وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان

گراف‌های فوق موزون یالی

استاد راهنما:
دکتر سید محمود شیخ الاسلامی

پژوهشگر:
هانیه اسکندری

شهریور ۱۳۸۸
تبریز – ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر فداکار و مادر بزرگوارم

قدردانی

پس از اتمام این پروژه به شکرانه الهی و در سایه عنایات پروردگار، بر خود واجب می‌دانم از تمام عزیزانی که در این امر همراه و راهنمای اینجانب بودند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است درود و سپاس بی‌دریغم را پذیرا باشند.

استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمود شیخ الاسلامی که این پروژه حاصل زحمات و راهنمایی‌های بی‌دریغ ایشان است که در نهایت صبوری راهگشای مشکلات بودند و با سخاوتمندی، مرا در این راه هدایت نمودند که به حق، بهره‌مند شدن از گنجینه ارزشمند علمشان برایم افتخاری بس بزرگ است.

جناب آقای دکتر امجدی و آقای دکتر رضاپور که داوری این پروژه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم از گنجینه های دانششان بهره‌مند شده‌ام.

خانواده عزیزم، پدر و مادر گرامی و عزیزانم که با از خودگذشتگی، مشوق همیشگی در تمام مراحل زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.

در نهایت، از تمام دوستانی که مرا در این راه همراهی نمودند قدردانی می‌کنم.

از خداوند منان برای این عزیزان سرافرازی، سعادتمندی و سلامتی مسألت می‌نمایم.

هانیه اسکندری

چکیده

فرض کنید G گرافی از مرتبه p و اندازه q باشد. در اینصورت G موزون یالی گفته می‌شود اگر یالها بتوانند توسط $1, 2, \ldots, q$ چنان برچسب گذاری شوند که مجموع برچسب های یال های منتهی به هر رأس به پیمانه p، متمایز باشند.

گراف G از مرتبه p و اندازه q را فوق موزون یالی نامند هرگاه تابعی یک به یک مانند

q فرد، $f : E \to \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots, (q-1)/2, -(q-1)/2\}$

q زوج، $f : E \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, q/2, -q/2\}$

وجود داشته باشد بطوریکه برچسب گذاری القایی رأسی f^* تعریف شده توسط $f^*(u) = \sum\{f(u,v) : (u,v) \in E\}$ این خاصیت را داشته باشد که

p فرد، $f^* : V \to \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots, (p-1)/2, -(p-1)/2\}$

p زوج، $f^* : V \to \{+1, -1, +2, -2, \ldots, p/2, -p/2\}$

یک به یک باشد.

در این پایان نامه، کلاس‌هایی از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم که فوق موزون یالی هستند. ابتدا نشان می‌دهیم که برخی از گراف‌های اویلری فوق موزون یالی هستند، سپس ثابت می‌کنیم همه مسیرها به جز P_2 و P_4 فوق موزون یالی می‌باشند. همچنین در مورد فوق موزون یالی بودن درخت‌های زوج بحث می‌کنیم و نهایتاً ثابت می‌کنیم همه درخت‌های از مرتبه فرد با دقیقاً سه رأس زوج، فوق موزون یالی هستند.

واژه‌های کلیدی: برچسب گذاری موزون یالی، برچسب گذاری فوق موزون یالی

پیشگفتار

درسال ۱۹۶۷، الکس رُزا[1] [۱۸] به هنگام حل مسأله تجزیه دوری گراف‌های کامل به سایر گراف‌ها، با برچسب گذاری جالبی مواجه شد و به این ترتیب برچسب گذاری «موزون» برای اولین بار توسط وی معرفی شد. پس از ارائه مقاله رُزا، بیش از صدها مقاله درمورد برچسب گذاری گراف‌ها نوشته شده است [۵]. یک حدس مشهور که توسط رینگل و کوتزیگ [2] مطرح شد این است که تمام درخت‌ها موزون هستند. این حدس همچنان طی سالها حل نشده باقی مانده است.
یک مفهوم دوگان از برچسب گذاری موزون گراف‌ها، برچسب گذاری «موزون یالی» است که توسط S.P. Lo [۱۶] درسال ۱۹۸۵ معرفی شد. و نهایتاً مفهوم گراف‌های «فوق موزون یالی» که قویتر از مفهوم موزون یالی است توسط میشم و سیمُسُن [3] [۱۷] برای برخی از کلاس گراف‌ها معرفی شد.
در این پایان نامه درفصل ۱، به بیان تعاریف اولیه و قضایای مقدماتی پرداخته‌ایم. در فصل ۲، نشان داده‌ایم که مسیرها فوق موزون یالی می‌باشند. فصل ۳ را به مطالعه فوق موزون یالی بودن گراف‌های اویلری اختصاص داده‌ایم. در فصل ۴، درخت‌های زوجی که فوق موزون یالی هستند را بررسی کرده‌ایم و نهایتاً در فصل آخر ثابت کرده‌ایم تمام درخت‌های فرد با دقیقاً سه رأس زوج، فوق موزون یالی می‌باشند.

---

[1] Alex Rosa

[2] Ringel and Kotzig

[3] J.Mitchem and A.Simoson

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف و سپس مفهوم برچسب گذاری موزون یالی و فوق موزون یالی و سایر مفاهیم مرتبط با آن را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت را مطرح می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه در نظریه گراف که در این فصل تعریف نشده‌اند، خواننده را به [۱۹ ،۱] ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ مسیر، گراف ساده‌ای است که رأس‌هایش می‌توانند چنان مرتب شوند بطوریکه دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر متوالی باشند (مسیر دارای رأس تکراری نیست).

تعریف ۲.۱.۱ گراف G **همبند** است اگر هر جفت از رأس‌ها در G متعلق به یک مسیر باشند. در غیر این صورت G ناهمبند است.

تعریف ۳.۱.۱ **یک گشت**، دنباله $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$، یال e_i دارای نقاط انتهایی v_{i-1} و v_i می‌باشد. **گذر**، گشتی است که هیچ یال تکراری ندارد.

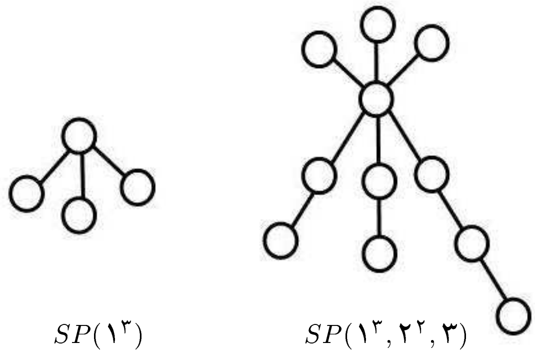
تعریف ۴.۱.۱ **یک گراف اویلری** است اگر شامل یک گذر باشد که تمام یال‌های گراف را در بر بگیرد.

تعریف ۵.۱.۱ یک گراف همبند بدون دور را درخت نامند.

تعریف ۶.۱.۱ **ستاره** درختی می‌باشد که شامل رأسی است که با همه رئوس دیگر مجاور است. ستاره را با $K_{1,n}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۱ **ستاره مضاعف** $S_{m,n}$ درختی است که از دو ستاره $K_{1,m}$ و $K_{1,n}$ با مرکزهای u و v به وسیله افزودن یال uv حاصل شده است.

تعریف ۸.۱.۱ **عنکبوت** درختی است که دارای یک رأس مرکزی c، از درجه $k > 1$ می‌باشد و تمام رئوس دیگر یا برگ هستند یا دارای درجه ۲ می‌باشند. بنابراین یک عنکبوت حاصل ادغام k تا مسیر با طول‌های متفاوت می‌باشد. اگر عنکبوت شامل x_1 تا مسیر به طول a_1، x_2 تا مسیر به طول a_2 و غیره باشد، آنگاه آن عنکبوت را بصورت $SP(a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \ldots, a_m^{x_m})$ نشان می‌دهیم که در آن $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ و $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k$.



شکل ۱.۱.

تعریف ۹.۱.۱ **کرونای** گراف G، گرافی است که از G با افزودن یال‌های آویز به تمام رأس‌های آن حاصل می‌شود و با $GoK_{۱}$ نمایش داده می‌شود.

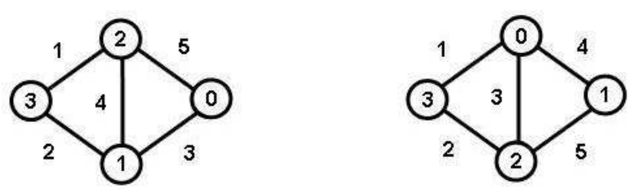
تعریف ۱۰.۱.۱ **گراف دوستی**، گراف ساده‌ای است که در آن هر دو رأس گراف، دقیقاً یک همسایه مشترک دارند.

تعریف ۱۱.۱.۱ رأس از درجه ۱ را برگ می‌نامند.

تعریف ۱۲.۱.۱ یال مجاور با رأس درجه ۱ را یال آویز می‌نامند.

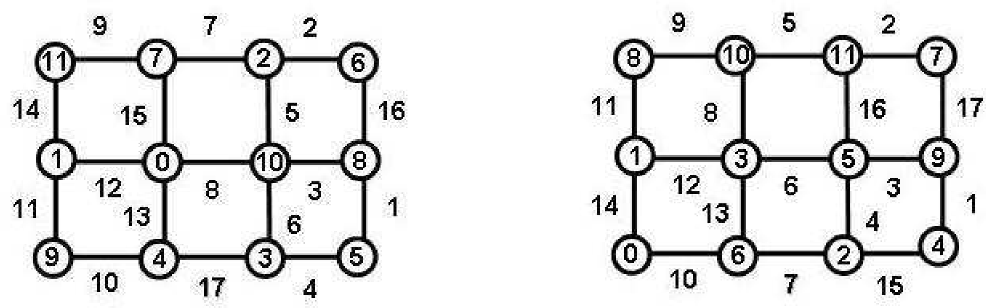
تعریف ۱۳.۱.۱ گراف G از مرتبه p و اندازه q، موزون یالی گفته می‌شود اگر یالها بتوانند توسط $۱,۲,\dots,q$ چنان برچسب گذاری شوند که مجموع برچسب‌های یال‌های منتهی به هر رأس، به پیمانه p متمایز باشند.

مثال ۱.۱.۱ شکل ۲.۱، یک گراف با ۴ رأس و ۵ یال، با دو برچسب گذاری موزون یالی را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱.

مثال ۲.۱.۱ شکل ۳.۱، یک شبکه با ۱۲ رأس و ۱۷ یال را نشان می‌دهد که ۲ برچسب گذاری موزون یالی متفاوت دارد.



شکل ۳.۱.

شرط لازم برای موزون یالی بودن (Lo [۱۶]) این است که

$$q(q+۱) \equiv \frac{p(p-۱)}{۲} \pmod p. \qquad (۱.۱)$$

قضیه ۱.۱.۱ [۱۱] اگر در گراف G از مرتبه p و اندازه q، $p \equiv ۲ \pmod ۴$ باشد، آنگاه G موزون یالی نمی‌باشد.

حدس ۱.۱.۱ شرط (۱.۱) برای موزون یالی بودن گراف‌های همبند کافی است [۸].

حدس زیر، زیر شاخه حدس بالاست و تاکنون اثبات نشده است.

حدس ۲.۱.۱ تمام درخت‌های از مرتبه فرد موزون یالی هستند.

موزون یالی بودن کلاس‌های متعددی از درخت‌های فرد در [٦] ثابت شده است. در [۱۵] نشان داده شده است که تمام درخت‌های از مرتبه فرد با قطر حداکثر ۴، موزون یالی هستند.
پیدا کردن برچسب گذاری موزون یالی گراف‌ها منوط به حل «سیستم معادلات دیوفنتاین خطی» می‌باشد و در حالت کلی پیدا کردن برچسب گذاری موزون یالی کار دشواری است.

۲.۱ گراف‌های فوق موزون یالی

حال مفهوم برچسب گذاری فوق موزون یالی گراف‌ها را که قوی تر از موزون یالی است و توسط میشم و سیمُسُن معرفی شده است را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ گراف G از مرتبه p و اندازه q را فوق موزون یالی نامند هرگاه تابعی یک به یک مانند

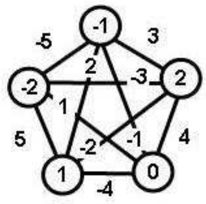
$$f : E \to \{۰, +۱, -۱, +۲, -۲, \ldots, (q-۱)/۲, -(q-۱)/۲\} \qquad q \text{ فرد،}$$
$$f : E \to \{+۱, -۱, +۲, -۲, \ldots, q/۲, -q/۲\} \qquad q \text{ زوج،}$$

وجود داشته باشد بطوریکه برچسب گذاری القایی رأسی f^* تعریف شده توسط $f^*(u) = \sum\{f(u,v) : (u,v) \in E\}$ این خاصیت را داشته باشد که

$$f^* : V \to \{۰, +۱, -۱, +۲, -۲, \ldots, (p-۱)/۲, -(p-۱)/۲\} \qquad p \text{ فرد،}$$
$$f^* : V \to \{+۱, -۱, +۲, -۲, \ldots, p/۲, -p/۲\} \qquad p \text{ زوج،}$$

یک به یک باشد.

مثال ۱.۲.۱ شکل ۴.۱، یک گراف فوق موزون یالی را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴.

قضیه ۱.۲.۱ اگر G یک گراف فوق موزون یالی باشد و

$$q \equiv \begin{cases} -1 \pmod{p} & \text{اگر } q \text{ زوج باشد} \\ 0 \pmod{p} & \text{اگر } q \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

آنگاه G، موزون یالی نیز می‌باشد.

برهان. فرض کنید (f, f^*) یک جفت تابع فوق موزون یالی برای G باشد. یک جفت تابع موزون یالی (l, l^*) برای G بصورت زیر تعریف کنید. فرض کنید

$$r = \begin{cases} q + 1 & \text{اگر } q \text{ فرد باشد} \\ q & \text{اگر } q \text{ زوج باشد} \end{cases} .$$

در هر دو حالت $r \equiv 0 \pmod{p}$. تعریف کنید

$$l(uv) = \begin{cases} f(uv) & l(uv) > 0 \\ f(uv) + r & l(uv) \le 0 \end{cases} .$$

حال داریم

$$l^* = (\sum_{uv\in E(G)} l(uv)) \pmod p$$
$$= (\sum_{f(uv)>0} f(uv) + \sum_{f(uv)\leq 0}(f(uv)+r)) \pmod p$$
$$= (\sum_{f(uv)>0} f(uv) + \sum_{f(uv)\leq 0}(f(uv)) \pmod p = f^*(v) \pmod p$$

■

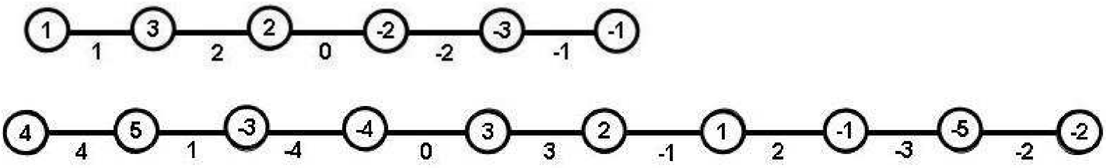
فصل ۲

مسیرهای فوق موزون یالی

در این فصل، نشان می‌دهیم که تمام مسیرهای P_n به جز P_2 و P_4 فوق موزون یالی هستند.
فرض کنید $P_m = x_1, x_2, \ldots, x_m$ مسیری با برچسب گذاری یالی f و $P'_m = x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ مسیری با برچسب گذاری یالی f' باشد. اگر به‌ازای هر i، $1 \leq i \leq m-1$، داشته باشیم $f(x_i, x_{i+1}) = -f'(x_i, x_{i+1})$، آنگاه برچسب گذاری f معکوس f' نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۲. اگر $n \neq 2, 4$، P_n فوق موزون یالی است.

برهان. واضح است که P_2 فوق موزون یالی نیست. P_4 فوق موزون یالی نیست زیرا با توجه به مجموعه برچسب یالی $\{1, -1, 0\}$ و مجموعه برچسب رأسی $\{2, 1, -1, -2\}$، مجموع هیچ دو یال از گراف، ۲ یا ۲− نمی‌شود. برچسب گذاری P_3 نیز بدیهی است. در مورد P_6 و P_{10} یال های P_6 را به ترتیب با $(1, 2, 0, -2, -1)$ و یال های P_{10} را به ترتیب با $(4, 1, -4, 0, 3, -1, 2, -3, -2)$ برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۱.۲).



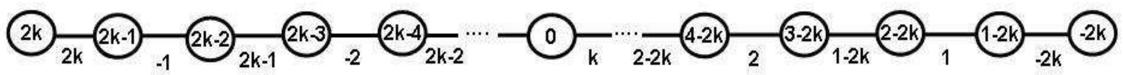
شکل ۱.۲.

حال فرض می کنیم $n \geq 5$ و $n \neq 6, 10$.

ایده اساسی اثبات، درنظر گرفتن مسیر P_n به عنوان اتحادی از مسیرهای Q_1 و Q_2 است که توسط یالی با برچسب « ۰ » به هم متصل شده‌اند. حالات زیر را در نظر می‌گیریم(در تمام حالات f معکوس f' است).

حالت ۱. $n \equiv 1 \pmod{4}$.

در این حالت نتیجه می‌شود که $n = 4k + 1$ که در آن k یک عدد صحیح مثبت است. بنابراین می‌توانیم برچسب گذاری فوق موزون یالی را به ترتیب زیر بیابیم:

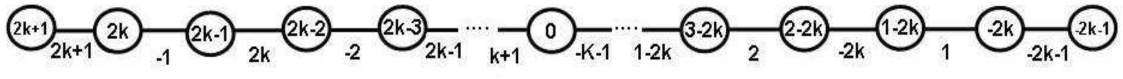


شکل ۲.۲.

مسیر P_{4k+1} مشتمل بر دو مسیر P_{2k+1} و P'_{2k+1} به ترتیب با برچسب گذاری‌های یالی f و f' می‌باشد.

حالت ۲. $n \equiv 3 \pmod{4}$.

در این حالت $n = 4k + 3$ است که در آن k عدد صحیح مثبت است. مانند حالت قبل برچسب گذاری فوق موزون یالی را می‌یابیم. مسیر P_{4k+3} مشتمل بر دو مسیر P_{2k+2} و P'_{2k+2} به ترتیب با برچسب گذاری‌های یالی f و f' می‌باشد.



شکل ۳.۲.

حالت ۳. $n \equiv 0 \pmod{8}$.

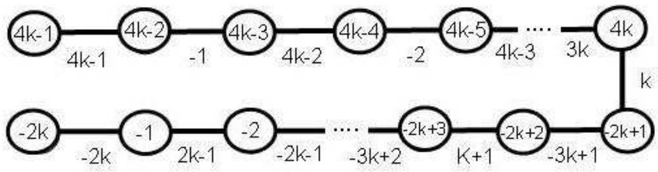
در این حالت مسیر P_n را بصورت اتحاد P_{4k} و P'_{4k} به ترتیب با برچسب گذاری یالی f و f'

در نظر می‌گیریم. یالهایی که روی مسیر P_{4k} هستند را به ترتیب با

$$(4k-1,-1,4k-2,-2,4k-3,-3,\dots,-k+1,3k,k,-3k+1,$$

$$k+1,-3k+2,k+2,\dots,-2k-1,2k-1,-2k).$$

برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲.

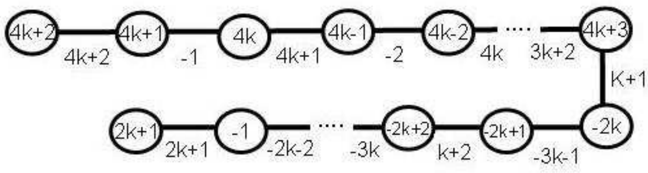
حالت ۴. $n \equiv 6 \pmod 8$.

مانند حالت ۳، P_n را بصورت اتحاد P_{4k+3} و P'_{4k+3} به ترتیب با برچسب گذاری یالی f و f' درنظر می‌گیریم. یالهای موجود در مسیر P_{4k+3} را به ترتیب با

$$(4k+2,-1,4k+1,-2,4k,-3,\dots,3k+3,-k,3k+2,$$

$$k+1,-3k-1,k+2,-3k,k+3,\dots,2k,-2k-2,2k+1).$$

برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۵.۲).



شکل ۵.۲.

حالت ۵. $n \equiv 4 \pmod 8$.

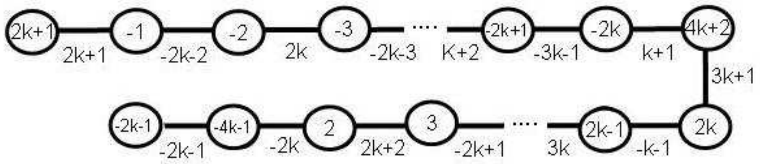
در این صورت P_n را بصورت اتحاد مسیرهای Q_1 و Q_2 به ترتیب به طولهای $4k+3$ و $4k+1$ که با

یالی که برچسب ۰ دارد به هم متصل شده‌اند را در نظر می‌گیریم. یالهای مسیر Q_1 را به ترتیب با

$$(2k+1, -2k-2, 2k, -2k-3, \ldots, k+2, -3k-1, k+1,$$

$$3k+1, -k-1, 3k, \ldots, -2k+1, 2k+2, -2k, -2k-1).$$

برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۶.۲).



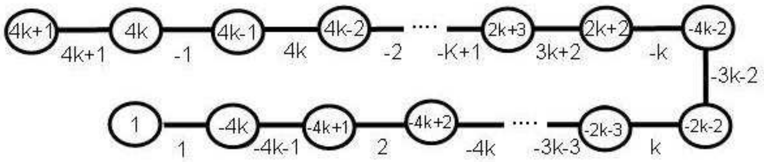
شکل ۶.۲.

به علاوه یال‌های مسیر Q_2 را به ترتیب با

$$(4k+1, -1, 4k, -2, \ldots, -k+1, 3k+2, -k,$$

$$-3k-2, k, -3k-3, \ldots, -4k, 2, -4k-1, 1).$$

برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۷.۲).



شکل ۷.۲.

حالت ۶. $n \equiv 2 \pmod{16}$.

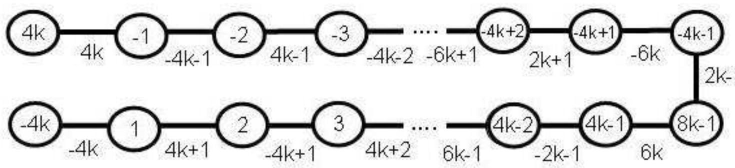
فرض کنید $n = 16k+2$. مانند حالت ۵، P_n را بصورت اتحاد مسیرهای Q_3 و Q_4 به ترتیب با طولهای $8k+2$ و $8k$ که با یالی که برچسب ۰ دارد به هم متصل شده‌اند در نظر می‌گیریم. یالهای

مسیرQ_3 را به ترتیب با

$$(4k, -4k-1, 4k-1, -4k-2, \ldots, -6k+1, 2k+1, -6k, 2k-1,$$

$$6k, -2k-1, 6k-1, \ldots, 4k+2, -4k+1, 4k+1, -4k).$$

برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۸.۲).



شکل ۸.۲.

سپس یال‌های مسیر Q_4 را به ترتیب با

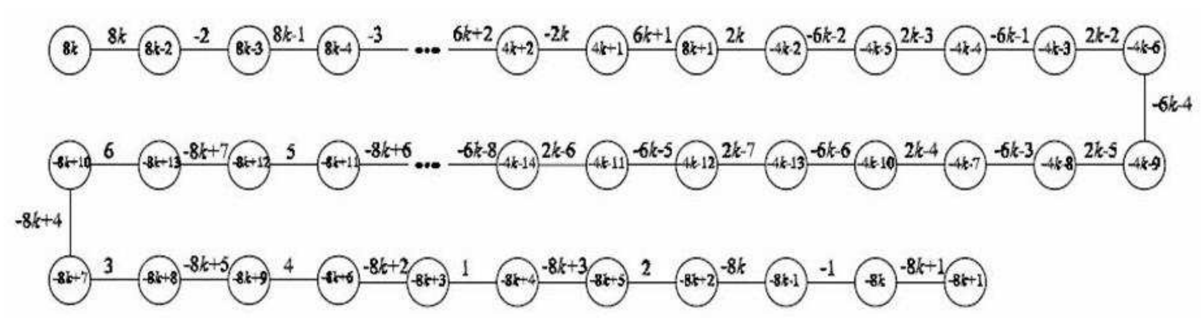
$$(8k, -2, 8k-1, -3, \ldots, 6k+2, -2k, 6k+1, 2k, -6k-2, 2k-3,$$

$$-6k-1, 2k-2, -6k-4, 2k-5, -6k-3, 2k-4, -6k-6, 2k-7,$$

$$-6k-5, 2k-6, -6k-8, \ldots, -8k+6, 5, -8k+7, 6, -8k+4,$$

$$3, -8k+5, 4, -8k+2, 1, -8k+3, 2, -8k, -1, -8k+1).$$

برچسب گذاری می‌کنیم (شکل ۹.۲).



شکل ۹.۲.