بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

مباحثی در حد مستقیم از یک سیستم مستقیم از ابرساختارهای جبری

مؤلف:

الهام عرب

استاد راهنما:

دکتر سید شاهین موسوی میرکلایی

استاد مشاور:

دکتر حسین مؤمنایی

بهمن ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: الهام عرب	امضاء:
استاد راهنما: دکتر سید شاهین موسوی میرکلایی	امضاء:
استاد مشاور: دکتر حسین مؤمنایی	امضاء:
داور اول: دکتر سید ناصر حسینی	امضاء:
داور دوم: دکتر نصرت الله شجره پور صلواتی	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر آزیتا تاج‌الدینی	امضاء:

تقدیم به:

پدر و مادرم،

به پاس یک عمر اخلاص، فداکاری و محبتشان...

تشکر و قدردانی

منت خدای را عزّ وجلّ که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیاتست و چون برآید مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت است و بر هر نعمت شکری واجب.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم اجلّ از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی‌که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ وجلّ:

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده اند؛

از استاد گرانقدر و فرهیخته، جناب آقای دکتر موسوی که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر مؤمنایی که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند؛ و از اساتید گرامی، جناب آقای دکتر حسینی و جناب آقای دکتر شجره پورصلواتی که وقت ارزشمند خود را در جهت داوری این پروژه قرار دادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

چکیده

این پایان‌نامه به مباحثی در ابرساختارهای جبری پرداخته است. یک ابزار مهم در نظریه‌ی ابرساختارهای جبری، رابطه‌ی بنیادی است، که ما را به سمت رده‌ای از جبرهای جامع سوق می‌دهد. دراین پایان‌نامه، ساختار حد مستقیم از یک سیستم مستقیم از ابرساختارهای جبری و بعضی ویژگی‌های پایه‌ی این ساختارها معرفی می‌شود. هم‌چنین جبر بنیادی از حد مستقیم ابرساختارهای جبری، حد مستقیم از جبرهای بنیادی از ابرساختارهای جبری ارایه شده است.

کلمات کلیدی : ابرساختارهای جبری، حد مستقیم، سیستم مستقیم، یکسانی، جبربنیادی.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۳۴ مارتی [1] [۱۲] در هشتمین کنفرانس ریاضی‌دانان اسکاندیناوی با ارایه‌ی مقاله‌ای، تعمیمی بر مفهوم گروه‌ها را بیان نمود و نظریه‌ی ابرساختارها را بنا کرد.

اگرچه مارتی در سن جوانی در طول جنگ جهانی دوم درگذشت و نتوانست بیش از دو یا سه مقاله در این زمینه ارایه دهد، اما بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف ریاضی در این زمینه کار کردند. بعدها کونتزمن [2] و کراسنر [3] در فرانسه و گریفیتس [4]، وال [5]، درشر [6] و اوره [7] در ایالات متحده و اوتومی [8] در ژاپن و دیتزمن [9] در روسیه، در این زمینه تحقیقاتی به عمل آورده و این نظریه را تعمیم داده و قضایای مختلفی را در این زمینه بیان نمودند.

ابرگروه‌ها و نیم‌ابرگروه‌ها که از مفاهیم معرفی شده در دهه‌های اخیر می‌باشند، کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف علمی از قبیل جبر، هندسه، نظریه‌ی‌گراف، نظریه‌ی اتوماتا، نظریه‌ی‌کدگذاری، هوش‌مصنوعی، فیزیک و ... دارند [۱۱، ۲].

در حال حاضر محققانی در سراسر دنیا همچون کرسینی [10] ، لئورانو [۲] [11] و ... در زمینه‌هایی نظیر هندسه، گراف، ابرگراف، نظریه‌ی اتوماتا، نظریه‌ی کدگذاری، هوش‌مصنوعی ، رده‌بندی کردن ابرگروه‌ها و نیم‌ابرگروه‌ها مشغول به تحقیق می‌باشند [۵، ۴، ۳].

در مجموع، ابرساختارهای جبری یک تعمیم مناسب از ساختارهای جبری کلاسیک هستند. در یک ساختار جبری کلاسیک، ترکیب دو عضو یک عضو است اما، در یک ابرساختار جبری، ترکیب دو عضو یک مجموعه است. همچون [۲۰]، ابرساختارهای‌جبری را که تعمیم جبرهای جامع‌اند به‌عنوان سیستم‌های رابطه‌ای در نظر می‌گیریم. از این‌که یک مجموعه‌ی داده شده از یکسانی‌ها باید(در یک حالت قوی یا ضعیف) روی ابرساختارهای جبری صادق باشند، رده‌هایی خاص از ابرساختارهای جبری را خواهیم داشت(نظیر نیم‌ابرگروه‌ها، ابرگروه‌ها یا ابرحلقه‌ها).

---

[1] Marty
[2] Kuntzmann
[3] Krasner
[4] Grifiths
[5] Wall
[6] Dresher
[7] Ore
[8] Utumi
[9] Dietzman
[10] Corsini
[11] Leoreanu

[۸] و [۹] ساختار حد مستقیم را برای سیستم‌های مستقیم از بعضی (نیم)ابرگروه‌های خاص فراهم می‌کند.

ساختار حد مستقیم(از یک سیستم مستقیم) از نیم ابرگروه‌های استفاده شده در [۸] و [۹] به همان شکل در [۱۹] نیز می‌باشد.

این پایان‌نامه یک تعمیم از نتایج معرفی شده در ([۷]. بخش ۲۱) ودر [۱۹] است. در این پایان‌نامه درصدد تعمیم نتایج معرفی شده به‌وسیله‌ی گراتزر [۱۲] [۷] برای حدهای مستقیم از سیستم‌های مستقیم از ابرساختارهای جبری هستیم و نتایجی جدید را با بعضی موارد خاص از ابرساختارهای جبری توصیف شده با استفاده از یکسانی‌ها ارایه خواهیم نمود. نتایج به‌دست آمده در این پایان‌نامه، از نتایجی که قبل از این برای نیم ابرگروه‌ها یا ابرگروه‌ها موجود بوده‌اند، قوی‌تر هستند. بر این باور هستیم که، این پایان‌نامه برای اثبات نتایج موجود یک راه ساده‌تر عرضه می‌کند. نتایج اصلی این پایان‌نامه در فصل‌های ۲ و ۳ می‌باشند. در فصل ۲ ساختار حد مستقیم را برای یک سیستم مستقیم از ابرساختارهای جبری معرفی خواهیم کرد. اگر هر سیستم مستقیم از ابرساختارهای جبری را به‌عنوان یک تابعگون همورد در نظر بگیریم، آنگاه ساختار موجود، حد مستقیمی از این تابعگون است [۱۸، ۱۳]. قابل ذکر است که بیشتر اصطلاحات به‌کار برده شده در این پایان‌نامه از مرجع [۱۸] می‌باشد.

اولین ویژگی مهم از حد مستقیم از یک سیستم مستقیم از ابرساختارهای جبری در حکم (۸.۲.۲) ثابت شده است، این حکم این‌گونه بیان می‌شود: حد مستقیم از یک سیستم مستقیم از ابرساختارهای جبری با حد مستقیم از هر سیستم مستقیم دارای یک حامل هم‌پایان با حامل سیستم داده شده، یکریخت است. در فصل ۴ می‌توان تعدادی از نتایج معرفی شده در [۱۰، ۹، ۸] و [۱۹] را با استفاده از این حکم به‌دست آورد. هم‌چنین برای رده‌ای از ابرساختارهای جبری که تحت یکریختی بسته هستند ثابت می‌کنیم که بسته بودن تحت حد مستقیم از سیستم‌های مستقیم با حامل خوش‌ترتیب، با بسته بودن تحت حد مستقیم از سیستم‌های مستقیم دلخواه معادل است. در [۲۱]و [۲۲]، یک ابزار مهم در نظریه‌ی

[۱۲] Grätzer

ابرساختار، رابطه‌ی بنیادی از یک ابرساختارجبری است. از [۱۴] داریم که از خارج قسمت یک ابرساختار جبری با استفاده از رابطه‌ی بنیادی یک جبر بنیادی به‌دست می‌آید. هدف دیگر از این پایان‌نامه اثبات این موضوع است که جبر بنیادی از یک حد مستقیم از یک سیستم مستقیم از ابرساختارهای‌جبری، حد مستقیمی از جبرهای بنیادی آن‌ها است.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مطالبی در جبرهای جامع

فرض کنید A یک مجموعه و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. یک عمل n- تایی روی مجموعه‌ی A، یک نگاشت f از A^n به A است که، n درجه‌ی f نامیده می‌شود و با $degf$ نشان می‌دهیم. بنابراین یک عمل n- تایی به هر n- تایی $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ از اعضای A یک عضو از A تخصیص می‌دهد، که با $f(a_0, \ldots, a_{n-1})$ مشخص می‌شود. لذا $f(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_0$ به این معنا است که $f : (a_0, \ldots, a_{n-1}) \mapsto a_0$ یک تابع می‌باشد. هم‌چنین می‌توان گفت یک عمل n- تایی، یک عضو از $A^{(A^n)}$ (مجموعه‌ی تمام توابع از A^n به A)است.

تعریف می‌کنیم $A^0 = \{\emptyset\}$. یک عمل صفرتایی نگاشتی به‌صورت $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ است، بنابراین می‌توان یک عمل صفرتایی را به‌عنوان یک عمل یک‌تایی (یکانی) ثابت، در نظر گرفت که در آن متغیر حذف شده است. چون ضابطه‌ی آن به متغیر وابسته نیست، لذا $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ که $\emptyset \mapsto a$ را می‌توان به‌صورت تابع ثابت $f : A \longrightarrow A$ که $x \mapsto a$ در نظر گرفت. البته توجه داشته باشید که نمی‌توان عمل یک‌تایی f را با عمل صفرتایی g که از f (با حذف متغیر) به‌دست آمده است، یکسان در نظر گرفت (زیرا نمی‌توان عمل صفرتایی را با عمل یکانی یکی گرفت).

تعریف ۱.۱.۱. *یک نوع-جبر، مجموعه‌ی τ از نمادهای تابع است به‌طوری‌که به هر عضو $\mathbf{f} \in \tau$ یک عدد صحیح غیرمنفی نسبت داده می‌شود. $\mathbf{f}$، نماد تابع n- تایی نامیده می‌شود، هرگاه عدد صحیح غیرمنفی متناظر با آن، n باشد. مجموعه‌ی نمادهای تابعی n- تایی با τ_n نشان داده می‌شوند.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید τ یک نوع-جبر باشد. یک جبر $\mathfrak{A}$ از نوع τ زوج مرتب $\langle A; F\rangle$ می‌باشد که در آن A یک مجموعه‌ی غیرتهی است و F خانواده‌ای از عمل‌های متناهی روی A است که به‌وسیله‌ی نوع τ اندیس گذاری شده است به‌طوری‌که متناظر با هر نماد تابعی n- تایی $\mathbf{f}$ در τ، یک عمل n- تایی $f_{\mathfrak{A}}(f)$ روی A وجود دارد. A مجموعه‌ی زمینه‌ی $\mathfrak{A}$ و $f_{\mathfrak{A}}$ ها عمل‌های $\mathfrak{A}$ نامیده می‌شوند.*

اگر F متناهی باشد، قرار می‌دهیم $\tau = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k\}$ واغلب می‌نویسیم $\langle A; f_1, \ldots, f_k\rangle$ که در آن $deg f_1 \geq \cdots \geq deg f_k$.

مثال ۳.۱.۱. *یک نیم‌گروه $\langle A; .\rangle$، یک جبر از نوع $\langle 2\rangle$ است که در شرط زیر صدق می‌کند:*

$$(a.b).c = a.(b.c).$$

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنید $\mathfrak{A} = \langle A; F\rangle$ یک جبر از نوع τ باشد. به ازای هر $a \in A$ نمادهای a را به τ_0 اضافه نموده و نوع جدید به‌دست آمده را τ_A می‌نامیم. یعنی عضوهای A را به‌عنوان نمادهای تابعی با درجه‌ی صفر در نظر می‌گیریم. $\mathfrak{A}_A$ یک جبر از نوع τ_A می‌باشد که $\mathfrak{A}$ به‌طور دقیق با عمل صفرتایی متناظر با هر عضو A است.*

تعریف ۵.۱.۱. *فرض کنید X یک مجموعه از اشیا باشد. عضوهای آن‌را متغیر می‌نامیم. فرض کنید τ یک نوع-جبر باشد، آنگاه مجموعه‌ی $T(X)$ از عبارت‌های از نوع τ روی X کوچکترین مجموعه‌ای است که شرایط زیر برای آن برقرار باشد:*

۱. $X \cup \tau_0 \subseteq T(X)$

۲. *اگر* $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ *و* $\mathbf{f} \in \tau_n$*، آنگاه* $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$.

برای یک نماد تابعی دوتایی '.' به‌طور معمول $p_1.p_2$ را به‌جای (p_1, p_2). به‌کار می‌بریم. برای $p \in T(X)$، اغلب p را به‌صورت $p(x_1, \ldots, x_n)$ می‌نویسیم تا مشخص کنیم که متغیرهای ظاهر در p، $(x_1, \ldots, x_n)$ هستند.

عبارت p، n- تایی است، هرگاه تعداد متغیرهایی که به‌طور صریح در p ظاهر می‌گردد کمتر یا مساوی n باشد. در واقع اعضای τ_0 را می‌توان یک عبارت n- تایی برای هر n در نظر گرفت. از این‌رو می‌توان هر عبارت m- تایی را به‌صورت یک عبارت n- تایی که $n \geq m$ است دید. برای وضوح بیشتر، $f(x) = a + bx$ را می‌توان به‌عنوان عضوی از $R[x, y, z]$ در نظر گرفت، زیرا هر عبارت یک‌تایی را می‌توان به‌صورت یک عبارت n- تایی برای هر n دید. یعنی $f(x)$ را می‌توان به صورت $f(x) = a + bx + 0y + 0z$ در نظر گرفت.

مثال ۶.۱.۱. *قرار دهید $X = \{x\}$ و $\tau = \{+, \cdot, -\} \cup \mathbb{R}$ که $+$، $\cdot$، و $-$ نمادهای تابعی با درجه‌ای برابر با ۲ و $\mathbb{R}$ نمادهای تابعی با درجه‌ای برابر با صفر است. در این‌صورت x و هر عدد حقیقی عبارت هستند. هم‌چنین شکل کلی یک عبارت از نوع τ روی X به‌صورت $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ است که $a_i \in \mathbb{R}$.*

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد، چندجمله‌ای‌های n- تایی نگاشت‌هایی خاص از A^n به A هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:*

۱. *تصویرهای e_i^n برای $0 \leq i < n$ چندجمله‌اهای n- تایی هستند؛*

۲. *اگر $p_0, \ldots, p_{n_\gamma - 1}$ چندجمله‌ای‌های n- تایی باشند، آنگاه $f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})$ نیز چندجمله‌ای‌های n- تایی هستند که $f_\gamma(p_0, \ldots, p_{n_\gamma-1})(x_0, \ldots, x_{n-1})$ برابر است با $f_\gamma(p_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, p_{n_\gamma-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}))$؛*

۳. *هر چندجمله‌ای n- تایی فقط و فقط با تعداد مراحل متناهی از ۱ و۲ به‌دست می‌آید.*

مثال ۸.۱.۱. *فرض کنید $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ مشبکه باشد. عبارت‌های*

$$e_0^1(x_0) = x_0 \quad \text{و} \quad (e_0^1 \vee e_0^1)(x_0) = e_0^1(x_0) \vee e_0^1(x_0) = x_0$$

مثال‌هایی از چندجمله‌ای‌های یکانی می‌باشند. هم‌چنین

$$e_0^2(x_o, x_1) = x_0 \quad \text{و} \quad (e_1^2 \vee e_0^2)(x_0, x_1) = x_1 \vee x_0$$

مثال‌هایی از چندجمله‌ای‌های دوتایی هستند.

قرارداد: برای هر n هر عمل صفرتایی یک چندجمله‌ای n- تایی است. علاوه بر این در موردی که هیچ e_i^n ای وجود ندارد، $n = o$ نیز جایز است. درنتیجه چندجمله‌ای صفرتایی وجود دارد اگر و فقط اگر حداقل یک عمل صفرتایی وجود داشته باشد. توجه کنید که اگر $n = 0$، در این صورت i ای که $0 \leq i \leq n - 1$ وجود ندارد. به این دلیل که برای هر n،

اعمال صفرتایی چندجمله‌ای n- تایی هستند، لذا e_i^n یک چندجمله‌ای صفرتایی است. پس اعمال صفرتایی، چندجمله‌ای صفرتایی می‌باشند. بنابراین در صورت وجود فقط یک عمل صفرتایی می‌توان چندجمله‌ای صفرتایی داشت.

مثال ۹.۱.۱. *فرض کنید $\langle R; +, ., 0, 1\rangle$ یک حلقه باشد، هر چندجمله‌ای یکانی P به شکل زیر است:*

$$P(x_o) = n_0 + n_1x_0 + \cdots + n_{m-1}x_0^{m-1} \tag{۱.۱}$$

که n_i ها اعضایی به شکل $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ بار}}$ یا صفر می‌باشند. بنابر آن‌چه که قبل از این گفته شد، عمل صفرتایی یک ($1:\{\emptyset\}\longrightarrow\mathbb{R}$ که $\emptyset\mapsto 1$) را می‌توان به‌صورت عمل یک‌تایی ($1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ که $x_0\mapsto 1$) در نظر گرفت. درنتیجه برای هر n و m در $\mathbb{N}$ تابع‌های $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ بار}}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ که $x_0\mapsto \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ بار}}=n$ و $\underbrace{e_0^1\dots e_0^1}_{m \text{ بار}}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ که $x_0\mapsto x_0^m$ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به قسمت دو از تعریف (۷.۱.۱)، عبارت $(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ بار}}).(\underbrace{e_0^1\dots e_0^1}_{m \text{ بار}})(x_0)=nx_0^m$، یک چندجمله‌ای یک‌تایی می‌باشد. در نتیجه چندجمله‌ای (۱.۱) برای $m=0,1,2,\cdots,m-1$ و $n=n_0,n_1,\cdots,n_{m-1}$ ساخته می‌شود.

مثال ۱۰.۱.۱. *فرض کنید $\langle G; .\rangle$ یک نیم‌گروه باشد، آنگاه همه‌ی چندجمله‌ای‌های یکانی به شکل x_0^n هستند. زیرا $e_o^1: G\longrightarrow G$، لذا برای $x_o\in G$ داریم $e_0^1(x_0)=x_0$. با استفاده از قسمت دو از تعریف (۷.۱.۱)، نتیجه می‌گیریم*

$$(e_0^1.e_0^1)(x_0)=e_0^1(x_0).e_0^1(x_0)=x_0.x_0=x_0^2$$

یک چند جمله‌ای یکانی است. با توجه به این‌که فقط یک عمل داریم، چندجمله‌ای یکانی به شکل x_0^n ساخته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. *فرض کنید $\mathfrak{A}=\langle A;F\rangle$ یک جبر باشد. مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های*

n- تایی روی $\mathfrak{A}$ را با $p^{(n)}(\mathfrak{A})$ نشان داده و جبر حاصل $\mathfrak{B}^{(n)}(\mathfrak{A}) = \langle p^{(n)}(\mathfrak{A}); F\rangle$ را جبر چندجمله‌ای‌های n- تایی روی $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. *نمادهای چندجمله‌ای n- تایی از نوع τ به‌صورت زیر قابل تعریف می‌باشند:*

۱. *$\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}$ نمادهای چندجمله‌ای n- تایی هستند؛*

۲. *برای نمادهای چندجمله‌ای n- تایی $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1}$ و برای عدد ترتیبی $\gamma < o(\tau)$، $\mathbf{f}_\gamma(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n_\gamma-1})$ یک نماد چندجمله‌ای n- تایی است؛*

۳. *هر نماد چندجمله‌ای n- تایی فقط و فقط با تعداد مراحل متناهی از ۱و۲ به‌دست می‌آید.*

ملاحظه ۱۳.۱.۱. *تعریف بالا همان تعریف عبارت است فقط در این‌جا،*

$$X = \{\mathbf{X}_0, \ldots, \mathbf{X}_{n-1}\}.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. *یک رابطه‌ی n- تایی r روی A یک زیرمجموعه از A^n است. n نوع r نامیده می‌شود.*

اگر r یک رابطه‌ی n- تایی روی A باشد و $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$، گوییم $a_0, \ldots, a_{n-1}$ r- رابطه‌ای هستند، هرگاه $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in r$. به طور اختصار

$$r(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in r.$$

فرض کنید $\tau = (n_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}$ یک دنباله روی $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ باشد، که $o(\tau)$ یک عدد ترتیبی است. هم‌چنین برای هر $\gamma < o(\tau)$، فرض کنید $\mathbf{f}_\gamma$ یک نماد از یک عمل (ابرعمل) n_γ- تایی باشد. در واقع $\mathbf{f}_\gamma$، نقش نماد تابعی را دارد، یعنی درجه‌ی عمل (ابرعمل) f_γ را مشخص می‌کند. جبر عبارت n- تایی (از نوع τ) $\mathfrak{B}^{(n)}(\tau) = \langle \mathbf{p}^{(n)}(\tau); (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}\rangle$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A یک مجموعه و $P^*(A)$ مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های غیرتهی از A بوده و $\mathfrak{A} = \langle A; (f_\gamma)_{\gamma<o(\tau)}\rangle$ یک ابرساختارجبری باشد، که در آن برای هر $\gamma < o(\tau)$،

$f_\gamma : A^{n_\gamma} \to P^*(A)$ یک ابرعمل از درجه‌ی n_γ است که مطابق با نماد $\mathbf{f}_\gamma$ می‌باشد. اگر بین ابرعمل‌های f_γ برای $\gamma < o(\tau)$، ابرعمل صفرتایی وجود نداشته باشد، می‌پذیریم که مجموعه‌ی زمینه‌ی A از ابرساختارجبری $\mathfrak{A}$ تهی است. هم‌چنین واضح است که هر جبرجامع یک ابرساختارجبری است.

بعضی ابرساختارهای‌جبری خاص در مثال‌های زیر معرفی شده‌اند:

مثال ۱.۱.۱۵. *یک ابرساختارجبری با یک ابرعمل دوتایی را ابرگروه‌وار می‌نامیم. ابرگروه‌وار شرکت پذیر را نیم‌ابرگروه می‌نامیم.*

مثال ۱.۱.۱۶. *فرض کنید H یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. نیم ابرگروه $\langle H; \circ\rangle$ که در شرط*

$$\forall a \in H : \qquad a \circ H = H \circ a = H$$

صدق کند، ابرگروه نامیده می‌شود. می‌دانیم که نیم‌گروه غیرتهی $\langle G; .\rangle$ یک گروه است اگر و فقط اگر برای هر $a, b \in G$، معادلات $ax = b$ و $ya = b$ در G قابل حل باشند. یا به‌طور معادل تساوی‌های زیر

$$\forall a \in G,\ a \cdot G = G \cdot a = G$$

برقرار باشد. بنابراین می‌توان گفت که تعریف ابرگروه تعمیم ظریفی از گروه می‌باشد.

جبرجامع $\mathfrak{B}^*(A)$ روی $P^*(A)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۷]:

برای هر $\gamma < o(\tau)$ وبرای هر $A_0, \dots A_{n_{\gamma-1}} \in P^*(A)$، داریم:

$$f_\gamma(A_0, \dots, A_{n_{\gamma-1}}) = \bigcup\{f_\gamma(a_0 \dots a_{n_{\gamma-1}}) \mid a_i \in A_i, i \in \{0, \dots, n_\gamma - 1\}\}.$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $\mathfrak{B}^{(n)}(\mathfrak{B}^*(A))$ جبر توابع عبارت‌های n- تایی روی $\mathfrak{B}^*(A)$ باشد [۷].

یادآوری می‌کنیم به ازای هر رابطه‌ی هم‌ارزی ρ روی A، می‌توان یک ابرساختارجبری روی A/ρ به‌وسیله‌ی تعریف ابرعمل در ابرساختارجبری خارج‌قسمتی $\mathfrak{A}/\rho$ به‌دست آورد. به‌عنوان

مثال در [۶] برای هر $\gamma < o(\tau)$، زیرمجموعه‌ی غیرتهی $f_\gamma(\rho\langle a_0\rangle, \ldots, \rho\langle a_{n_\gamma-1}\rangle)$ از A/ρ به‌صورت زیر

$$\{\rho\langle b\rangle | b \in f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}), a_i \ \rho \ b_i, i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\}$$

تعریف می‌گردد، که در آن $\rho\langle x\rangle$ رده‌ی x به پیمانه‌ی ρ می‌باشد.

در واقع می‌توان به این‌صورت بیان کرد که اگر $\mathfrak{A} = \langle A; F\rangle$ که $F = \{f_\gamma | \gamma < o(\tau)\}$ و $f_\gamma : A^{n_\gamma} \longrightarrow p^*(A)$ و $\mathfrak{A}/\rho = \langle A/\rho; F\rangle$ که $f_\gamma : (A/\rho)^{n_\gamma} \longrightarrow p^*(A/\rho)$، آنگاه

$$f_\gamma(\rho\langle a_0\rangle, \ldots, \rho\langle a_{n_\gamma-1}\rangle) = \rho\langle f_\gamma(a_0), \ldots, f_\gamma(a_{n_\gamma-1})\rangle.$$

با فرض $b_i \ \rho \ a_i$ $(0 \leq i \leq n_\gamma - 1)$، به‌دست می‌آوریم

$$\rho\langle f_\gamma(a_0), \ldots, f_\gamma(a_{n_\gamma-1})\rangle = \rho\langle f_\gamma(b_0), \ldots, f_\gamma(b_{n_\gamma-1})\rangle.$$

بنابراین $f_\gamma(\rho\langle a_0\rangle, \ldots, \rho\langle a_{n_\gamma-1}\rangle)$ برابر است با

$$\{\rho\langle b\rangle | b \in f_\gamma(b_0, \ldots, b_{n_\gamma-1}), b_i \ \rho \ a_i, i \in \{0, \ldots, n_\gamma - 1\}\}.$$

رابطه‌ی بنیادی تعریف شده روی ابرساختارجبری $\mathfrak{A}$ کوچکترین رابطه‌ی هم‌ارزی A است، که ابرساختارجبری خارج‌قسمتی حاصل از آن یک جبرجامع باشد. رابطه‌ی بنیادی از $\mathfrak{A}$ بستار تعدی α^* از رابطه‌ی α ی داده شده روی A به‌صورت زیر است:

برای هر $x, y \in A$، $x\alpha y$ اگر و فقط اگر $n \in \mathbb{N}$، $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in A^n$ و $\mathbf{p} \in \mathbf{p}^{(n)}(\tau)$ موجود باشند، به‌طوری‌که

$$x, y \in p(a_0, \cdots, a_{n-1}) \tag{۲.۱}$$

که در آن $p \in p^{(n)}(\mathfrak{B}^*(\mathfrak{A}))$ تابع عبارت القا شده به‌وسیله‌ی $\mathbf{p}$ روی $\mathfrak{B}^*(\mathfrak{A})$ است [۱۵، ۱۴].

مثال ۱.۱.۱۷. *رابطه‌ی بنیادی از یک نیم‌ابرگروه $\langle H; \circ\rangle$ بستار تعدی از رابطه‌ی β است که در آن $\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \beta_n$ است و برای هر $x, y \in H$، β_n به صورت زیر تعریف می‌شود:*