(t + \sqrt{t^۲ - ۱})} = \sqrt{t^۲ - ۱}. \qquad (۱۲)$$

در نتیجه داریم

$$\sinh z_۱ = \sinh(\cosh^{-۱}t + i\pi)$$

$$= \sinh(\cosh^{-۱}t)\cdot\cosh i\pi + \sinh i\pi\cdot\cosh(\cosh^{-۱}t) \qquad (۱۳)$$

$$= i\sinh(\cosh^{-۱}t) = -i\sqrt{t^۲ - ۱}.$$

مشابهاً

$$\sinh z_۲ = i\sqrt{t^۲ - ۱}. \qquad (۱۴)$$

باجایگذاری مقادیر(۱۳) و (۱۴) در رابطه (۱۰) و با انجام محاسبات مشابه قضیه قبل داریم

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi \sin(\xi \cosh^{-1} t)}{\sqrt{t^2 - 1} \sinh \xi\pi}.$$

■

نتیجه ۱—۷.۲ تابع $f(x) = \frac{1}{\cosh x + \sigma}$ که σ یک عدد مختلط است را در نظر می گیریم وقتی که $\sigma \in (-\infty, 1]$ تابع f و تبدیل فوریه آن هر دو در σ تحلیلی هستند، بنابراین طبق دو قضیه قبل تعریف می کنیم

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\pi \sinh(\xi \arccos \sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2} \sinh \xi\pi}, & \mid \sigma \mid < 1 \\ \frac{2\pi \sin(\xi \cosh^{-1} \sigma)}{\sqrt{\sigma^2 - 1} \sinh \xi\pi}, & \mid \sigma \mid > 1, \sigma \notin (-\infty, 1] \end{cases} \tag{15}$$

حالت خاص برای تابع $f(x) = \frac{1}{\cosh x + \sigma}$ زمانی است که σ یک عدد موهومی محض باشد. می خواهیم تبدیل فوریه تابع f را، زمانی که σ یک عدد موهومی محض است بدست آوریم. برای این منظور فرض کنیم $f(x) = \frac{1}{\cosh x + ia}$ که $a \in R$. با استفاده از فرمول (۱۵) و روابط $\arccos(ia) = \frac{\pi}{2} - i\sinh^{-1} a$، $\frac{\sinh x}{\sinh \frac{x}{2}} = 2\cosh \frac{x}{2}$ و $\frac{\sinh x}{\cosh \frac{x}{2}} = 2\sinh \frac{x}{2}$ داریم

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi \sinh(\xi \arccos(ia))}{\sqrt{1 + a^2} \sinh \xi\pi} = \frac{2\pi \sinh(\frac{\xi\pi}{2} - i\xi \sinh^{-1} a)}{\sqrt{1 + a^2} \sinh \xi\pi}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 + a^2}} \left(\frac{\sinh \frac{\xi\pi}{2} . \cos(\xi \sinh^{-1} a)}{\sinh \xi\pi} - i \frac{\cosh \frac{\xi\pi}{2} . \sin(\xi \sinh^{-1} a)}{\sinh \xi\pi} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1 + a^2}} \left(\frac{\cos(\xi \sinh^{-1} a)}{2\cosh \frac{\xi\pi}{2}} - i \frac{\sin(\xi \sinh^{-1} a)}{2\sinh \frac{\xi\pi}{2}} \right)$$

در نتیجه

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{1 + a^2}} \left(\frac{\cos(\xi \sinh^{-1} a)}{\cosh \frac{\xi\pi}{2}} - i \frac{\sin(\xi \sinh^{-1} a)}{\sinh \frac{\xi\pi}{2}} \right). \tag{16}$$

اگر $\sigma = 1$ آنگاه با حد گیری از تابع (۱۵) داریم

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{2\pi\sinh(\xi\arccos\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}\sinh\xi\pi}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام حد از قاعده هوپیتال استفاده می کنیم و داریم

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{2\pi\sinh(\xi\arccos\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}\sinh\xi\pi}$$

$$=\lim_{\sigma\to 1}\frac{2\pi\cosh(\xi\arccos\sigma).\frac{-\xi}{\sqrt{1-\sigma^2}}}{\sinh\xi\pi.\frac{-2\sigma}{2\sqrt{1-\sigma^2}}}=\frac{2\pi\xi}{\sinh\xi\pi}. \qquad (17)$$

لم ۱—۲.۸ فرض کنیم $f,g\in L^2(R)\cap C(R)$ که $\hat{f},\hat{g}\in L^1(R)$ آنگاه

$$\int_R e^{ix\xi}f(\xi)g(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{f}(x-y)\hat{g}(y)dy \quad , \quad x\in R \qquad (18)$$

اثبات. چون $\hat{f},\hat{g}$ تبدیلات فوریه دو تابع f,g هستند، بنابراین پیوسته هستند و طبق فرض نیز$\hat{f},\hat{g}\in L^1(R)$ بنابراین $\hat{f}\hat{g}\in L^1(R)\cap C(R)$. با نوشتن تبدیل معکوس طرف راست رابطه (۱۸) داریم

$$\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\xi x}dx\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{f}(x-y)\hat{g}(y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\xi y}\hat{g}(y)dy\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\xi(x-y)}\hat{f}(x-y)dx$$

$$=g(\xi)f(\xi)$$

که رابطه فوق را با توجه به اینکه f,g پیوسته هستند و بنابراین در فرمول تبدیل معکوس صدق می کنند نوشته ایم. چون $f,g\in L^2(R)$ بنابر نامساوی هولدر $fg\in L^1(R)$ و اثبات تمام است . ■

۱–۳ مفاهیم جبرخطی

تعریف ۱–۳.۱ ماتریس A را معین مثبت (نامنفی)[۵] گوییم، هرگاه برای هر بردار ناصفر x داشته باشیم

$$x^*Ax > 0\,(x^*Ax \geq 0).$$

قضیه ۱–۳.۲ فرض کنیم ماتریس حقیقی A متقارن و معین مثبت باشد. آنگاه مقادیر ویژه A حقیقی و مثبت، و درایه‌های قطری آن مثبت هستند.

تعریف ۱–۳.۳ ماتریس کشی [۶]. اگر $\lambda_i(i = 1, 2, \ldots, n)$، اعداد حقیقی و مثبت باشند، آنگاه ماتریس C با درایه‌های $c_{ij} = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$ را ماتریس کشی گوییم .

تعریف ۱–۳.۴ ماتریس گرام [۷]. فرض کنیم $<,>$ یک ضرب داخلی باشد و $x_i \in R^n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, و $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، آنگاه ماتریس گرام G عبارتست ازتمام حاصل ضربهای داخلی ممکن بردارهای V، یعنی

$$(G)_{ij} =< x_i, x_j >, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

در واقع، $G = X^tX$ که در آن x_i ستون iام X است.

قضیه ۱–۳.۵ ماتریس گرام معین نامنفی است.

اثبات. فرض کنیم G ماتریس گرام متناظر با مجموعه بردارهای $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ باشد، آنگاه برای هر بردار ناصفر $V \in R^n$ داریم

$$V^tGV = V^tX^tXV = (XV, XV) \geq 0$$

[۵] Positive definite(semidefinite)
[۶] Cauchy matrix
[۷] Gram matrix

■

نکته. اگر مجموعه V مستقل خطی باشد، آنگاه ماتریس گرام متناظر با آن، معین مثبت است.

قضیه ۱—۶.۳ ماتریس کشی، یک ماتریس معین نامنفی است.

اثبات. چون $\lambda_i > ۰ (i = ۱, ۲, \dots, n)$ بنابراین، اگر قرار دهیم
$f(t) = e^{-t\lambda_i}, (i = ۱, ۲, \dots, n)$ و $g(t) = e^{-t\lambda_j}, (j = ۱, ۲, \dots, n)$ و تعریف کنیم

$$< f, g >= \int_۰^\infty f(t)g(t)dt$$

آنگاه

$$c_{i,j} = \frac{۱}{\lambda_i + \lambda_j} = \int_۰^{+\infty} e^{-t(\lambda_i+\lambda_j)}dt, \quad (i, j = ۱, ۲, \dots, n)$$

پس ماتریس کشی، ماتریس گرام متناظر با مجموعه بردارهای $\{e^{-t\lambda_i}\}$، $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ در فضای هیلبرت $L^۲(۰, \infty)$ با ضرب داخلی تعریف شده در بالا است وبنابر قضیه (۱—۵.۳) C یک ماتریس معین نامنفی است.

تعریف ۱—۷.۳ فرض کنیم B و C دو ماتریس از مرتبه n باشند، آنگاه ضرب شور[۸] دو ماتریس را با نماد $X = C \circ B$ نمایش داده وبه صورت زیر مشخص می کنیم

$$x_{ij} = c_{ij}b_{ij} \qquad i, j = ۱, ۲, \dots, n$$

قضیه ۱—۸.۳ [۹]. حاصل ضرب شور دو ماتریس معین نامنفی، معین نامنفی است.

---
[۸] Schur product
[۹] Schur theorem