به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز تابعی)

عنوان :

نامساوی عملگری بوهر

استاد راهنما :

دکتر محمد صال مصلحیان

استاد مشاور :

دکتر شیرین حجازیان

نگارنده :

آمنه درویش

فهرست مندرجات

پیش گفتار

نامساوی کلاسیک بوهر در سال ۱۹۲۴ توسط بوهر ارائه شد. سپس تعمیم‌هایی از آن در اعداد مختلط، فضای توابع حقیقی مقدار، فضاهای نرم‌دار و فضاهای برداری یکانی، به اثبات رسید.

نخستین بار در سال ۲۰۰۳، عمر حرزالله در [۹] نامساوی بوهر را به عملگرهای فضای هیلبرت تعمیم داد. سپس تعمیم‌های زیبایی از این نامساوی توسط نویسندگان مقالات [۶], [۷], [۸], [۱۶], [۱۷], [۲۸] در سال‌های ۲۰۰۶ تا ۲۰۱۰، ارائه شد.

مطالب این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است.

در فصل اول تعاریف و مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشند، گردآوری شده است.

در فصل دوم نامساوی کلاسیک بوهر و تعمیم‌هایی از آن را معرفی می‌کنیم. منبع اصلی مطالب این فصل، [۲۲] می‌باشد.

فصل سوم شامل تعمیم‌های عملگری نامساوی بوهر، کاربردهای آن، رویکرد ماتریسی نسبت به نامساوی بوهر و بررسی ارتباط آن با قانون متوازی‌الاضلاع می‌باشد. مهمترین منابع این فصل [۶], [۷], [۸], [۱۶], [۲۸], [۲۹] می‌باشند.

در فصل چهارم ضمن ارائه‌ی یک تساوی عملگری در C^*-مدول‌های هیلبرت، نامساوی بوهر را برای عناصر یک C^*-مدول هیلبرت بیان و اثبات نموده و تعمیمی از آن را برای

تعدادی متناهی از نگاشت‌های الحاق‌پذیر روی یک C^*–مدول هیلبرت، بررسی می‌کنیم.
منبع این فصل، [۱۷] می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل به ذکر مقدمات و ارائه‌ی تعاریف و نمادهای به کار رفته در این پایان نامه می‌پردازیم. جهت آگاهی از تعاریف و مقدمات، خواننده‌ی محترم به کتاب مورفی [۱۸] ارجاع داده می‌شود.

۱.۱ حسابان تابعی

فرض کنید A عنصری خودالحاق از C^*—جبر $\mathcal{A}$ و $C(sp(A))$ نشان دهنده‌ی C^*—جبر متشکل از تمام توابع مختلط مقدار پیوسته روی طیف A باشد. اینک به معرفی حسابان تابعی پیوسته برای A می‌پردازیم، نگاشتی که به هر $f \in C(sp(A))$، عنصر $f(A)$ از $\mathcal{A}$ را نظیر می‌کند.

قضیه ۱.۱.۱ [۱۰، قضیه ۳.۱.۴] اگر A عنصری خودالحاق از C^*—جبر $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه نگاشت پیوسته و منحصر به فرد $\varphi : C(sp(A)) \longrightarrow \mathcal{A}$ با ضابطه‌ی $\varphi(f) = f(A)$ موجود است به طوری که

(i) اگر f یک چندجمله‌ای باشد، $f(A)$ همان چندجمله‌ای f با متغیر A است. به علاوه اگر $f, g \in C(sp(A))$ و $a, b \in \mathbb{C}$، آن‌گاه

(ii) $\|f(A)\| = \|f\|$ ،

(iii) $(af + bg)(A) = af(A) + bg(A)$ ،

(iv) $(fg)(A) = f(A)g(A)$ ،

(v) $\overline{f}(A) = [f(A)]^*$، که در آن $\overline{f}$ نمایش دهنده‌ی تابع مختلط مزدوج می‌باشد. به ویژه، $f(A)$ خودالحاق است اگر و تنها اگر f روی $sp(A)$ مقادیر حقیقی اختیار کند،

(vi) $f(A)$ نرمال است،

(vii) اگر $B \in \mathcal{A}$ و $AB = BA$، آن‌گاه $f(A)B = Bf(A)$.

موارد (i) تا(v) قضیه‌ی قبل، نشان می‌دهد که حسابان تابعی $\varphi : C(sp(A)) \longrightarrow \mathcal{A}$ یک $*-$یکریختی طولپا می‌باشد (φ لزوماً پوشا نیست) ، که نگاشت همانی روی $sp(A)$ را به عنصر خودالحاق $A \in \mathcal{A}$ می‌برد. چون $C(sp(A))$ یک فضای متریک کامل است، تصویر آن در $\mathcal{A}$، یعنی $\{f(A) : \quad f \in C(sp(A))\}$ نیز کامل است. بنابراین مجموعه‌ی مذکور یک C^*-زیر جبر جابه‌جایی $C^*(A, I)$ از $\mathcal{A}$، شامل I و A می‌باشد. چون چندجمله‌ای‌ها زیر مجموعه‌ی چگالی از $C(sp(A))$ را تشکیل می‌دهند، هر عنصر $C^*(A, I)$ حد دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های با متغیر A می‌باشد.

گزاره ۲.۱.۱ [۱۰، گزاره ۴.۱.۴] اگر A عنصری خودالحاق از C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه

$$C^*(A, I) = \{f(A) : \quad f \in C(sp(A))\}$$

کوچکترین زیرجبر بسته‌ی $\mathcal{A}$ است که شامل I و A می‌باشد.

۲.۱ عنصر مثبت در یک C^*-جبر

تعریف ۱.۲.۱ عنصر A از C^*-جبر $\mathcal{A}$ را مثبت گوییم، هرگاه A خودالحاق باشد و $sp(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

مجموعه‌ی تمام عناصر مثبت $\mathcal{A}$ را با $\mathcal{A}^+$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۲.۱ [۱۰، قضیه ۶.۲.۴] اگر $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد و $A \in \mathcal{A}$، آن‌گاه احکام ذیل معادلند:

(i) $A \in \mathcal{A}^+$ ،

(ii) عنصر منحصر به فرد H در $\mathcal{A}^+$ موجود است به طوری که $A = H^۲$ ،

(iii) عنصر B در $\mathcal{A}$ موجود است به طوری که $A = B^*B$.

عنصر منحصر به فرد H در قضیه‌ی فوق را ریشه‌ی دوم مثبت A گوییم و با $A^{\frac{۱}{۲}}$ نشان می‌دهیم.

۳.۱ قدرمطلق یک عملگر

تعریف ۱.۳.۱ برای هر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، قدرمطلق A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|A| = (A^*A)^{\frac{۱}{۲}}.$$

با توجه به قضیه‌ی قبل، $|A|$ همیشه مثبت است، حتی اگر A مثبت نباشد.

تبصره ۲.۳.۱ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$، یک C^*-جبر است، پس برای هر $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$،

$$\|A\|^۲ = \|A^*A\|.$$

بنابراین $|A| = O$ اگر و تنها اگر $A = O$.

گزاره ۳.۳.۱ [۱۰، گزاره (i)۳.۲.۴$,(ii)$] فرض کنید A عنصر خودالحاقی از C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشد و $f \in C(sp(A))$، در این صورت

الف) $f(A) \in \mathcal{A}^+$ اگر و تنها اگر برای هر $t \in sp(A)$، $f(t) \geq ۰$.

ب) $\|A\|I \pm A \in \mathcal{A}^+$ یعنی $-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$.

قضیه ۴.۳.۱ [۱۰، قضیه ۸.۲.۴ (i)] فرض کنید A و B عناصر خودالحاقی از C^*—جبر $\mathcal{A}$ باشند و $-B \leq A \leq B$. در این صورت $\|A\| \leq \|B\|$.

۴.۱ نگاشت خطی مثبت

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، C^*—جبر باشند و $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نگاشتی خطی باشد، دراین صورت φ را مثبت گوییم هرگاه، $\varphi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{B}^+$.

مثال ۲.۴.۱ هر $*$—همریختی مثبت است. زیرا اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$، C^*—جبر باشند و $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک $*$—همریختی باشد و $Y \in \varphi(\mathcal{A}^+)$، آن‌گاه $X \in \mathcal{A}^+$ موجود است به طوری که $Y = \varphi(X)$. بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۱، عنصر $B \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $X = B^*B$. پس

$$Y = \varphi(X) = \varphi(B^*B) = \varphi(B^*)\varphi(B) = (\varphi(B))^*\varphi(B)$$

لذا بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۱، $Y \in \mathcal{B}^+$.

۵.۱ ارتباط بین ماتریس‌ها و عملگرهای خطی

فرض کنید V یک فضای برداری n—بعدی و W یک فضای برداری m—بعدی روی میدان F باشند. همچنین فرض کنید $B = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V و $B' = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ پایه‌ای برای W باشد. اگر T عملگر دلخواهی از V به W باشد، آن‌گاه T با عملکردش روی

بردارهای α_j، تعیین می‌شود. هر یک از بردارهای $T\alpha_j$ به طور یکتا به صورت یک ترکیب خطی

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$$

از β_iها که در آن اسکالرهای $A_{1j}, ..., A_{mj}$ مختصات $T\alpha_j$ در پایه‌ی B' می‌باشند، قابل بیان است. از این رو عملگر T با mn اسکالر A_{ij} تعیین می‌شود. ماتریس $m \times n$ $A = (A_{ij})$ ماتریس T نسبت به دو پایه‌ی B و B' نامیده می‌شود.

اگر $\alpha = x_1\alpha_1 + ... + x_n\alpha_n$ برداری از V باشد، آن‌گاه

$$T\alpha = T(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j)\beta_i$$

و اگر X ماتریس مختصات α در پایه‌ی B باشد، بنا به روابط فوق AX ماتریس مختصات بردار $T\alpha$ در پایه‌ی B' است ، زیرا اسکالر $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j$ درایه‌ی i مین سطر ماتریس ستونی AX است.

همچنین اگر A ماتریس $m \times n$ دلخواهی بر روی میدان F باشد، آن‌گاه

$$T(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j)\beta_i.$$

تبدیل خطی T از V به W را تعریف می‌کند که ماتریس آن نسبت به B و B' ، ماتریس A می‌باشد.

۶.۱ ماتریس مثبت—معین و مثبت—شبه‌معین

تعریف ۱.۶.۱ ترانهاده مزدوج ماتریس A را با A^* یا نشان داده و به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$$

یا به عبارتی

$$A^*{}_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

چون هر ماتریس A نظیر یک عملگر T_A است، نشان می‌دهیم ترانهاده مزدوج A^* از A همان الحاق عملگر T_A است، یعنی $T_{A^*} = T_A{}^*$.

فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ و V و W فضای هیلبرت به ترتیب با ابعاد n و m باشند. در این صورت $T_A : V \longrightarrow W$ و برای $X \in V$ و $Y \in W$ داریم

$$\begin{aligned}
\langle X, T_A{}^*Y\rangle &= \langle T_AX, Y\rangle \\
&= \langle AX, Y\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\Big)\overline{y_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\overline{y_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\sum_{i=1}^{m} \overline{A_{ij}} y_i} \\
&= \langle X, A^*Y\rangle \\
&= \langle X, T_{A^*}Y\rangle
\end{aligned}$$

پس برای هر $Y \in W$، $T_{A^*}Y = T_A{}^*Y$ و چون دامنه‌ها یکسان است $T_{A^*} = T_A{}^*$.

تعریف ۲.۶.۱ ماتریس $n \times n$ مختلط A را مثبت—شبه‌معین یا نامنفی معین گوییم و با نماد $A \geq 0$ نشان می‌دهیم، هرگاه عملگر خطی نظیر آن مثبت باشد.

به علاوه A را مثبت—معین گوییم و با نماد $A > 0$ نشان می‌دهیم،هرگاه برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^*Ax > 0$. یا به طور معادل اگر عملگر نظیر آن را نیز با A نمایش دهیم، $\langle Ax, x\rangle > 0$.

اگر A یک ماتریس $n \times n$ مختلط باشد، آن‌گاه $A \geq 0$ اگر و تنها اگر برای هر ماتریس $n \times m$ مختلط X، $X^*AX \geq 0$. به طور مشابه برای عناصر یک C^*—جبر داریم :

قضیه ۳.۶.۱ [۱۰، نتیجه ۷.۲.۴] اگر $\mathcal{A}$ یک C^*—جبر باشد و $A \in \mathcal{A}^+$ و $B \in \mathcal{A}$، آن‌گاه $B^*AB \in \mathcal{A}^+$.

برهان. بنا به قضیه‌ی ۲.۳.۱ حکم برقرار است زیرا

$$B^*AB = (A^{\frac{1}{2}}B)^*(A^{\frac{1}{2}}B).\square$$

برای اثبات عکس قضیه‌ی فوق کافی است در صورت یکدار بودن C^*—جبر، عنصر همانی و در غیر این صورت همانی تقریبی C^*—جبر را به جای B در قضیه‌ی فوق قرار دهیم.

قضیه ۴.۶.۱ $(Gelfand - Naimark)$[۱۸، قضیه ۱.۴.۳] هر C^*—جبر با یک $*$—زیرجبر بسته از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ به ازای یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به طور یکمتر $*$—یکریخت است.

نمادگذاری ۵.۶.۱ ماتریس قطری با درایه‌های $\lambda_1, ..., \lambda_n$ روی قطر اصلی را با نماد $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ نشان می‌دهیم.

در قضایای این بخش فرض بر این است که A ماتریس $n \times n$ مختلط باشد.

قضیه ۶.۶.۱ [۲۹، قضیه ۶.۱] A مثبت—شبه‌معین است اگر و تنها اگر ماتریس یکانی U موجود باشد به طوری که

$$A = U^* diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) U.$$

که در آن λ_iها نامنفی هستند. به علاوه اگر $A \geq 0$، آن‌گاه $det(A) \geq 0$. اگر $A > 0$، آن‌گاه $det(A) > 0$.

مثال ۷.۶.۱ ماتریس $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ مثبت—معین است زیرا، برای هر بردار ناصفر $z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ در $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = {z_0}^2 + 2{z_1}^2 > 0.$$

ماتریس $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ مثبت—معین نیست زیرا، اگر $z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$، آن‌گاه

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

تعریف ۸.۶.۱ زیرماتریس حاصل از حذف سطرها و ستون‌های با شماره‌ی یکسان را زیرماتریس اصلی نامند.

قضیه ۹.۶.۱ [۲۹، قضیه ۶.۲]

(i) A مثبت—معین است اگر و تنها اگر دترمینان هر زیرماتریس مربعی از A، مثبت باشد.

(ii) A مثبت—شبه‌معین است اگر و تنها اگر دترمینان هر زیرماتریس اصلی از A، نامنفی باشد.

۷.۱ تساوی اویلر–لاگرانژ

تعریف ۱.۷.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد و $\lambda, \mu, \nu, a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$، به طوریکه $\lambda = \mu a^2 + \nu b^2$. در این صورت تساوی اویلر[1]–لاگرانژ[2] برای هر $x, y \in \mathcal{H}$ به صورت زیر است:

$$\frac{\|x\|^2}{\mu} + \frac{\|y\|^2}{\nu} - \frac{\|ax + by\|^2}{\lambda} = \frac{\|\nu bx - \mu ay\|^2}{\lambda\mu\nu}.$$

۸.۱ C^*–مدول هیلبرت

تعریف ۱.۸.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر و X فضای برداری مختلط و یک $\mathcal{A}$–مدول راست باشد به طوری که برای $x \in X$، $a \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$،

$$\lambda(xa) = x(\lambda a) = (\lambda x)a.$$

فضای X را C^*–مدول پیش هیلبرت (راست) روی $\mathcal{A}$ (یا $\mathcal{A}$–مدول ضرب داخلی) گوییم هرگاه $\mathcal{A}$–ضرب داخلی $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y, z \in X$، $\lambda \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathcal{A}$،

---
[1] Euler
[2] Lagrange

(i) $\langle x,x\rangle \geq 0$ و $\langle x,x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x=0$،

(ii) $< x, y+\lambda z > = < x,y > + \lambda < x,z >$،

(iii) $< x, ya > = < x,y > a$،

(iv) $< x,y >^* = < y,x >$.

تعریف ۲.۸.۱ اگر X در تمام شرایط یک $\mathcal{A}$—مدول ضرب داخلی به جز قسمت دوم (i)، صدق کند، آن را $\mathcal{A}$—مدول شبه ضرب داخلی نامند.

گزاره ۳.۸.۱ [۱۱، گزاره ۱.۱] اگر X یک $\mathcal{A}$—مدول ضرب داخلی باشد و $x,y \in X$، آن‌گاه

$$\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle \leq \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle.$$

برهان. بدون نقصان کلیت می‌توان فرض کرد $\|\langle x,x\rangle\| = 1$. برای $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle xa-y, xa-y\rangle \\ &= a^*\langle x,x\rangle a - \langle y,x\rangle a - a^*\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\leq a^*a - \langle y,x\rangle a - a^*\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \end{aligned}$$

زیرا اگر C عنصر مثبتی از $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه بنا به گزاره‌ی ۳.۳.۱، $C \leq \|C\|I$ و $A^*CA \leq A^*\|C\|A$. اینک قرار می‌دهیم $a = \langle x,y\rangle$، در این صورت $a^*a \leq \langle y,y\rangle$.$\square$

نشان می‌دهیم رابطه‌ی $\|x\| = \| < x,x > \|^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی X تعریف می‌کند.

$$\|\langle x,y\rangle\|^{2}=\|\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle\|\leq\|\langle x,x\rangle\|\|\langle y,y\rangle\|=\|x\|^{2}\|y\|^{2}$$

یعنی $\|\langle x,y\rangle\|\leq\|x\|\|y\|$. پس

$$\begin{aligned}\|x+y\|^{2} &= \|\langle x+y,x+y\rangle\|\\ &= \|\langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\|\\ &\leq \|\langle x,x\rangle\|+\|\langle y,y\rangle\|+2\|x\|\|y\|\\ &= (\|x\|+\|y\|)^{2}\end{aligned}$$

برقراری سایر شرایط نرم را نیز به سادگی می‌توان نشان داد.

تعریف ۴.۸.۱ یک $\mathcal{A}$–مدول پیش هیلبرت را C^*–مدول هیلبرت (راست) روی $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه نسبت به نرم خود کامل باشد. $\mathcal{A}$–مدول هیلبرت چپ را به طور مشابه می‌توان تعریف نمود.

مثال ۵.۸.۱ (i) هر فضای هیلبرت یک $\mathbb{C}$–مدول هیلبرت چپ است.

(ii) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر باشد. در این صورت $\mathcal{A}$ ، یک $\mathcal{A}$–مدول هیلبرت با ضرب داخلی $<a,b>=a^*b$، $(a,b\in\mathcal{A})$ می‌باشد.

(iii) فرض کنید $\ell_2(\mathcal{A})$ مجموعه‌ی تمام دنباله‌های $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ با درایه‌های در $\mathcal{A}$ باشد، به طوری که $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*a_i$ در $\mathcal{A}$، همگرا باشد. در این صورت $\ell_2(\mathcal{A})$ تحت اعمال طبیعی

$(\lambda a_i + b_i) = (a_i) + \lambda(a_i)$ ، $(a_i a) = (a_i)a$ و $< (a_i), (b_i) >= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i$ ، یک $\mathcal{A}$—مدول هیلبرت است.

مثال ۶.۸.۱ فضای $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ متشکل از تمام عملگرهای خطی کراندار بین فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ را می توان به عنوان یک C^*—مدول هیلبرت روی C^*—جبر $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ در نظر گرفت که در آن $< T, S >= T^*S$. در این صورت جمع مستقیم

$$X = \underbrace{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \oplus ... \oplus \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})}_{n} = \{(T_1, ..., T_n) : \quad T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \quad i = 1, ..., n\}$$

یک $\mathcal{B}(\mathcal{H})$—مدول هیلبرت است، که در آن ضرب داخلی به صورت

$$< (T_i)_i, (S_i)_i >= \sum_{i=1}^{n} {T_i}^* S_i$$

که $T_i, S_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$، تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۸.۱ فرض کنید X, Y، $\mathcal{A}$—مدول هیلبرت باشند. در این صورت نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را الحاق‌پذیر گوییم هرگاه نگاشت $S : Y \longrightarrow X$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$.

نگاشت S یکتاست زیرا، اگر نگاشت $S' : Y \longrightarrow X$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $\langle Tx, y\rangle = \langle x, S'y\rangle$، آن‌گاه $\langle S'y, x\rangle = \langle Sy, x\rangle$. پس

$$\langle (S' - S)y, x\rangle = \langle (S - S)y, x\rangle = 0.$$

بنا به قضیه[3] ریس، $S' - S$ یکتاست و لذا $S = S'$.

[3] ر.ج.۱۰، قضیه ۲.۴.۱

نگاشت یکتای S را با T^* نمایش داده و آن را الحاق T می‌نامیم. به سادگی می‌توان دید T، $\mathcal{A}-$خطی است یعنی T خطی است و برای هر $x \in X$ و $a \in \mathcal{A}$، $T(xa) = T(x)a$.

برای هر x در گوی واحد X_1 از X، نگاشت $f_x : Y \longrightarrow \mathcal{A}$ را با ضابطه‌ی $f_x(y) = \langle Tx, y\rangle$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\|f_x(y)\| \leq \|T^*y\|.$$

بنا به قضیه‌ی باناخ — اشتین‌هاوس، $\{\|f_x\| : x \in X_1\}$ کراندار است و لذا T کراندار است.

نمادگذاری ۸.۸.۱ فضای تمام نگاشت های الحاق‌پذیر از X به Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

به روشنی می‌توان دید $\mathcal{L}(X)$ $*-$زیرجبر بسته‌ای از $\mathcal{B}(X)$ است و لذا یک جبر باناخ می‌باشد. همچنین

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &\geq sup\{\|\langle T^*Tx, x\rangle\| : \quad x \in X_1\} \\ &= sup\{\|\langle Tx, Tx\rangle\| : \quad x \in X_1\} \\ &= \|T\|^2 \end{aligned}$$

نشان می‌دهد که $\mathcal{L}(X)$ یک C^*-جبر است.