دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

انتخاب تصادفی وابسته

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

فهیمه رحیمی

استاد راهنما

دکتر غلامرضا امیدی

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی خانم فهیمه رحیمی
تحت عنوان

انتخاب تصادفی وابسته

در تاریخ ۲۰ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر غلامرضا امیدی
۲– استاد مشاور	دکتر صفیه محمودی
۳– استاد داور۱	دکتر بهناز عمومی
۴– استاد داور۲	دکتر غفار رئیسی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چراکه این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی‌ام بوده‌اند، دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

از استاد راهنمای بزرگوار و عزیزم جناب آقای دکتر غلامرضا امیدی که در طول تحصیل در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد و مراحل تحقیق و نگارش این پایان نامه همواره با پیگیری‌ها و راهنمایی‌های بی دریغ خود مرا یاری کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین سپاس گزاری بی پایان خود را به استاد گرامی سرکار خانم دکتر محمودی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند، ابراز می نمایم. از اساتید ارجمند سرکار خانم دکتر عمومی و جناب آقای دکتر رئیسی که زحمت داوری این پایان نامه را قبول نمودند تشکر فراوان دارم.

در پایان از تمامی دوستانی که به من در این راه یاری رساندند، به خصوص سرکار خانم مریم شاه سیاه تشکر می نمایم و موفقیت‌های روزافزون را برایشان آرزومندم.

شهریور ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به بهترین های زندگیم

مادر و پدر عزیزم

فهرست مطالب

چکیده

تعداد زیادی از مسائل در نظریه رمزی و نظریه اکسترمالی گراف با مسأله نشاندن یک گراف تنک در یک گراف چگال در ارتباطند. برای به‌دست آوردن چنین نشاندنی، می‌توان زیرمجموعه بزرگ U از رأس‌ها را در گراف چگال مورد نظر به‌دست آورد به‌طوری‌که تمامی(و یا تقریباً تمامی) زیرمجموعه‌های U دارای تعداد زیادی همسایه مشترک باشند. سپس می‌توان رأس‌های گراف تنک مورد نظر را یکی‌یکی به جای رأس‌های U نشاند و گراف تنک را در گراف چگال پیدا کرد. با استفاده از روش انتخاب تصادفی وابسته که نمونه‌ای از روش‌های احتمالاتی است، ابتدا در گراف چگال G زیرمجموعه کوچک T از رأس‌ها را به صورت تصادفی و یکنواخت انتخاب می‌کنیم. سپس مجموعه U را مجموعه همسایه‌های مشترک T در نظر می‌گیریم. اگر G دارای زیرمجموعه‌ای با تعداد همسایه مشترک کم باشد، غیرمحتمل است که تمام اعضا این مجموعه در مجموعه T انتخاب شود. درنتیجه انتظار نمی‌رود که U دارای زیرمجموعه‌ای با تعداد همسایه‌های کم باشد. لذا زیرمجموعه مورد نظر U برای G به‌دست می‌آید.

تاکنون کاربردهای زیادی از روش انتخاب تصادفی وابسته به‌دست آمده است. در این پایان‌نامه این روش را به‌طور مفصل توضیح و شرح می‌دهیم و کاربردهایی از آن را بیان می‌کنیم.

همچنین در این پایان‌نامه عدد رمزی $R(P_n^{(۳)}, P_m^{(۳)})$ را برای هر دو عدد صحیح مثبت $n \geq m \geq ۳$ تخمین می‌زنیم که در آن $P_n^{(۳)}$ مسیر ۳-یکنواخت تایت با n یال می‌باشد.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا ضمن اشاره به تعاریف و نمادگذاری‌های مورد نیاز در پایان‌نامه در نظریه گراف، به بیان تاریخچه‌ی مختصری از موضوع مورد مطالعه می‌پردازیم. سپس تاریخچه موضوعات مرتبط اشاره شده در فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم و در پایان، مروری بر مطالب فصل‌های دیگر خواهیم داشت.

۱.۱ تعاریف مورد نیاز

تعاریف و مفاهیمی که در این فصل بیان می‌شوند، غالباً از مراجع [۱،۶،۱۲،۲۳] آورده شده است.

گراف G، یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ به نام رأس‌ها، یک مجموعه $E(G)$، مجزای از $V(G)$، به نام یال‌ها و یک تابع وقوع ψ_G که به هر یال G، یک زوج نامرتب از رأس‌های G را که الزاماً متمایز نیستند، نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v دو رأس باشند که $\psi_G(e) = uv$، در این صورت گفته می‌شود که e، رأس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است و u و v بر یال e واقع شده‌اند و رأس‌های انتهایی e هستند.
در این جا نمادهای $V(G)$ و $E(G)$ را با نمادهای V و E جایگزین می‌کنیم و گراف G را به صورت $G = (V, E)$ نمایش می‌دهیم.

دو رأس که بر روی یک یال واقعند، مجاور نامیده می‌شوند. دو رأس انتهایی یک یال را رأس‌های واقع بر آن یال گوییم. یک یال با دو سر یکسان را طوقه نامیم. گراف بدون طوقه G را ساده گوییم، هرگاه بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال نباشد. بنابراین هر یال در گراف ساده به وسیله نقاط انتهایی خود به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شود.

اگر مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف G متناهی باشد، آن را متناهی گوییم، در غیراین‌صورت گراف G را نامتناهی نامیم. در این پایان‌نامه منظور از یک گراف، گراف ساده متناهی است. تعداد رأس‌های گراف G را مرتبه آن گوییم و منظور از اندازه گراف G تعداد یال‌های آن است.
گراف از اندازه صفر را گراف تهی نامیم و گراف از مرتبه یک را گراف بدیهی گوییم.

مجموعه $N_G(v) = \{u|$ است vمجاور$u\}$ را مجموعه همسایه‌های v گوییم که در این جا، آن را با $N(v)$ نشان می‌دهیم و دو رأس را همسایه یکدیگر نامیم هرگاه مجاور باشند. منظور از همسایگی بسته‌ی رأس v، $N_G[v]$، مجموعه $N_G(v) \cup \{v\}$ است. رأس v همسایه مشترک دو رأس u و w است هرگاه مجاور هر دو رأس باشد. مجموعه همسایه‌های مشترک مجموعه رأس‌های U با $N_G(U)$ نمایش داده می‌شود که ما در این پایان‌نامه به اختصار با $N(U)$ نشان می‌دهیم.

درجه رأس v برابر است با تعداد یال‌های مجاور رأس v و با $d_G(v)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر درجه رأس v برابر با اندازه مجموعه $N(v)$ است. هم درجه یک زوج از رأس‌ها در گراف برابر است با تعداد همسایه‌های مشترک آن‌ها. رأس از درجه صفر در گراف را رأس تنها گوییم. کمترین درجه رأس‌ها در گراف G با $\delta(G)$ و بیشترین درجه رأس‌ها در G با $\triangle(G)$ نمایش داده می‌شوند که در این پایان‌نامه به اختصار با $\triangle$ و δ نشان داده می‌شوند.
قضیه ۱.۱.۱ رابطه میانگین درجه رأس‌های گراف دلخواه G با تعداد یال‌های آن را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۱.۱ [۱۲] $\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = ۲|E(G)|$

میانگین درجه رأس‌های گراف G که برابر است با $\frac{\sum_{v\in V(G)} d_G(v)}{|V(G)|}$ را با $\bar{d}$ نشان می‌دهیم. با توجه به قضیه ۱.۱.۱ می‌توان نتیجه گرفت که میانگین درجه برابر $\frac{۲|E(G)|}{|V(G)|}$ است.

اگر درجه تمامی رأس‌های گراف G برابر عدد ثابت r باشد آن‌گاه گراف G را $r-$منظم و یا به طور خلاصه منظم می‌نامیم.

می‌گوییم H، زیرگراف G است، اگر $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و ψ_H از محدود کردن ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد و با $H \subseteq G$ نمایش می‌دهیم. اگر $H \subseteq G$، ولی $H \neq G$، می‌نویسیم $H \subset G$ و می‌گوییم H یک زیرگراف سره از G است و در غیراین صورت می‌گوییم H یک زیرگراف ناسره از G است. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر از G می‌نامیم. اگر V' یک زیرمجموعه ناتهی از V باشد، زیرگرافی از G که مجموعه رأس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که هر دو سر آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القا شده توسط V' نامیده می‌شود. این زیرگراف با $G[V']$ نمایش داده می‌شود و می‌گوییم $G[V']$ یک زیرگراف القایی G می‌باشد. زیرگراف

القایی $G[V \setminus V']$ که با $G - V'$ نمایش داده می‌شود، زیرگرافی است که با حذف رأس‌های V' و یال‌های مجاور آن‌ها، از G به دست می‌آید. اگر $V' = \{v\}$، به جای $G - \{v\}$ می‌توان $G - v$ را نوشت.

فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو زیرگراف G باشند. می‌گوییم $G_۱$ و $G_۲$ مجزا هستند، اگر هیچ رأس مشترکی نداشته باشند و آن‌ها را یال‌مجزا می‌نامیم، اگر هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

مکمل گراف G که با $\bar{G}$ نشان داده می‌شود، گرافی است دارای مجموعه رأس‌های $V(G)$، که دو رأس در آن مجاورند اگر و تنها اگر آن دو رأس در G مجاور نباشند.

یک گشت از G، دنباله ناصفر متناهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲...e_kv_k$ است به طوری که v_iها و e_iها به‌ترتیب رأس‌ها و یال‌هایی از G بوده و به ازای هر $۱ \leq i \leq k$ رأس های $v_{i-۱}$ و v_i دو سر یال e_i باشند. در این صورت می‌گوییم W، یک گشت از $v_۰$ تا v_k است. رأس‌های $v_۰$ و v_k به ترتیب ابتدا و انتهای W و $v_۱, v_۲, ..., v_{k-۱}$ رأس‌های داخلی آن نامیده می‌شوند. عدد صحیح k را طول گشت W می‌نامیم. در یک گراف ساده، گشت $v_۰e_۱v_۱...e_kv_k$ با دنباله رأس‌های $v_۰v_۱v_۲...v_k$ معین می‌گردد.

اگر یال های $e_۱, e_۲, ..., e_k$ در گشت W متمایز باشند، W یک گذر نامیده می شود. اگر علاوه بر یال‌ها، رأس‌های $v_۰, v_۱, ..., v_k$ نیز متمایز باشند، W یک مسیر نامیده می‌شود. مسیر به طول k را با P_k نشان می‌دهیم. مسیری که رأس ابتدای آن u و رأس انتهای آن v باشد را یک (u, v)-مسیر گوییم و طول کوتاهترین (u, v)-مسیر در گراف G را فاصله بین دو رأس u و v می‌گوییم و با $d_G(u, v)$ نشان می‌دهیم. قطر گراف G برابر است با بیشترین فاصله بین دو رأس از G که آن را با $d(G)$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$d(G) = \max\{d_G(x, y)|x, y \in V(G)\}.$$

گوییم گراف G همبند است اگر برای هر دو رأس u و v یک (u, v)-مسیر در G وجود داشته باشد.

گشت W را بسته گوییم هرگاه، طول آن مثبت بوده، ابتدا و انتهای آن یکسان باشند. یک مسیر بسته، دور نامیده می‌شود. یک دور به طول k را یک k-دور می‌نامیم و با C_k نشان می‌دهیم. یک k-دور را بسته به این که k زوج یا فرد باشد، یک دور زوج یا فرد می‌نامیم. طول کوتاهترین دور در گراف را با $g(G)$ نمایش می‌دهیم و به آن کمر گراف G می‌گوییم.

گراف فاقد دور G را جنگل می‌گوییم. جنگل همبند را درخت گوییم. توجه کنید که در درخت هر دو رأس با یک مسیر یکتا به یکدیگر متصلند.

دو مسیر متمایز را غیرمتقاطع می‌گوییم، اگر رأس داخلی مشترک نداشته باشند. گراف حاصل از قرار دادن مسیرهای غیرمتقاطع به جای یال‌های G را یک نسخه توپولوژیکال از G گوئیم. در حالت خاص اگر هر یک ازاین مسیرهای غیرمتقاطع دارای دقیقاً $t + ۲$ رأس باشند، آن‌گاه گراف حاصل را یک t-زیرتقسیم از G نامیم.

گراف G را تنک گوییم، هرگاه تعداد یال‌هایش نسبت به تعداد رأس‌هایش خطی باشد. گراف G را چگال گوییم، هرگاه تعداد یال‌هایش نسبت به تعداد رأس‌هایش از مرتبه دو باشد. ویژگی تنک و یا چگال بودن، برای گراف‌های از مرتبه به اندازه کافی بزرگ با معنی‌تر است.
در این پایان‌نامه گراف G را گراف غنی گوییم، هرگاه تمام(و یا تقریباً تمام) زیرمجموعه‌های کوچک U از رأس‌ها دارای تعداد زیادی همسایه مشترک باشد.

گراف دوبخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رأس‌های آن را به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز کرد که هر یال آن دارای یک انتها در X و یک انتها در Y باشد. گراف دوبخشی کامل، یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y است که در آن هر رأس از X، به هر رأس از Y وصل شده باشد. اگر X از اندازه n و Y از اندازه m باشد، آن‌گاه گراف دوبخشی کامل، با دو بخش X و Y را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

گراف G با n رأس که دارای رأسی از درجه $n - ۱$ است و بقیه رأس‌های آن از درجه ۱ هستند را ستاره نامیم. ستاره یک گراف دوبخشی کامل است که در یک بخش یک رأس از درجه $n - ۱$ است و بقیه رأس‌ها در بخش دیگر هستند.

گراف ساده از مرتبه n که در آن هر دو رأس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می‌شود و آن را با K_n نشان می‌دهیم. زیر گراف کامل در یک گراف را یک خوشه نامیم.

r-مکعب Q_r، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن، مجموعه تمام nتایی‌های با درایه‌های ۰و۱ است و دو n-تایی در آن مجاورند، اگر در یک درایه متفاوت باشند.

زیر مجموعه S از V را که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند، یک مجموعه مستقل از G می‌نامیم. می‌گوییم

مجموعه مستقل S، ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S| < |S'|$ وجود نداشته باشد. تعداد رأس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم از G، عدد استقلال نامیده شده و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود. به طور مثال $\alpha(K_n)$ برابر است با ۱، زیرا در گراف کامل هردو رأس با یکدیگر مجاورند و هیچ دو رأس مستقلی وجود ندارد.

یک k-رنگ‌آمیزی رأسی از G عبارت است از تخصیص k رنگ ۱،۲،...وk به رأس‌های G. اگر هیچ دو رأس مجاور متمایزی دارای رنگ یکسان نباشند، رنگ آمیزی را مجاز می‌نامیم. بنابراین یک k-رنگ‌آمیزی رأسی مجاز از گراف بدون طوقه G، عبارت است از افرازی مانند $(V_1, V_2, ..., V_k)$ از V به k مجموعه مستقل که می‌توانند تهی نیز باشند. اگر G دارای یک k-رنگ آمیزی رأسی مجاز باشد آن‌گاه G، k-رنگ‌پذیر رأسی نامیده می‌شود. عدد رنگی G، $\chi(G)$ کوچکترین kای است که به ازای آن، G، k-رنگ‌پذیر است.

گراف G را d-تباهیده گوییم، هرگاه هر زیر گراف آن یک رأس از درجه‌ی حداکثر d داشته باشد. با وجود اینکه به طور کلی، گراف با بیشترین درجه d، d-تباهیده است، گراف ستاره با $d+1$ رأس ۱-تباهیده است و بیشترین درجه آن برابر d است. بنابراین حتی یک گراف ۱-تباهیده نیز می‌تواند دارای رأسی از درجه بزرگ باشد.

یک ابرگراف عبارت است از زوج مرتب $(V, \mathcal{F})$، که V مجموعه‌ای از عناصر است و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های V است. اعضای V را رأس‌های ابرگراف و اعضای $\mathcal{F}$ را یال‌ها و یا ابریال‌های ابرگراف گوییم. اگر $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از دو تایی‌های V باشد، ابرگراف مورد نظر یک گراف بدون طوقه است. بنابراین گراف‌ها حالت خاصی از ابرگراف‌ها می‌باشند. ابرگراف H را k-یکنواخت گوییم، اگر هر یال آن یک kتایی از رأس‌ها باشد. توجه داشته باشید که گراف دلخواه G، یک ابرگراف ۲-یکنواخت است.

همانطور که برای گراف‌ها بیان کردیم در ابرگراف‌ها نیز دو رأس را مجاور گوییم، اگر هر دو رأس حداقل یک یال مشترک داشته باشند. ابر گراف k-یکنواختی که در آن هر kتایی یک یال را تشکیل دهد را ابرگراف k-یکنواخت کامل گوییم.

زیر مجموعه S از رأس‌های ابرگراف H را مجموعه مستقل گوییم اگر هیچ دو رأسی در آن مجاور نباشند و مانند گراف‌ها، اندازه بزرگترین مجموعه مستقل در H را عدد استقلال H گوییم و با $\alpha(H)$ نشان می‌دهیم.

یک k-رنگ‌آمیزی یالی از ابرگراف بدون طوقه H عبارت است از تخصیص k رنگ ۱،۲،...وk به یال‌های H. اگر در این رنگ آمیزی هیچ دو یال مجاوری همرنگ نباشند آن را یک

رنگ‌آمیزی مجاز می‌نامیم. اگر H دارای یک k-رنگ آمیزی یالی مجاز باشد، آن را k-رنگ‌پذیر یالی می‌نامیم. عدد رنگی یالی $\chi'(H)$برای یک ابرگراف بدون طوقه H، برابر با کوچک‌ترین kای است که به ازای آن H، k-رنگ پذیر یالی باشد. در این پایان‌نامه، منظور از ۲-رنگ‌آمیزی یالی، رنگ‌آمیزی یال‌ها با دو رنگ قرمز و آبی است.

در ادامه به بیان تعاریفی از مبانی احتمال که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، خواهیم پرداخت. اگر برآمد آزمایشی معین نباشد، اما همه‌ی برآمدهای ممکن آن از قبل قابل پیش‌بینی باشند، در این صورت مجموعه همه این برآمدهای ممکن را فضای نمونه آن آزمایش می‌گوییم و معمولاً آن را با Ω نشان می‌دهیم. بنابراین فضای نمونه‌ای یک آزمایش، شامل همه برآمدهای ممکن آن آزمایش است. این برآمدها را گاهی نقاط نمونه‌ای و یا صرفاً نقاط فضای نمونه‌ای می‌گوییم. به زبان احتمال بعضی از زیرمجموعه‌های Ω را پیشامد می‌نامیم. پس پیشامدها زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای هستند.

مثال ۲.۱.۱ در آزمایش پرتاب یک سکه، فضای نمونه‌ای Ω شامل دو نقطه (برآمد) است. شیر (H) و خط (T). بنابراین $\Omega = \{H, T\}$.

فرض کنید Ω فضای نمونه‌ای یک آزمایش باشد. به هر پیشامد A از Ω عددی به نام احتمال وقوع پیشامد A نسبت داده و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم. در این صورت P یک تابع مجموعه‌ای خواهد بود که باید در سه اصل موضوع زیر صدق کند.

اصل موضوع ۱: $P(A) \geq ۰$

اصل موضوع ۲: $P(\Omega) = ۱$

اصل موضوع ۳: اگر $A_۱, A_۲, A_۳, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، در این صورت

$$P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$$

. احتمال پیشامد تهی، صفر است. یعنی $P(\phi) = ۰$.

پیشامدهای A و B در فضای نمونه‌ای Ω را مستقل گوییم، اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. در غیراینصورت این دو پیشامد وابسته هستند. به طور کلی، پیشامدهای A_i، $i \in I$ را کلاً مستقل گوییم، اگر برای هر زیرمجموعه S از I رابطه زیر برقرار باشد.

$$P(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$$

.

فرض کنید Ω فضای نمونه یک آزمایش است. تابع حقیقی مقدار $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را یک

متغیر تصادفی آن آزمایش می‌گوییم، هرگاه برای هر بازه $I \subseteq \mathbb{R}$، مجموعه‌ی $\{s : X(s) \in I\}$ یک پیشامد باشد.
فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی بر فضای نمونه‌ای S باشند. در اینصورت $X : \Omega \to \mathbb{R}$ و $Y : \Omega \to \mathbb{R}$، توابع حقیقی مقدار هم‌دامنه‌اند. بنابراین می توان توابع $X + Y$، $X - Y$، $aX + bY$ و XY را که در آن a و b اعداد ثابت‌اند و X/Y را که در آن $Y \neq ۰$، تعریف کرد. چون دامنه همه این توابع حقیقی مقدار، Ω است لذا آن‌ها نیز متغیرهای تصادفی‌اند که روی Ω تعریف شده‌اند. بنابراین مجموع، تفاضل، ترکیب‌های خطی، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت (درصورت وجود) متغیرهای تصادفی نیز متغیرهای تصادفی‌اند.

متغیر X گسسته است، هرگاه مجموعه مقادیر ممکن آن متناهی یا نامتناهی شمارا باشد. به هر متغیر تصادفی گسسته یک تابع حقیقی مقدار $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تخصیص داده می‌شود که به صورت $p(x) = p(X = x)$ تعریف می‌شود و آن را تابع احتمال می‌گویند.
به طور کلی هر پیشامد A در فضای نمونه Ω دارای یک متغیر تصادفی مشخص کننده X_A مرتبط با آن است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$X_A(w) := \begin{cases} ۱ & \text{اگر } w \in A, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت}. \end{cases}$$

در این پایان‌نامه تمامی متغیرهای تصادفی، متغیر تصادفی مشخص کننده هستند.

تابع احتمال P متغیر تصادفی X، که مجموعه مقادیر ممکن آن $\{x_۱, x_۲, ...\}$ است، تابعی است از $\mathbb{R}$ به فاصله $[۰, ۱]$ با ویژگی‌های زیر:
(الف) : $p(x) = ۰$، اگر $x \notin \{x_۱, x_۲, x_۳, ...\}$،
(ب) : $p(x_i) = p(X = x_i)$ و $p(x_i) \geq ۰$ $(i = ۱, ۲, ...)$،
(ج) : $\sum_{i=۱}^{\infty} p(x_i) = ۱$.

مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی گسسته‌ی X با مجموعه‌ی مقادیر ممکن A و تابع احتمال $p(x)$ بنا به تعریف عبارت است از

$$E(X) = \sum_{x \in A} xp(x).$$

اگر این مجموع به طور مطلق همگرا باشد، در این صورت می‌گوییم، $E(X)$ وجود دارد و آن را امید ریاضی X می‌نامیم.

گراف G با n رأس که بین هر دو رأس آن به صورت تصادفی و مستقل و با احتمال p می‌تواند یالی وجود داشته باشد، را گراف تصادفی می‌نامیم و با $G(n,p)$ نشان می‌دهیم.

برای دو تابع f و g، می‌نویسیم $f = O(g)$ اگر برای تمامی متغیرهای به اندازه کافی بزرگ، $f \leq cg$ به طوری که c ثابت مثبت مطلق باشد. همچنین اگر $g = O(f)$، می‌نویسیم $f = \Omega(g)$ و اگر $f = O(g)$ و $f = \Omega(g)$، می‌نویسیم $f = \theta(g)$. گوییم $f = o(g)$، اگر هنگامی که متغیرهای دو تابع به سمت بی‌نهایت میل می کنند، حد نسبت $\frac{f}{g}$ به صفر میل کند. یک تابع را نسبت به n خطی گوییم، هرگاه $O(n)$ باشد.

لم نظمیت زمردی برای اولین بار در اثبات معروف زمردی برای حدس اردوش و توران در زمینه یافتن تصاعد حسابی در مجموعه اعداد صحیح، به عنوان لم کمکی استفاده شده است [۸۹]. این لم به عنوان ابزاری قوی در نظریه اکسترمالی گراف‌ها، علوم کامپیوتر و دیگر زمینه‌های ترکیبیاتی کاربرد دارد. کملس و سیمونویتس مطالعات زیادی در زمینه این لم انجام داده‌اند و همچنین الون، رادل، لیفمن و داک به بررسی جنبه‌های الگوریتمی این لم پرداختند. در سال ۲۰۱۲ زمردی به‌واسطه معرفی این لم برنده جایزه آبل شده است. در فصل‌های آتی به کاربردهایی از لم نظمیت زمردی اشاره می‌کنیم، برای درک بهتر این کاربردها این لم را بیان می‌کنیم [۹۰].
گراف $G = (V,E)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید X و Y دو زیرمجموعه جدا از هم از V باشند، چگالی $d(X,Y)$ برابر است با

$$d(X,Y) := \frac{e(X,Y)}{|X||Y|}.$$

برای گراف تصادفی $G(n,p)$ مقدار مورد انتظار برای $e(X,Y)$ برابر است با $p|X||Y|$ و در نتیجه، انتظار می‌رود که $d(X,Y)$ برابر با p باشد.
فرض کنید ϵ ثابت مثبت کوچک باشد. می‌گوییم زیرمجموعه A از X، زیرمجموعه کوچک X است، اگر $|A| \leq \epsilon|X|$ و زیرمجموعه بزرگ X است، اگر $|A| > \epsilon|X|$. زوج (X,Y) از زیرمجموعه‌های جدا از هم V را منظم نامیم، اگر هنگامی که X' زیرمجموعه بزرگی از X و Y' زیرمجموعه بزرگی از Y هستند، چگالی (X',Y') و چگالی (X,Y) دارای اختلاف حداکثر ϵ باشند.
یک تقسیم‌بندی منظم از V با مجموعه مشخص X_0 برابر است با افرازی مانند $\{X_0, X_1, X_2, ..., X_r\}$، به طوری که شرایط زیر برقرار باشد.
- X_0 زیرمجموعه کوچک V باشد.
- $|X_i| = |X_j|$ برای هر $1 \leq i,j \leq r$.
- تمام زوج مجموعه‌های (X_i, X_j) که $\{i,j\} \subset \{1,2,...,r\}$، به استثنا $\epsilon\binom{r}{2}$ تا از آن‌ها، منظم باشند.

لم نظمیت زمردی

فرض کنید p عددی صحیح و ϵ عدد حقیقی مثبت باشند. در اینصورت عدد صحیح q که فقط به p و ϵ وابسته است، وجود دارد به طوری که، هر گراف G با حداقل q رأس دارای تقسیم‌بندی منظم $\{X_0, X_1, X_2, ..., X_r\}$ با $p \leq r \leq q$ باشد [۶۳].

ملاحظه ۳.۱.۱ در این پایان‌نامه منظور از $\log n$ لگاریتم n بر پایه ۲ است. ♦

۲.۱ تاریخچه

در این بخش تاریخچه انتخاب تصادفی وابسته و مطالب مرتبط با آن را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۱ تاریخچه انتخاب تصادفی وابسته

تعداد زیادی از مسائل در نظریه رمزی و نظریه اکسترمالی گراف با مسأله نشاندن یک گراف تنک در یک گراف چگال در ارتباطند. برای به‌دست آوردن چنین نشاندنی، می‌توان زیرمجموعه بزرگ U از رأس‌ها را در گراف چگال مورد نظر به‌دست آورد به‌طوری‌که تمامی (و یا تقریباً تمامی) زیرمجموعه‌های U دارای تعداد زیادی همسایه مشترک باشند. سپس می‌توان رأس‌های گراف تنک مورد نظر را یکی‌یکی به جای رأس‌های U نشاند و گراف تنک را در گراف چگال پیدا کرد. با استفاده از روش‌های احتمالاتی [۶] می‌توان ابتدا در گراف چگال G زیرمجموعه کوچک T از رأس‌ها را به صورت تصادفی و یکنواخت انتخاب کرد. سپس مجموعه U را مجموعه همسایه‌های مشترک T در نظر گرفت. اگر G دارای زیرمجموعه‌ای با تعداد همسایه مشترک کم باشد، غیرمحتمل است که تمام اعضا این مجموعه در مجموعه T انتخاب شود. درنتیجه انتظار نمی‌رود که U دارای زیرمجموعه‌ای با تعداد همسایه‌های کم باشد. لذا زیرمجموعه مورد نظر U برای G به‌دست می‌آید.

این روش، توسط محققان زیادی مورد استفاده قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۸ گاورز از این روش در اثبات قضیه زمردی برای تصاعد حسابی به طول ۴ استفاده کرده است [۵۴] . پس از آن کاستاچکا و رادل در سال ۲۰۰۱ از آن در نظریه رمزی استفاده کرده‌اند [۶۵]. سپس سوداکو در سال ۲۰۰۳ کاربردی از این روش را در تعیین اعداد رمزی–توران بیان کرده است [۸۵].

در ده سال گذشته، کاربردهای مؤثری از روش مذکور در نظریه اکسترمالی گراف‌ها، نظریه رمزی، ترکیبیات جمعی و هندسه ترکیبیاتی بیان شده است. مقاله‌های فراوانی از آن استفاده کرده‌اند و به نظر می‌رسد، زمان آن رسیده است که به عنوان روشی اصولی ارایه شود. در سال ۲۰۱۰ سوداکو و فاکس در [۴۹] این روش را به طور مفصل توضیح و شرح داده‌اند و آن را روش انتخاب تصادفی وابسته نامیدند و کاربردهایی از این روش در زمینه‌های مختلف را ارایه داده‌اند.

۲.۲.۱ تاریخچه مطالب مرتبط

اعداد توران

تعریف ۱.۲.۱ برای گراف H و عدد صحیح مثبت n، عدد توران که با نماد $ex(n,H)$ نشان داده می‌شود، برابر است با بیشترین تعداد یال‌های یک گراف n رأسی به طوری که H زیرگراف آن نباشد. ▲

مسأله تعیین و یا تخمین عدد توران $ex(n,H)$، یکی از مسائل اساسی در نظریه اکسترمالی گراف‌ها است. در سال ۱۹۴۱ توران [۹۱] توانست عدد توران گراف‌های کامل را به‌دست آورد و پس از آن اردوش، سیمونویتس و استون [۹]، در قضیه‌ای رفتار در بی‌نهایت عدد توران برای گراف‌های با عدد رنگی حداقل ۳ را مشخص کردند. از آن‌جا که عدد رنگی گراف‌های دوبخشی برابر ۲ است و طبق قضیه اردوش-استون-سیمونویتس، نمی‌توان رفتار آن را تخمین زد، تعیین عدد توران برای گراف‌های دوبخشی مسأله جذابی به نظر می‌رسد. در بسیاری از موارد، مسأله تعیین عدد توران گراف‌های دوبخشی هنوز باز است.

مسأله تعیین عدد توران برای گراف‌های دوبخشی کامل از توجه خاصی برخوردار است. فرض کنید t و s دو عدد صحیح مثبت باشند، به طوری که $t \leq s$، گراف دو بخشی کامل با $t+s$ رأس و ts یال را با $K_{t,s}$ نشان می‌دهیم. کواری، سس و توران در [۶۸] ثابت کرده‌اند که برای ثابت‌های t و $s \geq t$ رابطه $ex(n, K_{t,s}) \leq (\frac{s-1}{2})^{1/t} n^{2-1/t}$ برقرار است.
الون، کریولویچ و سوداکو [۴]، نشان داده‌اند که گراف دوبخشی مشخص H که درجه رأس های آن در یک کلاس رنگی حداکثر r است، در رابطه $ex(n,H) \leq o(n^{2-1/r})$ صدق می‌کند. طبق ساختارهای بیان شده در [۵، ۶۲] می‌توان گفت که این کران بهترین کران ممکن برای این مسأله است.
اثبات این قضیه با استفاده از روش انتخاب تصادفی وابسته در بخش ۱.۲.۲، بیان می‌شود. با وجود این که این رابطه با استفاده از نتیجه‌ای که در [۵۳] بیان شده به‌دست می‌آید، با استفاده از قضیه انتخاب تصادفی وابسته اثباتی متفاوت و تخمینی تا حدودی قوی‌تر حاصل می‌شود.

اعداد رمزی

تعریف ۲.۲.۱ ابرگراف‌های r-یکنواخت H_1 و H_2 را در نظر بگیرید، عدد رمزی $R(H_1,H_2)$ برابر است با کمترین مقدار صحیح مثبت N به طوری که در هر ۲-رنگ آمیزی از یال‌های ابرگراف کامل r-یکنواخت $K_N^{(r)}$ یا یک کپی از H_1 با یال‌های از رنگ اول باشد و یا یک کپی از H_2 با یال‌های از رنگ دوم باشد. لازم به ذکر است که

عدد رمزی $R(H,H)$ را با $R(H)$ نشان می‌دهیم. ▲

تعریف ۳.۲.۱ همانطور که از تعریف بالا نتیجه می‌شود، برای گراف‌های دلخواه G و H، عدد رمزی $R(G,H)$ برابر است با کمترین مقدار p به طوری که در هر دو رنگ آمیزی گراف کامل K_p یا یک کپی از G با رنگ اول و یا یک کپی از H با رنگ دوم به‌دست آید. عدد رمزی $R(G,G)$ را با $R(G)$ نشان می‌دهیم. عدد **رمزی کلاسیک** $R(m,n)$ برابر است با کمترین مقدار صحیح r به‌طوری‌که در هر دو-رنگ‌آمیزی یالی گراف K_r یا یک کپی از K_m از رنگ اول و یا یک کپی از K_n از رنگ دوم وجود داشته باشد.

▲

مسأله تعیین و یا تخمین عدد رمزی یکی از مسائل اساسی در ترکیبیات است. برای کسب جزئیات بیشتر در رابطه با اعداد رمزی می‌توانید به کتاب نظریه رمزی [۵۸] مراجعه کنید.
نتایج به‌دست آمده توسط اردوش و زکرس [۴۵] و اردوش [۳۶] نشان می‌دهند که $2^{k/2} \leq R(K_k) \leq 2^{2k}$ برقرار است. علاوه بر گراف‌های کامل اعداد رمزی دیگر گراف‌ها نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در این بخش به بررسی مطالعاتی در زمینه اعداد رمزی گراف‌های با درجه رأس‌های کران‌دار، گراف‌های r-مکعب، ابرگراف‌های تنک و اعداد رمزی گراف‌های تباهیده می‌پردازیم.

اعداد رمزی گراف‌های با درجه رأس‌های کران‌دار: در کنار گراف‌های کامل یکی دیگر از مسائل مهم در زمینه تعیین اعداد رمزی مسأله اعداد رمزی گراف‌های با درجه رأس‌های کران‌دار است. مطالعه در این زمینه توسط بور و اردوش [۱۳] در سال ۱۹۷۵ آغاز شده و این موضوع نقش مهمی در نظریه رمزی گراف‌ها ایفا کرده است.
یکی از حدس‌های اساسی بور و اردوش بیان می‌کند که برای هر عدد صحیح مثبت $\triangle$، ثابت $c(\triangle)$ وجود دارد به طوری که برای هر گراف H با n رأس و بیشترین درجه $\triangle$ رابطه $R(H) \leq c(\triangle)n$ برقرار است. این حدس توسط چواتال، رادل، زمردی و تروتر [۱۸] با استفاده از لم نظمیت اثبات شده است. این قضیه نشان می‌دهد که برای گراف با بیشترین درجه ثابت، عدد رمزی فقط به طور خطی به تعداد رأس‌های گراف وابسته است و به دلیل استفاده از لم نظمیت، کران بالایی که ارایه می‌شود به صورت تابعی برجی از $\triangle$ است. پس از آن مسأله تعیین مقدار مناسب برای $c(\triangle)$ از توجه خاصی برخوردار شد.
ایتون [۳۰] با استفاده از لم نظمیت نشان داده است که تابع $c(\triangle)$ می‌تواند به فرم $2^{2^{c(\triangle)}}$ باشد. پس از آن گراهام، رادل و روسینسکی [۵۷] با استفاده از روشی جالب و بدون استفاده از لم نظمیت، ثابت کرده‌اند که ثابت c وجود دارد به طوری که $c(\triangle) \leq 2^{c\triangle \log^2 \triangle}$ و پس از آن کنلن، سوداکو و فاکس [۱۹] این کران را بهتر کرده و ثابت کرده اند که $c(\triangle) < 2^{c\triangle \log \triangle}$. برای گراف‌های دوبخشی، گراهام، رادل و روسینسکی، مطالعاتی انجام داده‌اند و نشان داده‌اند که اگر H گرافی دوبخشی با n رأس و بیشترین درجه $\triangle$ باشد آنگاه $R(H) \leq 2^{c\triangle \log \triangle}n$ و از طرف دیگر ثابت کرده‌اند که ثابت مثبت c وجود دارد به طوری که برای هر $2 \leq \triangle$ و $n \geq \triangle + 1$، گراف دوبخشی H با n رأس و