وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی بعضی از خواص هندسی فضاهای باناخ وساختار مجموعه‌های نقطه ثابت نگاشت‌های غیرخطی روی این فضاها

اساتید راهنما

دکتر اسماعیل نظری

دکتر احمد رضا ساده

استاد مشاور

دکتر علی پارسیان

دانشجو

حسن زمانی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تفرش
دانشکده ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

بررسی بعضی از خواص هندسی فضاهای باناخ وساختار مجموعه‌های نقطه ثابت نگاشت‌های غیرخطی روی این فضاها

دانشجو

حسن زمانی

استاد راهنمای اول: دکتر اسماعیل نظری — امضاء:

استاد راهنمای دوم: دکتر احمد رضا ساده — امضاء:

استاد مشاور: دکتر علی پارسیان — امضاء:

تقدیم به

پدر و مادر گرامی

همسر عزیز

و یاس های زندگی ام

یاسمن و یاسمین

سپاسگزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با الطاف بی کران خود آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و تلاش‌های خالصانه استاد گران‌قدر آقای دکتر اساعیل نظری که در تهیه و تنظیم این پایان نامه به اینجانب کمک‌های فراوانی نموده‌اند، نهایت تشکر و قدردانی بنمایم.

سپس از راهنمایی‌ها و زحمات بی‌دریغ و الطاف بی شائبه استاد بزرگوار دکتر علی پارسیان تشکر و سپاس فراوان دارم.

و نیز از همکاری و راهنمایی‌های استاد گرامی، دکتر احمد رضا ساده که نهایت مساعدت و یاری را با اینجانب در ترجمه واژگان و مفاهیم ریاضی از انگلیسی به فارسی داشته‌اند، صمیمانه سپاس‌گذاری بنمایم.

و در نهایت به رسم شاگردی بر خود لازم می‌دانم که از زحمات صادقانه جناب آقای دکتر باقر نشوادیان بخش استاد درس آنالیز ریاضی اینجانب در مقطع کارشناسی تشکر و سپاس فراوان نمایم.

و تقدیر و تشکر از همه کسانی که به نحوی در انجام و ارائه این پژوهش مرا یاری نموده‌اند.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا بعضی از خواص هندسی فضاهای باناخ، مانند تحدب اکیدا و یکنواخت را مورد مطالعه قرار داده سپس به ساختار نرمال و نرمال یکنواخت، فضاهای باناخ پرداخته و با معرفی ضریب ساختار نرمال و ضریب ساختار نرمال یکنواخت ارتباط بین این دو ساختار را بیان می‌کنیم.
در ادامه پس از معرفی نگاشت‌های غیر انبساطی و L-لیپ شیتز یکنواخت و نگاشت‌های به‌طور مجانبی منظم، ساختار مجموعه‌های نقاط ثابت این‌گونه نگاشت‌ها را روی فضاهای باناخ محدب یکنواخت مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و نیز نشان می‌دهیم، اگر X یک فضای باناخ محدب یکنواخت و C یک زیر مجموعه‌ی ناتهی و بسته و کراندار و محدب X باشد و $T : C \longrightarrow C$ یک نگاشت L-لیپ شیتز یکنواخت باشد؛ آن‌گاه $FixT$ (مجموعه‌ی نقاط ثابتT) یک انقباض C می‌باشد و اگر T یک نگاشت به‌طور مجانبی منظم باشد و X تفکیک پذیر و محدب یکنواخت باشد آن‌گاه $FixT$ یک انقباض C است.

کلمات کلیدی: *فضای با ناخ محدب یکنواخت، نگاشت لیپ شیتز یکنواخت، مرکز مجانبی، انقباض، نقطه ثابت، ساختار نرمال، ساختار نرمال یکنواخت، مدول تحدب، نگاشت به‌طور مجانبی منظم و شرط اپیال*

فهرست مطالب

تاریخچه

بررسی خواص هندسی فضاهای باناخ و نقاط ثابت نگاشت‌های غیرخطی روی این فضاها از دیرباز مورد مطالعه ریاضی‌دانان بوده و هر یک از آن‌ها با ارایه مقالات و ایراد سخنرانی در همایش‌های علمی در سطح جهان سهم عظیمی در معرفی و گسترش این خواص و مفاهیم بنیادی در این رشته را داشته‌اند.

در این میان، ریاضی‌دانانی مانند J.A.Clarkson و W.A.Kirk و K.Goebel و... با ارایه نتایجی مهم در این زمینه و با معرفی مدول‌ها و ضرایب گوناگون مانند مدول تحدب و ضرایب ساختار نرمال و نرمال یکنواخت و ارتباط بین این ضرایب با خواص هندسی فضاهای باناخ در معرفی هر چه بهتر این خواص به صورت کلاسیک پرداخته‌اند. در سال ۱۹۳۶ J.A.Clarkson با معرفی مدول تحدب، برای اولین بار تحدب یکنواخت فضاهای باناخ را تعریف کرد.

همچنین نظریه نقطه ثابت توسط ریاضی‌دانانی بزرگی مانند L.E.J.Brouwer و S.Banach و J.Schauder به صورت کلاسیک توسیع داده شده و این نظریات در فضاهای متریک برای ریاضی‌دانانی مانند F.Browder و D.Gohde و W.A.Kirk در سال ۱۹۶۵ و Z.Opial در سال ۱۹۶۷ انگیزه جدیدی برای ارایه قضیه‌های نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی و ارتباط بین آنها در فضاهای باناخ بوجود آورد.

امروزه مطالعه روی نظریه‌های نقاط ثابت و وجود و یکتایی و یا عدم وجود نقاط ثابت و مجموعه‌های نقاط ثابت نگاشت‌های غیر خطی در سطح وسیعی مورد نظر ریاضی دانان بوده و این رشته از علم ریاضی در حل بعضی از معادلات دیفرانسیل و معادلات عملگرها و ... کاربرد فراوانی دارد.

مقدمه

در این پایان نامه مفاهیم بنیادی به کار رفته در فصل اول از دو کتاب پایه در نظر نقطه ثابت برای نگاشت‌های لیپ شیتز بوده که به عنوان مراجع [۷] و [۸] در انتها درج گردیده و به همراه مراجع [۳] و [۴] و [۹] منابع اصلی این پایان نامه را تشکیل می‌دهند. در این پژوهش معمولا X یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی و بسته و فضای باناخ X می‌باشد و $T : C \longrightarrow C$ یک نگاشت L- لیپ شیتز بوده و $Fix(T) = \{x : T(x) = x\}$ مجموعه نقاط ثابت نگاشت T می‌باشد و نمادها و اصطلاحات به کار رفته استاندارد می‌باشند.

در فصل دوم تحدب فضاهای باناخ را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. تابع $\delta_X : [۰, ۲] \longrightarrow [۰, ۱]$ با ضابطه $\delta_X(\varepsilon) = \inf\{۱ - \frac{۱}{۲}\|x - y\| : \|x\| \leqslant ۱, \|y\| \leqslant ۱, \|x - y\| \geqslant \varepsilon\}$ را مدول تحدب کلارک سون می نامیم که در مطالعه تحدب فضاهای باناخ نقش بسیار مهمی را ایفا می‌نمایند .

فضای باناخ X را محدب یکنواخت گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta_X(\varepsilon) > ۰$ باشد. برای مثال هر فضای هیلبرت H محدب یکنواخت می‌باشد.

در فصل سوم به مطالعه ضرایب هندسی فضاهای باناخ و ساختار نرمال می‌پردازیم.

اگر C یک زیر مجموعه ناتهی و محدب فضای باناخ X باشد در این صورت گوییم C دارای ساختار نرمال است هرگاه برای هر زیرمجموعه و کراندار D از C با قطر مثبت نقطه‌ای مانند $x_۰ \in D$ و $r < diam(D)$ یافت شود به‌طوری‌که $D \subseteq B_r(x_۰)$ و گوییم فضای باناخ X دارای ساختار نرمال است هرگاه هر زیر مجموعه بسته و کراندار و محدب C با قطر مثبت دارای ساختار نرمال باشد.

اگر $۰ < \alpha < ۱$ مستقل از C چنان یافت شود که $\sup\{\|x_۰ - x\| : x \in D\} \leqslant \alpha diam(D)$ در این صورت گوییم X دارای ساختار نرمال یکنواخت است.

اگر C یک زیر مجموعه ناتهی و کراندار فضای باناخ X باشد در این صورت عدد حقیقی

$$r(C) = \inf\{\sup_{y \in C} \|y - x\| : x \in C\}$$

را شعاع چبیشف C گوییم و عدد حقیقی $N(X) = \inf\{\frac{diam(C)}{r(C)}\}$ را که اینفیموم روی زیر مجموعه‌های

محدب و کراندار C از X گرفته می‌شود را ضریب ساختار نرمال گوییم. به وضوح $N(X) \geqslant ۱$ و X دارای ساختار نرمال یکنواخت است اگر و تنها اگر $N(X) > ۱$.

عدد حقیقی

$$WCS(X) = \inf\{\frac{diam(C)}{r(C)} : C \subseteq X, diam(C) > ۰\}$$

را که در آن C محدب و فشرده ضعیف می‌باشد را ضریب ساختار نرمال ضعیف گوییم.

اگر $WCS(X) > ۱$ باشد آن‌گاه دارای ساختار نرمال ضعیف و نرمال یکنواخت ضعیف می‌باشد.

فصل چهارم را با معرفی بعضی خواص مجموعه‌های نقاط نگاشت‌های غیر انبساطی شروع کرده و در ادامه به بررسی ساختار مجموعه‌های نقاط ثابت نگاشت‌های به‌طور مجانبی منظم و L- لیپ شیتز می‌پردازیم نتایج ما در این فصل نتایج اخیر در مقالاتی مانند مراجع [۱] و [۵] و [۱۲] که پیرامون ساختار مجموعه‌های نقطه ثابت نگاشت‌های L- لیپ شیتز ارائه گردیده است را بهبود می‌بخشد، از طرفی متوجه می‌شویم که مجموعه نقاط ثابت نگاشت‌های L- لیپ شیتز برای هر $L > ۱$ می تواند بسیار بی‌قاعده باشد.

فصل ۱

مفاهیم بنیادی

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱. *توپولوژی وفضای توپولوژیک*
فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{T}$ یک گردایه از زیر مجموعه‌های X باشد، در این صورت $\mathcal{T}$ را یک توپولوژی روی X گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

الف) $\phi \in \mathcal{T}$ و $X \in \mathcal{T}$.

ب) $\mathcal{T}$ تحت اجتماع دلخواه از عناصرش بسته باشد.

ج) $\mathcal{T}$ تحت اشتراک متناهی دلخواه از عناصرش بسته باشد.

زوج $(X, \mathcal{T})$ را فضای توپولوژیک گوییم.

توجه: اعضای $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. *یک فضای توپولوژیک را متریذیر گوییم، هرگاه توپولوژی آن توسط یک متر روی فضای اصلی مشخص گردد.*

کلاس همه مجموعه‌های باز یک فضای متریک (X, d) را با نماد τ_d نمایش داده و داریم:

الف) ϕ و X عضو τ_d می‌باشند.

ب) هر اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است.

ج) هر اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

کلاس τ_d را توپولوژی متریک (توپولوژی حاصل از متر) گوییم.

۲.۱ فضای نرم‌دار

در این بخش مبنای کار را بر این می‌گیریم که تاکنون با فضای برداری و زیر فضای برداری (خطی) آشنا شده‌ایم.

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای خطی و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ یک تابع باشد، در این صورت f را یک نرم گوییم؛ هرگاه در شرایط زیر صدق کند:*

الف) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ب) برای هر $\lambda \in K$ (K میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) و $x \in X$ داشته باشیم: $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$

ج) برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم: $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$

در این صورت زوج (X, f) رایک «فضای نرم‌دار» گوییم.

باید توجه کنیم که اصول فضای برداری فقط بررسی خواص جبری عناصر فضا مانند جمع بردارها، ضرب اسکالر و دیگر ترکیبات آن‌ها است ولی برای مفاهیم توپولوژیکی مانند باز بودن، بسته بودن، همگرایی و کامل بودن ما نیاز به یک اندازه فاصله در یک فضا داریم که برای این منظور از نرم می‌توانیم استفاده کنیم .

توجه : باید توجه کنیم که ما نماد $\|\cdot\|$ را برای نرم به‌کار می‌بریم، در این صورت هر فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای متریک (X, d) با متر القایی $d(x, y) = \|x - y\|$ و یک فضای توپولوژیک با توپولوژی القایی از متر یا نرم فوق می‌باشد که به آن توپولوژی حاصل از نرم گوییم.

همچنین هر فضای برداری (نه الزاما فضای نرم‌دار) یک فضای متریک می‌باشد.

اکنون این سوال پیش می‌آید که آیا هر فضای متریک یک فضای نرم‌دار است؟

مثال ۱.۲.۱. (*مثال‌هایی از فضای نرم‌دار*)

الف) فرض کنیم $X = \mathbb{R}^n$ یک فضای برداری باشد، در این صورت X همراه با نرم‌های زیر یک فضای نرم‌دار است.

۱.

$$\| x \|_{1} = \sum_{i=1}^{n} | x_i |, \quad x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

۲.

$$\| x \|_{p} = \Big(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 < p < \infty$$

۳.

$$\| x \|_{\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |, x = (x_1, \ldots, x_n)\mathbb{R}^n.$$

یادآوری: *$\mathbb{R}^n$ همراه با نرم $\| x \|_p$، $1 \leqslant p < \infty$ را با نماد l_p^n و همراه با نرم $\| x \|_\infty$ با نماد l_∞^n نمایش می‌دهیم.*

ب)

$$X = l_1 = \{x : x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$$

فضای خطی همه‌ی دنباله های به‌طور مطلق همگرا از اسکالرهای حقیقی یا مختلط مجهز به نرم $\| x \|_1$ یک فضای نرم‌دار است.

ج)

$$X = l_p = \{x : x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$$

فضای خطی همه‌ی دنباله‌های p جمع پذیر از اسکالرها مجهز به نرم $\| x \|_p$ یک فضای نرم‌دار است. $\| x \|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \Big)^{\frac{1}{p}}$

د)

$$X = l_\infty = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots), \quad \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \text{کراندار است}\}$$

مجهز به نرم $\| x \|_p$ یک فضای نرم‌دار است. $\| x \|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} | x_i |$

هـ)

$$X = C = \{x : x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots), \quad \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ همگرا است}\}$$

فضای خطی همه دنباله‌های همگرا از اسکالرها مجهز به نرم $\| \cdot \|_\infty$ یک فضای نرم‌دار است.

و)

$$X = C_\circ = \{x : x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots), \quad \text{همگرا به صفر است } \{x_i\}_{i=1}^{\infty}\}$$

همراه با $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای نرم‌دار است.

ز) $X = C_{\circ\circ} = \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_\infty :$ فقط مقدار متناهی جمله‌ی غیر صفر دارد $\{x_i\}\}$ همراه با $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای نرم‌دار است.

توجه:

۱. برای هر $1 \leqslant p < \infty$ داریم: $C_{\circ\circ} \subset l_p \subset C_\circ \subset C \subset l_\infty$

۲. اگر $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ باشد، آن‌گاه $l_p \subset l_q$

ح) $X = L_p[a,b]$ ، $(1 \leqslant p < \infty)$ همراه با نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\| f \|_p = \left(\int_a^b | f(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{۱.۱}$$

ط) $X = L_\infty[a,b]$ $1 \leqslant p < \infty$ همراه با نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\| f \|_\infty = ess \sup | f(t) | < \infty. \tag{۲.۱}$$

تعریف ۲.۲.۱. یک فضای برداری مانند X روی میدان K را فضای برداری توپولوژیک گوییم؛ هرگاه روی X یک توپولوژی مانند $\mathcal{T}$ موجود باشد به‌طوری‌که $X \times X$ و $K \times X$ با توپولوژی حاصل ضرب دارای این خاصیت باشند که توابع جمع بردارها وضرب اسکالر پیوسته باشند.

تعریف ۳.۲.۱. یک توپولوژی خطی روی یک فضای برداری توپولوژیک مانند X را یک توپولوژی محدب موضعی گوییم؛ هرگاه هر همسایگی صفر $(\circ \in X)$ شامل یک همسایگی محدب صفر باشد، در این صورت X را یک فضای توپولوژیک محدب موضعی گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان K باشد، تابع $\prec \cdot, \cdot \succ = X \times X \longrightarrow K$ را یک ضرب داخلی روی X گوییم؛ هرگاه دارای سه خاصیت زیر باشد:

الف) برای هر $x \in X$، $\prec x, x \succ \geqslant \circ$ و $\prec x, x \succ = \circ \Longleftrightarrow x = \circ$.

ب) $\prec x, y \succ = \overline{\prec y, x \succ}$ (نماد بکار رفته مزدوج اعداد مختلط است.)

ج) برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in K$ داریم: $\prec \alpha x + \beta y, z \succ = \alpha \prec x, z \succ + \beta \prec y, z \succ$ در این صورت زوج $(X, < \cdot, \cdot >)$ را «فضای ضرب داخلی» گوییم.

گزاره ۱.۲.۱. *اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد در این صورت تابع $\|\cdot\|: X \longrightarrow R^{\geqslant 0}$ با ضابطه‌ی $\| x \| = \sqrt{\prec x, x \succ}$ $(x \in X)$, یک نرم است.*

گزاره ۲.۲.۱. *اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرار می‌باشد:*

الف) *برای هر $x, y \in X$:* $|\prec x, y \succ|^2 \leqslant \prec x, x \succ \prec y, y \succ$

یا

برای هر $x, y \in X$: $|\prec x, y \succ| \leqslant \| x \| . \| y \|$

ب) *برای هر $x, y \in X$:* $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$

ج) *برای هر $x, y \in X$:*

$$\prec x, y \succ = \frac{1}{4}\{\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 + i \| x + iy \|^2 - i \| x - iy \|^2\}$$

گزاره ۳.۲.۱. *نرم یک فضای خطی نرم‌دار با یک ضرب داخلی معین می‌شود ($\| x \| = \sqrt{\prec x, x \succ}$) اگر و فقط اگر در قاعده متوازی الاضلاع صدق کند.*

توجه: در گزاره‌ی ۲.۲.۱

(الف)را نامساوی کشی شوارتز، (ب) راقاعده متوازی الاضلاع و (ج)را اتحاد قطبی گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. *یک دنباله مانند $\{x_n\}$ رادر فضای نرم‌دار X همگرا به x گوییم هرگاه:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \| x_n - x \| = 0$$

توجه:

الف) اگر $x_n \longrightarrow x$ آن‌گاه $\| x_n \| \longrightarrow \| x \|$ و این نشان می‌دهد که نرم پیوسته است.

ب) اگر $x_n \longrightarrow x$ و $x_n \longrightarrow y$ آن‌گاه $x = y$، و این نشان می‌دهد که حد دنباله در صورت وجود یکتاست زیرا:

$$\| x - y \| \leqslant \| x_n - x \| + \| x_n - y \| \longrightarrow 0$$

در نتیجه $\| x - y \| = 0$ بنابراین $x = y$.

تعریف ۶.۲.۱. *دنباله‌ی $\{x_n\}$ رادر یک فضای نرم‌دار مانند X کشی گوییم هرگاه:*

$$\lim_{m,n \longrightarrow \infty} \| x_m - x_n \| = 0$$

یعنی برای هر $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ یافت شود به‌طوری‌که:
برای هر $m, n \geqslant n_0$ داشته باشیم $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$.

تعریف ۷.۲.۱. *فضای نرم‌دار $(X, \| \cdot \|)$ را کامل گوییم؛ هرگاه هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.*

تعریف ۸.۲.۱. *هر فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت (H) گوییم.*

تعریف ۹.۲.۱. *هر فضای نرم‌دار کامل را فضای باناخ گوییم.*

قضیه ۱.۲.۱. *هر فضای نرم‌دار متناهی البعد یک فضای باناخ می‌باشد.*

قضیه ۲.۲.۱. *در یک فضای باناخ یک زیر مجموعه کامل است اگر و فقط اگر بسته باشد.*

قضیه ۳.۲.۱. *فضای نرم‌دار X یک فضای باناخ است هرگاه هر سری همگرایی مطلق از عناصر X، در X همگرا باشد.*

یادآوری: باید توجه کنیم که هر فضای نرم‌دار بسته است ولی الزاما کامل نیست.

تعریف ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی فضای خطی X باشد در این‌صورت $span(S)$ اشتراک همه‌ی زیر فضاهای خطی شامل S می‌باشد، در واقع $span(S)$ کوچکترین زیر فضای خطی از X می‌باشد که شامل S است.*

توجه: باید توجه کنیم که اگر K یک میدان و $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ یک مجموعه باشد، آن‌گاه :

$$span(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i | \alpha_i \in K, x_i \in S\}$$

تعریف ۱۱.۲.۱. *فرض کنیم C زیرمجموعه از فضای برداری X باشد، C را محدب گوییم؛ هرگاه برای هر $x, y \in C$ و اسکالر λ که $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ داشته باشیم:*

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

طبق تعریف فوق C محدب است اگر و فقط اگر برای هر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq C$ و اسکالرهای $\lambda_i \geqslant 0$ که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ داشته باشیم:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in C$$

تعریف ۱.۲.۱۲. *اگر C یک زیر مجموعه دلخواه از فضای برداری X باشد، آن‌گاه پوسته محدب C را با نماد $co(C)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :*

$$co(C) = \bigcap\{D \subseteq X : C \subseteq D, \text{محدب } D\}$$
$$= \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n : x_i \in C, \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}.$$

در واقع $co(C)$ کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل C می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۱۳. *بستار پوسته محدب مجموعه‌ی C را با نماد $\overline{co(C)}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\overline{co(C)} = \overline{\{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n : x_i \in C, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}}$$

پوسته محدب بسته‌ی مجموعه‌ی C را با نماد $\overline{co}(C)$ نمایش داده به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{co}(C) = \bigcap\{D \subseteq X : C \subseteq D, \text{محدب و بسته است } D\} \tag{۱.۳}$$

تعریف ۱.۲.۱۴. *فرض کنیم D یک مجموعه ناتهی و $\leqslant$ یک رابطه روی D باشد در این صورت زوج مرتب $(D, \leqslant)$ را جهت دار گوییم؛ هر گاه سه شرط زیر برقرار باشد:*

- *$\leqslant$ انعکاسی باشد.*
- *$\leqslant$ ترایایی باشد.*
- *برای هر دو عضو α و β از D، $\gamma \in D$ یافت شود به‌قسمی که γ و $\alpha \leqslant \gamma$ و $\beta \leqslant \gamma$.*

تعریف ۱.۲.۱۵. *یک نت تابعی از مجموعه جهت دار D به‌توی X بوده و ضابطه آن به صورت $x(\alpha) = x_\alpha$ می‌باشد. معمولا یک نت را به صورت $(\{x_\alpha : \alpha \in D\})$ نمایش می‌دهیم.*

۱.۳ فضای انعکاسی

۱.۳.۱ دوگان فضا

تعریف ۱.۳.۱. *فضای همه‌ی تابعک‌های خطی کراندار روی یک فضای نرم‌دار مانند X را دوگان X گوییم و با نماد X^* نمایش می‌دهیم، بدیهی است که $(X^* = B(X, \mathbb{R}))$ یک فضای نرم‌دار با نرم زیر می‌باشد.*

$$\| f \|_* = \sup\{| f(x) | : x \in S_X\}.$$

نتیجه ۱.۳.۱. *$X^* = B(X,\mathbb{R})$ همراه با نرم $\|\cdot\|_*$ یک فضای باناخ می‌باشد.*

تعریف ۲.۳.۱. *فضای نرم‌دار X را انعکاسی گوییم هرگاه $X \cong X^{**}$ یا $(X = X^{**})$*

توجه:

۱. $\mathbb{R}^n$ انعکاسی است (درواقع هر فضای باناخ متناهی البعد انعکاسی است).

۲. l_p و L_p، $(1 < p < \infty)$ فضای باناخ انعکاسی می‌باشند.

۳. هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ انعکاسی است، $(H = H^{**})$

۴. l_1 و l_∞ و L_1 و L_∞ و C و C_0 انعکاسی نیستند.

گزاره ۱.۳.۱. *الف) هر فضای نرم دار انعکاسی یک فضای باناخ است.*

ب) یک زیر مجموعه‌ی بسته یک فضای باناخ انعکاسی، انعکاسی است.

ج) ضرب دکارتی دو فضای انعکاسی، انعکاسی است.

د) دوگان یک فضای باناخ انعکاسی، انعکاسی است.

قضیه ۱.۳.۱. *«قضیه‌ی جیمز[۱]»*
یک فضای باناخ مانند X انعکاسی است، اگر و فقط اگر برای هر $x \in S_X$، $j \in S_{X^*}$ یافت شود به‌قسمی که $j(x) = 1$.

۴.۱ فشردگی

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $C \subseteq X$ گوییم C فشرده است، هرگاه هر پوشش باز C دارای یک زیر پوشش متناهی باشد. به‌طور معادل $C \subseteq X$ را فشرده گوییم، هر گاه هر دنباله در C دارای یک زیر دنباله همگرا به یک حد در C باشد.*

قضیه ۱.۴.۱. *«مازور[۲]»*
فرض کنیم C یک زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی فضای باناخ باشد، در این صورت پوسته محدب و بسته C، $\left(\overline{co}(C)\right)$ فشرده است .

---
[۱] James

[۲] Mazur

گزاره ۱.۴.۱. *$C \subseteq l_p$ فشرده است، هرگاه C کراندار باشد و برای $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ یافت شود به‌قسمی که برای هر $n \geqslant n_0$ و $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in C$ داشته باشیم: $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p$*

گزاره ۲.۴.۱. *هر زیر مجموعه‌ی فشرده یک فضای نرم دار کامل است ولی عکس آن الزاما برقرار نیست.*

گزاره ۳.۴.۱. *هر زیر مجموعه‌ی فشرده یک فضای نرم‌دار کراندار است ولی عکس آن الزاما برقرار نیست.*

گزاره ۴.۴.۱. *هر زیر مجموعه‌ی بسته و کراندار یک فضای نرم دار الزاما فشرده نیست .*

گزاره ۵.۴.۱. *یک فضای نرم دار، متناهی البعد است، اگر وفقط اگر هر زیر مجموعه‌ی بسته و کراندار آن فشرده باشد.*

۵.۱ توپولوژی ضعیف

فرض کنیم X^* دوگان فضای باناخ X باشد، در این صورت همگرایی یک دنباله در فضای باناخ X معمولاً همگرایی در نرم یا همگرایی قوی می‌باشد، یعنی $\{x_n\}$ در X همگرا به x هرگاه $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x\| = 0$ در اصل این همگرایی نسبت به توپولوژی قوی روی X با همسایگی‌های زیر می‌باشد.

$$B_r(0) = \{x \in X : \|x\| < r\}, \quad r > 0$$

اما توپولوژی ضعیف روی X که توسط تابعک‌های خطی کراندار روی X تولید می‌شود، در واقع $G \subset X$ باز نسبت به توپولوژی ضعیف $(w-open)$ یا(ضعیف-باز یا w-باز) است اگر وفقط اگر برای هر $x \in G$، تابعک‌های خطی کراندار $f_1, f_2, \ldots, f_n$ و اعداد حقیقی $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ یافت شوند به‌قسمی که:

$$\{y \in X : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \subset G$$

توجه:

۱. اگر X نامتناهی البعد باشد، توپولوژی ضعیف متر‌پذیر نیست.

۲. تحت توپولوژی ضعیف، فضای نرم‌دار X یک فضای توپولوژیک به‌طور موضعی محدب است.

۳. توپولوژی ضعیف یک فضای نرم‌دار یک توپولوژی هاوسدرف است.

تعریف ۱.۵.۱. *یک دنباله مانند $\{x_n\}$ در X را به‌طور ضعیف همگرا به $x \in X$ گوییم؛ هرگاه برای هر $f \in X^*$ باشیم: $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ در این حالت می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ یا $weak \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$*