

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بسمه تعالی



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی هسته‌ای و فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان :

بررسی اثر امیدانس دیواره و خود میدانها بر روی ناپایداری
میزر سیکلوترونی

استاد راهنما :

دکتر بهروز مراغه چی

نگارش :

الناز خلیل زاده

این مجموعه را تقدیم می‌کنم

به پدر و مادر عزیزم
به پاس تعبیر عظیم و انسانیشان از کلمه ایثار و از
خودگذشتگی

و

به همسرم

به پاس محبت بی دریغش



سپاس خدای مهربان را که بدون یاریش هیچم

و

از زحمات بی وقفه و راهنماییهای ارزشمند استاد گرانقدر جناب آقای دکتر بهروز
مراغه‌چی تقدیر و تشکر می‌نمایم. همچنین از آقای امیر چخماچی به خاطر
کمکها و تلاشهای بی دریغشان در طول این پروژه نهایت قدردانی را دارم.

چکیده

در این پایان نامه اثر امپدانس دیواره و خودمیدانها به طور همزمان بر روی ناپایداری میزر سیکلوترون برای یک پرتو لایه ای الکترونی بررسی شده است. محاسبات در چارچوب معادلات ماکسول-ولاسوف خطی شده انجام یافته و ضخامت پرتو بسیار کوچکتر از شعاع متوسط آن می باشد. رابطه پاشندگی برای اختلالات الکترومغناطیسی با تقارن سمتی بدست آمده است. نشان داده می شود که وجود خودمیدانها باعث ایجاد نوسانات شعاعی با فرکانس بتاترونی می شود و نرخ رشد ناپایداری در اثر امپدانس دیواره و خودمیدانها کاهش می یابد و با وجود خودمیدانها افزایش ناچیز امپدانس سبب افزایش محدوده ناپایداری می شود.

فهرست

صفحه	عنوان
۱.....	مقدمه و تاریخچه.....
	فصل اول
۷.....	مدل فیزیکی و ترسیم تعادلی مساله.....
۸.....	۱-۱ ثابتهای حرکت ذره.....
۱۹.....	۲-۱ بدست آوردن خودمیدانها و ترسیم تعادلی مساله.....
	فصل دوم
۲۵.....	بدست آوردن رابطه پاشندگی.....
۲۶.....	۲-۱ معادلات ماکسول و لاسوف برای اختلالات با تقارن سمتی.....
۳۶.....	۲-۲ روش مشخصه ای.....
۳۸.....	۲-۲-۱ مسیر الکترون در میدانهای تعادلی.....
۴۴.....	۲-۳ بدست آوردن رابطه پاشندگی.....
	فصل سوم
۵۴.....	رابطه پاشندگی برای محدوده چگالیهای کم.....
۵۶.....	۳-۱ بدست آوردن رابطه پاشندگی برای محدوده چگالیهای کم.....
۶۲.....	۳-۲ بررسی رابطه پاشندگی.....

فصل چهارم

حل عددی رابطه پاشندگی و نتایج بدست آمده.....	۶۴
حل عددی مساله	۶۵
نتایج بدست آمده از حل عددی	۷۰
نتیجه گیری	۷۳
پیشنهادات	۷۵
مراجع	۷۷

تاریخچه و مقدمه

برای دسترسی به مطالب بیشتر به مراجع ۱ تا ۶ رجوع کنید.

تقریباً از سالهای ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ تا کنون استفاده از الکترونهای پرانرژی برای تولید و تقویت میکروموجها همواره مورد توجه بوده است. و مکانیزم ها و دستگاههای مختلفی نیز پیشنهاد شده و به کار گرفته شده است. دستگاه های اولیه برای این کار شامل مگنترون^۱ و کلایسترون^۲ و لوله های موجبر^۳ بوده است که در طی جنگ جهانی دوم نیز استفاده شده اند.

با انجام تحقیقات بر روی مکانیزمهای جدید بر پایه اثرات نسبیتی در سال ۱۹۵۸ توئیس^۴ و اشنایدر^۵ و گاپانوف^۶ تئوری را به نام الکترون-سیکلوترون-میزر^۷ ارائه دادند که بر اساس آن می توانستند از خاصیت گسیل القائی الکترون های چرخنده نسبیتی استفاده کرده و موج تند همدوس تولید کنند. (موج تند به موجی گفته می شود که سرعت فزایش بزرگتر از سرعت نور باشد.) در واقع از میدان مغناطیسی برای چرخاندن الکترون استفاده می شد. این تئوری در سال ۱۹۵۹ توسط پانتل^۸ به صورت تجربی مورد آزمایش قرار گرفت و نتیجه بخش بود.

در واقع به منظور تقویت موج آن را به عنوان عامل اختلالی وارد سیستم مورد بحث می کنند که باعث ایجاد ناپایداری در آن می شود که این ناپایداری به عنوان ناپایداری میزر سیکلوترونی نامیده می شود. در واقع ناپایداری میزر سیکلوترون در یک پلاسمایی که در حضور میدان مغناطیسی $B_0 \hat{e}_z$ می باشد یک نوع ناپایداری موج الکترومغناطیسی است که در اثر وارونی جمعیت در اندازه حرکت عرضی که در تعریف تابع توزیع لحاظ شده به وجود می آید.

^۱ - Magnetron

^۲ - Klystron

^۳ - Traveling Wave Tube

^۴ - Twiss

^۵ - Schneider

^۶ - Gaponov

^۷ - Electron-Cyclotron-Maser

^۸ - Pentell

(منظور از اندازه حرکت عرضی آن مولفه‌ای از اندازه حرکت که عمود بر راستای انتشار پرتو الکترونی می‌باشد است) یا به عبارت دیگر تابع توزیع مورد استفاده برای ذرات شامل یک وارونی جمعیت^۱ در مولفه عمودی تکانه می‌باشد که این خود باعث انتقال انرژی از ذره به موج شده و ناپایداری مورد بحث را تقویت می‌کند. بهترین وسیله برای لحاظ کردن این وارونی جمعیت استفاده از تابع دلتای دیراک می‌باشد. لازم به توضیح است که وارونی جمعیت در اندازه حرکت عرضی در این مساله بدین معناست که برای تمامی الکترون‌ها یک مقدار مساوی اندازه حرکت عرضی در نظر بگیریم که همان طور که گفته شد تابع دلتای دیراک به بهترین صورت می‌تواند برآورده کننده این منظور باشد. در سالهای اخیر این مساله از جوانب گوناگون با توجه به شکل هندسی مساله و نوع تابع توزیع مورد استفاده مورد بررسی قرار گرفته است.

از مکانیزم‌های دیگر برای تولید امواج می‌توان به لیزر الکترون آزاد^۲ اشاره کرد که شامل فرایند گسیل خودبخودی از یک لیزر الکترون آزاد است که بر پایه حرکت یک پرتو الکترونی نسبتی از میان یک میدان مغناطیسی عرضی توضیح داده می‌شود.

همین طور از وسیله دیگری به نام لیزر کانال یونی^۳ برای تولید تابش استفاده می‌شود که در آن یک پرتو نسبتی الکترونی در داخل یک پلاسمای تحت چگال تزریق می‌شود با این کار جبهه پرتو الکترونیهای پلاسمای کنار رفته و تنها یک کانال یونی باقی می‌ماند. تمرکز یون باعث می‌شود پرتو الکترونی حول محور نوسان کرده و نقشی شبیه نقش میدان مغناطیسی در میز سیکلوترونی را ایفا کند.

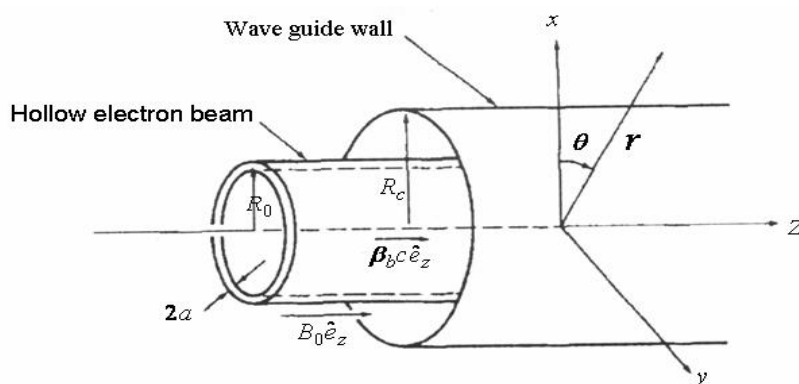
¹ - Inversion Population

² - Free Electron Laser

³ - Ion Channel Laser

در این پایان نامه سعی خواهیم کرد ناپایداری میزر سیکلوترون را از دیدگاه نظریه جنبشی برای یک پرتو حلقوی الکترونی با وجود خودمیدانها و امپدانس دیواره بررسی کنیم.

برای این کار یک پرتو الکترونی غیرخشی نسبتی را در نظر می گیریم که به صورت موازی با یک میدان مغناطیسی $B_0 \hat{e}_z$ جهتندی شده است و تا بینهایت ادامه دارد. میدان مغناطیسی به کار گرفته شده برای الکترونها محدودیت شعاعی ایجاد می کند. شعاع متوسط پرتو الکترون R_0 می باشد و ضخامت شعاعی پرتو $2a$ می باشد که در داخل یک موجبر به شعاع R_c قرار دارد. همان طور که در شکل (۱) مشخص است از مختصات استوانه ای برای حل مساله بهره گرفته ایم.



شکل (۱) ترسیم تعادلی مساله

در این مساله فرضیات اساسی زیر را داریم:

۱- تمامی کمیات تعادلی مستقل از Z و q می باشند به عبارتی تقارن سمتی و محوری دارند.

$$(\partial/\partial q = 0, \partial/\partial z = 0)$$

۲- ضخامت شعاعی پرتو الکترون خیلی کمتر از شعاع پرتو می باشد.

$$a \ll R_0 \quad (1-1)$$

۳- خود میدان‌های تعادلی در مساله وارد شده‌اند. می‌دانیم زمانی نمی‌توان از اثرات خودمیدان‌ها صرف‌نظر کرد که چگالی و یا جریان الکترونی زیاد باشد در این مساله وجود خودمیدان‌ها به دلیل چگالی بوده ولی محدوده چگالی کم در نظر گرفته شده است ولی باز به حدی است که نمی‌توان خودمیدانها را کنار گذاشت. عامل چگالی ν در نظر گرفته شده و فرض می‌شود که

$$\frac{\nu}{g_0} < 1 \quad (1-2)$$

که $\nu = N_e e^2 / mc^2$ به عنوان پارامتر بادکر نامیده می‌شود که (e^2 / mc^2) در واقع شعاع کلاسیکی الکترون است که در آن c سرعت نور در خلا و $m, -e$ به ترتیب جرم و بار الکترون می‌باشند

و $N_e = 2p \int_0^{R_0} dr r n_e^0(r)$ تعداد الکترونها در واحد طول می‌باشد و در واقع شرط (۱-۲) به جهاتی به

رقیق بودن پرتو الکترونی و در واقع کم رنگ بودن نقش خودمیدانها اشاره دارد و یا به بیانی دیگر با وارد کردن این شرط حد چگالی مورد استفاده در مساله را وارد کرده‌ایم.

۴- همان طور که گفته شد خود میدانهای تعادلی در مساله بررسی می‌شوند که شامل خود میدان

الکتریکی $E_r(r)\hat{e}_r$ و خود میدان مغناطیسی $B_q(r)\hat{e}_q$ می‌باشند. از خود میدان مغناطیسی محوری در مقایسه با میدان مغناطیسی محوری مساله صرف‌نظر می‌شود.

۵- هر چند امروزه بسیاری از آزمایشات در این زمینه در درون موجبری که دارای قدرت بالای

رسانندگی است انجام می‌شود ولی به هر حال بررسی مساله برای حالتی که دیواره موجبر دارای میزان

مقاومت کمی باشد لازم به نظر می‌رسد. بنابراین سعی شده است با وارد کردن امپدانس موج بر روی

دیواره موجبری که هادی کامل نمی‌باشد به این مساله رسیدگی شود.

۶- بحث حاضر در چارچوب معادلات ماکسول و لاسوف خطی صورت گرفته است.

۷- تمامی کمیات اختلاالی دارای تقارن سمتی می‌باشند.

با در نظر گرفتن فرضهایی که گفته شد در فصل اول مدل فیزیکی مساله را بررسی کرده و سعی

کرده ایم یک ترسیم تعادلی از مساله را ارائه دهیم که این کار با معرفی تابع توزیع و چگالی صورت

گرفته است.

در فصل دوم با استفاده از معادلات ماکسول- لاسوف خطی و همچنین معرفی کمیاتی مانند امپدانس

و ادمیتنس موج رابطه پاشندگی را بدست آورده ایم.

در فصل سوم رابطه پاشندگی برای محدوده چگالی های کم محاسبه شده است.

در فصل چهارم حل عددی رابطه پاشندگی را ارائه داده و نتایج بدست آمده را بیان کرده ایم.

فصل اول

مدل فیزیکی و ترسیم تعادلی مساله

برای دسترسی به مطالب بیشتر به مراجع ۷ تا ۱۳ رجوع کنید.

آنچه که در این فصل بیان می شود بدین صورت است که ابتدا سعی می کنیم برای معرفی و توصیف تابع توزیع تعادلی ذرات ثابتهای حرکت ذره را در میدانهای تعادلی بدست آوریم با استفاده از فرضهای اساسی مساله در روابط (۱-۱) و (۱-۲) و اینکه ذرات دارای سرعتهای عرضی کمتر از سرعت نور می باشند به ساده کردن ثابتهای حرکت پرداخته ایم سپس چگالی تعادلی ذرات را بدست آورده ایم در ادامه با استفاده از معادله پواسن و معادلات ماکسول خودمیدانها را محاسبه کرده و توصیف تعادلی سیستم را تکمیل کرده ایم.

۱-۱ ثابتهای حرکت ذره

برای بدست آوردن ثابتهای حرکت ذره از معادله لاگرانژی استفاده می کنیم.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

از طرفی می دانیم لاگرانژین ذره شامل پتانسیلهای برداری و نرده ای به صورت زیر است:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} - (e/c) \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(r) + e \int_0^r A_z(r) dr$$

$$\mathbf{A}(r) = A_z(r) \hat{e}_z + A_q(r) \hat{e}_q$$

که مولفه محوری پتانسیل برداری در رابطه بالا مربوط به خودمیدان مغناطیسی سمتی بوده و مولفه سمتی مربوط به میدان مغناطیسی محوری اعمال شده در مساله است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{B}(r) = \nabla \times \mathbf{A}(r)$$

$$B_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_q(r)) \longrightarrow A_q(r) = \frac{1}{2} r B_0$$

در ادامه از روابط زیر استفاده کرده و معادلات دلخواه را بدست می آوریم

$$P_i = \partial L / \partial \dot{\phi}_i$$

$$\dot{\phi}_i = \partial L / \partial q_i$$

$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i \partial L / \partial \dot{\phi}_i - L \quad i = 1, 2, 3 = r, q, z$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - (\dot{r}^2 + r^2 \dot{q}^2 + \dot{z}^2)/c^2} - (e/c)(r\dot{q}A_q + \dot{z}A_z) + ej_0(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \longrightarrow P_q = const$$

$$P_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = rp_q - (e/c)rA_q(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \longrightarrow P_z = const$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = p_z - (e/c)A_0(r)$$

$$H = \sqrt{m^2 c^2 + c^2 p^2} - ej_0(r)$$

در روابط بالا سرعت ذره به صورت زیر تعریف شده است.

$$\mathbf{r} \dot{v} = v_r \hat{e}_r + v_q \hat{e}_q + v_z \hat{e}_z = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{q} \hat{e}_q + \dot{z} \hat{e}_z$$

و همین طور:

L لاگرانژین و H هامیلتونین و q مختصات تعمیم یافته که شامل r, q, z می باشد و P_i

مولفه اندازه حرکت کانونیکی و P_i مولفه اندازه حرکت مکانیکی می باشد.

همچنین در روابط بالا $j_0(r)$ پتانسیل تعادلی مربوط به خود میدان الکتریکی است و $A_0(r)$ مولفه

محوری پتانسیل برداری می باشد همانطور که قبلا نیز گفتیم از مولفه سمتی پتانسیل برداری مربوط به

خودمیدان مغناطیسی محوری صرفنظر کرده ایم.

پس بنابراین ذره دارای سه ثابت حرکت به فرم زیر می باشد.

$$H = \sqrt{m^2 c^2 + c^2 p^2} - ej_0(r) \quad (1-3)$$

$$P_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = rp_q - (e/c)rA_q(r) \quad (4-1)$$

$$P_z = p_z - (e/c)A_0(r) \quad (5-1)$$

می دانیم در نظریه جنبشی هر تابع توزیعی که تنها تابعی از ثابتهای حرکت تک ذره باشد می تواند در معادله ولاسوف حالت پایدار صدق کند در بحث حاضر ما از تابع توزیعی به فرم زیر بهره می گیریم.

$$f_b^0(x, p) = \frac{R_0 a \hat{n}_0 W_{ro}}{2} d(P_q - P_0) d(H - \hat{g} mc^2) d(P_z - \hat{P}_0) \quad (6-1)$$

در رابطه بالا R_0 شعاع تعادلی و \hat{n}_0 چگالی الکترون در شعاع تعادلی می باشد و W_{ro} فرکانس شعاعی بتاترون که بعدا به تفسیر بیان می شود. \hat{g}, P_0, \hat{P}_0 کمیات ثابتی هستند که در ادامه تعریف می شوند. در توصیف تعادلی معادله (۶-۱) می توان گفت که همه الکترونها دارای یک میزان انرژی ($\hat{g} mc^2$) و تکانه سمتی کانونیکی (P_0) و تکانه محوری کانونیکی (\hat{P}_0) می باشند. به بیان دیگر ما فرض کرده ایم که هیچگونه پهن شدگی در انرژی و اندازه حرکت نداریم.

اندازه حرکت سمتی کانونیکی (P_0) را اندازه P_q در $r = R_0$ در نظر می گیریم در این صورت چنین داریم:

$$\begin{aligned} P_q &= r p_q - \frac{e B_0 r^2}{2c} \xrightarrow{r=R_0} P_0 = R_0 p_q - \frac{e B_0 R_0^2}{2c} \\ p_q &= g m v_q = g m r \hat{q} \xrightarrow{r=R_0} p_q = g_0 m R_0 w_e \\ P_0 &= g_0 m R_0^2 w_e - \frac{e B_0 R_0^2}{2c} = g_0 m R_0^2 w_e - \frac{1}{2} m \hat{w}_c R_0^2 \end{aligned} \quad (1-7)$$

در رابطه بالا $\hat{w}_c = \frac{e B_0}{mc}$ فرکانس سیکلوترونی غیر نسبیتی می باشد و w_e فرکانس چرخشی پرتو الکترونی در $r = R_0$ می باشد. و g_0 فاکتور جرم نسبیتی در $r = R_0$ تعریف می شود که به صورت زیر نوشته می شود:

$$g_0 = \sqrt{1 + (p / mc)^2} \rightarrow g_0 mc = \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$$

در رابطه بالا اندازه p^2 برابر مقدار آن در $r = R_0$ می باشد که چنین است:

$$\begin{aligned}
 p_r &= g_0 m \hat{r} = 0 \\
 p_q &= g_0 m R_0 w_e \\
 p_z &= \hat{P}_0 + \frac{e}{c} A_0(R_0) \\
 g_0 m c &= (m^2 c^2 + g_0^2 m^2 R_0^2 w_e^2 + \hat{P}_0^2)^{1/2} \quad (1-8)
 \end{aligned}$$

با استفاده از تعریف P_0 در معادله (۱-۷) p_q را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 g_0 m R_0^2 w_e - \frac{1}{2} m \hat{w}_c R_0^2 &= r p_q - \frac{1}{2} m \hat{w}_c r \\
 p_q &= \frac{1}{2} m \hat{w}_c \frac{R_0^2}{r} + g_0 m w_e \frac{R_0^2}{r} + \frac{1}{2} m \hat{w}_c r \\
 p_q &= \frac{1}{2} m \hat{w}_c \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right) + g_0 m w_e \frac{R_0^2}{r}
 \end{aligned}$$

با تعریف فاصله شعاعی از شعاع تعادلی که به صورت زیر است

$$r = r - R_0$$

و همین طور با استفاده از تقریب نازک بودن بیم در معادله (۱-۱) تکانه سمتی را می توان به صورت

زیر ساده نمود:

$$p_q = m \hat{w}_c r + g_0 m R_0 w_e \quad (1-9)$$

در ادامه فرض می کنیم که سرعت عرضی اساسا خیلی کوچک تر از سرعت نور باشد و یا به عبارتی اگر

$$b_{\perp} = v_{\perp} / c \quad \text{باشد داریم:}$$

$$b_{\perp}^2 \ll 1 \quad (1-10)$$

در چارچوب معادلات (۱-۱) و (۱-۲) و (۱-۱۰) می توان هامیلتونی در معادله (۱-۳) را ساده تر نمود:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{m^2 c^2 + c^2 p^2} - e j_0(r) \\ &= c(m^2 c^2 + p_r^2 + p_q^2 + p_z^2)^{1/2} - e j_0(r) \\ &= c(1 + \frac{p_r^2 + p_q^2}{m^2 c^2 + p_z^2})^{1/2} (m^2 c^2 + p_z^2)^{1/2} - e j_0(r) \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۱-۱۰) جمله بالا را حول b_{\perp}^2 بسط تیلور می دهیم در این صورت چنین داریم:

$$\begin{aligned} H &= mc^2 (1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2} (1 + \frac{p_r^2 + p_q^2}{m^2 c^2 + p_z^2})^{1/2} - e j_0(r) \\ &= mc^2 (1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2} (1 + \frac{1}{2} \frac{p_r^2 + p_q^2}{m^2 c^2 + p_z^2}) + \dots - e j_0(r) \end{aligned}$$

به علت کوچکی b_{\perp}^2 از جملات بعدی بسط صرف نظر می کنیم:

$$\begin{aligned} H &= mc^2 (1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2} (1 + \frac{1}{2} \frac{p_r^2 + p_q^2}{m^2 c^2 + p_z^2}) - e j_0(r) \\ &= mc^2 (1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{p_r^2 + p_q^2}{m(1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2}} - e j_0(r) \end{aligned}$$

در ادامه با در نظر گرفتن معادله (۱-۱۰) چنین داریم:

$$\begin{aligned} g &= (1 + \frac{p^2}{m^2 c^2})^{1/2} = (1 + \frac{p_r^2 + p_q^2 + p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2} \\ &\cong (1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 (1 + \frac{p_z^2}{m^2 c^2})^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(1-5)} g = \left(1 + \frac{(\hat{P}_0 + \frac{e}{c} A_0)^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}}$$

$$a \ll R_o \rightarrow A_0^2(r) \cong 0$$

$$\begin{aligned} g &= \left(1 + \frac{(\hat{P}_0^2 + \frac{2e}{c} A_0 \hat{P}_0)}{m^2 c^2}\right)^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \left(1 + \frac{\hat{P}_0^2}{m^2 c^2} + \frac{2e}{m^2 c^3} A_0 \hat{P}_0\right)^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{mc} (m^2 c^2 + \hat{P}_0^2 + \frac{2e}{c} A_0 \hat{P}_0)^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{mc} \left(1 + \frac{\frac{2e}{c} A_0 \hat{P}_0}{m^2 c^2 + \hat{P}_0^2}\right)^{1/2} (m^2 c^2 + \hat{P}_0^2)^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

با شرط نازک بودن پرتو الکترونها با توجه به معادله (۱-۱) می توانیم بگوییم:

$$A_0(r) \ll 1$$

در این صورت می توانیم رابطه قبل را حول $A_0(r)$ بسط دهیم. و با توجه به کوچکی آن تنها جمله

درجه اول را نگه می داریم:

$$\begin{aligned} g &= \left(1 + \frac{e}{c} \frac{A_0 \hat{P}_0}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{\hat{P}_0^2}{m^2 c^2}\right)}\right) \left(1 + \frac{\hat{P}_0^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2} + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}} \\ &= \left(1 + \frac{\hat{P}_0^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2} + \left(\frac{e}{c} \frac{A_0 \hat{P}_0}{m^2 c^2 \left(1 + \frac{\hat{P}_0^2}{m^2 c^2}\right)}\right) + \frac{p_r^2 + p_q^2}{2m^2 c^2 \left(1 + \frac{P_z^2}{m^2 c^2}\right)^{1/2}} \quad (1-11) \end{aligned}$$