دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی

استاد راهنما
دکتر حجت احسنی طهرانی
استاد مشاور
دکتر علی مس‌فروش
دانشجو
بهاره حسین‌نیای حسن‌کیاده

۱۳۹۳

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است.

به استوارترین تکیه گاهان، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

همسرم که نشانه ی لطف الهی در زندگیم است.

خواهرانم که همراهان همیشگی و صفایشان مایه آرامش من است.

که هر آنچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هر چه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما.

بوسه بر دستان پر مهرتان

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند، شمارندگان شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان حق او گزاردن نتوانند.

سپاسگزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه.

استاد مهربانم، جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت.

پدر و مادری که تار مویی از آن‌ها به پای من سیاه نماند.

همسرم که در تمام طول تحصیل با قلبی آکنده از عشق و معرفت، همراه و همگام من بوده‌است.

سرکار خانم ندا طهماسبی و برادر مهربانم، نوید رضایی به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی‌چشم داشتشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند.

بهاره حسین نیای حسن کیاده
۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب بهاره حسین‌نیای حسن‌کیاده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی ، تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

بهاره حسین‌نیای حسن‌کیاده
۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، یافتن ماتریس پسخورد حالت را برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی شرح می‌دهیم. مسئله ثابت نگه داشتن یک بخش از طیف ماتریس حلقه باز سیستم خطی با کنترل پسخورد حالت و خارج کردن باقیمانده طیف را مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی می‌نامند. اصل این مسئله برای سیستم‌هایی به کار می‌رود که به طور کامل پایدار نیستند و تعدادی از مقادیر ویژه طیف حلقه باز، که تنها همین مقادیر نیاز به تخصیص دوباره دارند، در ناحیه پایداری قرار ندارند. از آن‌جایی که این مسئله در نظریه کنترل و بهینه سازی از اهمیت بالایی برخوردار است، روش‌های گوناگونی برای حل آن ارائه شده‌است که در ابتدای این پایانامه برخی از آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به اختصار روش به کار برده شده در این پایانامه به گونه‌ای است که با استفاده از بردارهای ویژه سمت چپ وابسته به مقادیر ویژه ناپایدار ، مسئله را به یک مسئله تخصیص مقدار ویژه تبدیل می‌کنیم و با کاربرد تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کنترل خطی، ماتریس پسخورد حالتی را محاسبه می‌کنیم که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد.

از آن‌جایی که مینیمم‌سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت در بهینه سازی سیستم کنترل خطی، دارای اهمیت فراوانی است، با استفاده از روش پیشنهادی و گراف انتقال حالت، ماتریس پس خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که دارای کم‌ترین نورم است. در ادامه نیز روشی نو برای یافتن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیر خطی ارائه می‌دهیم. در انتهای هر بحث، برای شرح بیش‌تر مثال عددی نیز آورده شده‌است.

کلمات کلیدی: پایداری، تخصیص مقادیر ویژه جزئی، ماتریس پسخورد حالت، تبدیلات تشابهی، گراف انتقال حالت، مینیمم نورم.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. حسین‌نیای حسن‌کیاده. ب و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، "محاسبه ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی در مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی"، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، ص ۱۰۷-۱۰۴، سمنان.

۲. حسین‌نیای حسن‌کیاده. ب و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، "تخصیص مقادیر ویژه جزئی پارامتری غیر خطی"، پنجمین همایش آنالیز عددی و کاربردهای آن،ص ۳۱-۲۸، دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان.

۳. حسین‌نیای حسن‌کیاده. ب و احسنی طهرانی. ح، (۱۳۹۳)، "تخصیص مقادیر ویژه جزئی در سیستم‌های کنترل خطی با استفاده از ماتریس پسخورد حالت"، پنجمین همایش آنالیز عددی و کاربردهای آن،ص ۲۷-۲۴، دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان.

۴. شجایی مقدم ممرآبادی. زری و حسین‌نیا حسن‌کیاده. ب، (۱۳۹۳)، "کنترل همزمان سیستم‌های تاخیری گسسته زمانی به وسیله الگوریتم ژنتیک با ماتریس پسخورد حالت " ، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران،ص ۲۸، سمنان.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی[۱]، یکی از مسائل اساسی در نظریه کنترل و بهینه سازی می‌باشد که از دیرباز مورد توجه نویسندگان و محققان بوده است. این مسئله برای دستگاه‌های کنترل خطی به‌کار می‌رود که نزدیک به پایداری هستند. به‌عبارت دیگر دستگاه‌هایی که طیف ماتریس حلقه باز به‌طور کامل در ناحیه پایداری قرار ندارد و لازم است که برای پایدارسازی دستگاه بخشی از طیف ماتریس حلقه باز آن را تغییر داد.

بسیاری از برنامه‌های عملی مانند، سازه‌های بزرگ و پراکنده، شبکه‌های برق، خطوط نیرو، شبکه‌های کامپیوتری، ... باعث ایجاد ماتریس‌های بزرگ و اسپارس و مشکلات فراوانی می‌شود که روش‌های عددی مرسوم برای تخصیص مقدار ویژه، به خوبی عمل نمی‌کنند.

در بسیاری از این مسائل کاربردی، تنها تعداد اندکی از مقادیر ویژه که مسئول بی‌ثباتی می‌باشند، نیاز به تغییر دارند. بدیهی است که تخصیص کامل مقادیر ویژه در مورد زمانی که فقط تعداد اندکی از مقادیر ویژه نامطلوب هستند، مناسب نیست. در چنین مواقعی، مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی برای دستگاه کنترل خطی به میان می‌آید. در چند دهه اخیر روش‌های مختلفی برای حل این مسئله پیشنهاد شده‌است. یک روش پیشنهادی برای حل این مسئله استفاده از الگوریتم آرنولدی است که توسط سعد[۲] و داتا [۳] [۸] ارایه شده‌است و به حل معادله سیلوستر[۴] دستگاه کنترل خطی با استفاده از الگوریتم آرنولدی می‌پردازد، سپس مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را توسط جواب این معادله حل می‌نماید. سعد [۲۲] نیز با استفاده از تجزیه شور جزئی برای ماتریس A^T و کاربرد مسئله معکوس مقدار ویژه، به حل این مسئله پرداخت. د. کالواتی[۵] و ب. لوییز [۶] [۲] از روش فرایند آرنولدی به‌طور ضمنی دوباره آغاز شده برای حل این مسئله استفاده نمودند. این روش، پایه‌ای روی همان روش

[۱] Partial eigenvalue assignment problem

[۲] Yousef Saad

[۳] B. N.Datta

[۴] Silvester equation

[۵] D.Calvetti

[۶] B.Lewis

آرنولدی است که داتا و سعد آن را به‌کار بردند، با این تفاوت که در فرایند آرنولدی به‌طور ضمنی دوباره آغاز شده بعد از اجرای $2m$ مرحله چنانچه m مقدار ویژه به‌دست آمده ماتریس دارای قسمت حقیقی مثبت باشند، فرایند از $l = min\{k, m\}$ (k تعداد مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس A) دوباره با تعریف بردار آغازین انجام می‌شود. گرچه این روش کاراتر از روش آرنولدی است اما محاسبات آن بسیار طولانی است. محمد.ا.رمضان [۷] و اهاب ا.ال-سعید [۸] [۲۰] الگوریتمی را ارایه دادند که در آن با تعریف $f^T = \beta Y_1^H A$ (Y_1^H ماتریس بردار ویژه‌های چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$) و محاسبه پارامتر β، بردار پس خورد حالت را می‌توان به‌صورتی به‌دست آورد که مقادیر ویژه موردنظر را به دستگاه اختصاص می‌دهد، در ادامه نیز نشان دادند که بردار پس خورد حالت حقیقی است.

در این پایان‌نامه نیز روشی جدید برای به‌دست آوردن ماتریس پسخورد حالت حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی شرح می‌دهیم.

- در ادامه فصل یک، تعاریف مقدماتی مورد نیاز را شرح می‌دهیم.

- در فصل دوم، مسئله تخصیص مقادیر ویژه، مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی و یکتایی جواب را در هر دو مسئله، به‌طور کامل در دستگاه های کنترل خطی مورد بررسی قرار داده‌ایم و برخی روش‌های موجود برای حل این مسئله با مثال ارایه شده‌است.

- در فصل سوم، با استفاده از مقادیر ویژه مثبت ماتریس حلقه باز دستگاه و بردارهای ویژه سمت چپ متناظر با مقادیر ویژه مثبت، ماتریس حلقه باز دستگاه را به ماتریس‌هایی با ابعاد کوچک‌تر تجزیه کرده و سپس توسط ماتریس‌های جدید ماتریس افزوده‌ای تشکیل داده، با استفاده از عملیات تشابهی ماتریس افزوده را به‌فرم استاندارد اشلون و سپس به‌فرم همدم برداری تبدیل می کنیم. با استفاده از این مفاهیم، ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که مقادیر ویژه دلخواه را به دستگاه اختصاص دهد. در ادامه نیز مثال و نمودار پایداری را برای شرح روش می‌آوریم.

- در فصل چهارم، مینیمم‌سازی نورم ماتریس پس‌خورد حالت را بررسی می‌کنیم. بدین منظور، ابتدا به پارامتری‌سازی ماتریس پس‌خورد حالت می‌پردازیم، زیرا پارامتری‌سازی در بهینه‌سازی ماتریس پس‌خورد حالت مؤثر است. بنابراین در این فصل ابتدا با استفاده از روش شرح داده شده در فصل سوم و گراف انتقال حالت، ماتریس پس خورد حالت پارامتری را که مقادیر ویژه مورد نظر را به دستگاه اختصاص دهد، به‌دست می‌آوریم. سپس ماتریس پس‌خورد حالتی را به‌دست می‌آوریم که نورم کمینه داشته باشد.

- در فصل پنجم، ماتریس پسخورد پارامتری غیر خطی را با روش جدید به‌دست می‌آوریم. در انتهای فصل نیز با مثال عددی این روش را تشریح می‌کنیم.

---

[۷] Mohamed.A.Ramadan

[۸] EhabA. El - Sayed

۲.۱ تعاریف مقدماتی

۱.۲.۱ بردار

برای توضیحات بیشتر این مبحث به [۱۸] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ای منظم از اعداد را بردار نامند و این اعداد عناصر بردار نامیده می‌شوند. بردار v با داشتن n عنصر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$v = \begin{bmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{۱.۱}$$

بردار v بالا به صورت $v = (v_۱, v_۲, \dots, v_n)^T$ نیز نوشته می‌شود.

بردار اشاره شده به صورت (۱.۱)، بردار ستونی و ترانهاده آن، بردار سطری نامیده می‌شود. مجموعه همه بردارهای حقیقی با بعد n را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهند. ترانهاده بردار v را با v^T و ترانهاده - مزدوج مختلط v را با v^H نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. ضرب داخلی دو بردار u و v، ضرب اسکالر نامیده می‌شود:

$$\langle u, v\rangle = \bar{u}_۱ v_۱ + \bar{u}_۲ v_۲ + \cdots + \bar{u}_n v_n$$

تعریف ۳.۲.۱. طول بردار v با $\|v\|$ نشان داده می‌شود و برابر $\sqrt{v^H v}$ است.

$$\|v\| = \sqrt{|v_۱|^۲ + |v_۲|^۲ + \cdots + |v_n|^۲}$$

۲.۲.۱ ماتریس

تعریف ۴.۲.۱. A مجموعه‌ای از mn عنصر مرتبط در یک آرایه مستطیلی، متشکل از m سطر و n ستون است که یک ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

که به صورت $A = (a_{ij})_{m\times n}$، ($i = ۱, ۲, \dots, m$، $j = ۱, ۲, \dots, n$) نیز نشان داده می‌شود. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$، با عناصر طبیعی، با $\mathbb{R}^{m\times n}$ و مجموعه همه ماتریس‌ها، با عناصر مختلط، با $\mathbb{C}^{m\times n}$ نشان داده می‌شوند.

ماتریس A با تعداد سطر و ستون برابر، ماتریس مربعی نامیده می‌شود. ماتریس مربعی که تمام عناصر روی قطر اصلی آن یک و سایر عناصر آن صفر باشد را ماتریس واحد می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

جمع دو ماتریس $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ یک ماتریس است که در آن:
$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

اگر c یک اسکالر باشد، سپس cA یک ماتریس است:
$$cA=(ca_{ij})$$

ترانهاده ماتریس ، $A_{m\times n}$ یک ماتریس $n\times m$ است و با A^T نشان داده می‌شود.
$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
ترانهاده مزدوج ماتریس A، ماتریس $A^H=(\bar{A})^T$ است که در آن $\bar{A}$، ماتریس تشکیل شده از ماتریس A است که عناصر آن، مزدوج مختلط شده‌اند. ماتریس مربعی A متقارن است، اگر $A=A^T$ باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A ماتریس مربعی $m\times n$ و B ماتریس $n\times p$ باشد. سپس ضرب AB، یک ماتریس $m\times p$ است که به صورت زیر به‌دست می‌آید:
$$AB=(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) \quad ; \quad i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,p$$

اگر b یک بردار ستونی باشد، Ab یک بردار ستونی است.

تعریف ۶.۲.۱. [۱۸]نورم ماتریس[۹]، نگاشت $\|.\|: R^{m\times n}\longrightarrow R$ است به‌طوری‌که:

۱. $\| A \|\geq 0$، به ازای $A\in R^{m\times n}$ و $\| A \|=0$ اگروفقط اگر $A=0$ ،

۲. $\| \alpha A \|=|\alpha| \| A \|$ به ازای $\alpha\in R$ و $A\in R^{m\times n}$ (خاصیت همگنی)،

۳. $\| A+B \|\leq\| A \| + \| B \|$ به ازای $A,B\in R^{m\times n}$ (نامساوی مثلثی) .

۴. $\| A.B \|\leq\| A \| . \| B \|$

تعریف ۷.۲.۱. نورم
$$\| A \|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|^2}=tr(AA^H), \tag{۲.۱}$$
که یک نورم ماتریسی است، نورم فروبینیوس[۱۰] (یا نورم اقلیدسی[۱۱] در C^{n^2}) نامیده می‌شود[۱۸].

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنید $\|.\|$ یک نورم برداری باشد، تابع
$$\| A \|=\sup_{x\neq 0}\frac{\| Ax \|}{\| x \|}, \tag{۳.۱}$$

[۹] Matrix norm

[۱۰] Frobenius norm

[۱۱] Euclidean norm

یک نورم ماتریسی است که نورم ماتریسی القایی [۱۲] (نورم ماتریسی طبیعی [۱۳]) نامیده می‌شود [۱۸].

برهان. ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که (۳.۱) هم ارز

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|,$$

است. در واقع، برای هر $x \neq 0$ بردار واحد $u = \frac{x}{\|x\|}$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که (۳.۱) به‌صورت

$$\| A \| = \sup_{\|u\|=1} \| Au \| = \| Aw \|, \quad \| w \| = 1. \tag{۴.۱}$$

باشد. حال نشان می‌دهیم (۳.۱) (یا به‌طور معادل (۴.۱)) یک نورم است. با استفاده از تعریف ۶.۲.۱ داریم:

۱. اگر $\| Ax \| \geq 0$ ، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| \geq 0$. به‌علاوه

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = 0 \Longleftrightarrow \| Ax \| = 0, \quad x \neq 0$$

و $Ax = 0$ برای $x \neq 0$ اگروتنهااگر $A = 0$؛ بنابراین $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

۲. اسکالر α را در نظر می‌گیریم، پس

$$\| \alpha A \| = \sup_{\|x\|=1} \| \alpha Ax \| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = |\alpha| \| A \| .$$

۳. سرانجام، خاصیت نامساوی مثلثی برقرار است. زیرا، با استفاده از تعریف سوپریمم، اگر $x \neq 0$ آن‌گاه

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leq \| A \| \Longrightarrow \| Ax \| \leq \| A \| \| x \|,$$

بنابراین، با فرض x با نورم یک، به‌دست می‌آوریم:

$$\| (A+B)x \| \leq \| Ax \| + \| Bx \| \leq \| A \| + \| B \|,$$

در نتیجه

$$\| A+B \| = \sup_{\|x\|=1} \| (A+B)x \| \leq \| A \| + \| B \| .$$

□

تعریف ۹.۲.۱. نورم یک [۱۴] و نورم بینهایت [۱۵] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\| A \|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} | a_{ij} |, \quad \| A \|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | . \tag{۵.۱}$$

[۱۲] Induced matrix norm

[۱۳] Natural matrix norm

[۱۴] 1-norm

[۱۵] Infity norm

و به‌ترتیب نورم مجموع ستونی [۱۶] و نورم مجموع سطری [۱۷] نیز نامیده می‌شوند.
به‌علاوه داریم: $\| A \|_{1} = \| A^T \|_{\infty}$ و اگر A خودمزدوج یا متقارن حقیقی باشد $\| A \|_{1} = \| A \|_{\infty}$.

تعریف ۱۰.۲.۱. برای هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، اسکالر منحصربه‌فردی را به عنوان دترمینان می‌توان نسبت داد که به صورت $\det(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \qquad (۶.۱)$$

که در آن A_{ij}، ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام از ماتریس $A_{n\times n}$ به‌دست می‌آید.

خواص دترمینان عبارت است از:

۱. با تعویض جای دو سطر یا ستون در ماتریس A، تنها علامت دترمینان ماتریس A تغییر می‌کند.

۲. $\det(A) = \det(A)^T$.

۳. اگر یک سطر یا ستون ماتریس در اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.

۴. برای دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم: $|AB| = |A|.|B|$.

۵. اگر یک ماتریس دو سطر یا ستون یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

۶. اگر تمامی درایه‌های ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، در اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس نیز در k^n ضرب خواهد شد: $|kA| = k^n|A|$.

۷. دترمینان ماتریس مثلثی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطری آن می‌باشد.

۳.۲.۱ فضای برداری

تعاریف و قضایای این فصل از [۱۸] و [۴] گرفته شده‌است.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک فضای برداری مانند V، بر روی میدان F، مجموعه‌ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب، شرایط زیر را برآورده می‌سازند:

۱. $\forall u, v \in V \Longrightarrow u+v \in V$.

۲. $\forall u \in V, \forall \alpha \in F \Longrightarrow \alpha u \in V$.

۳. $\forall u, v \in V \Longrightarrow u+v = v+u$.

[۱۶] Column sum norm

[۱۷] Row sum norm

۴. $\forall u, v, w \in V \Longrightarrow u + (v + w) = (u + v) + w$.

۵. $\forall u \in V, \exists \circ \in V \Longrightarrow u + \circ = \circ + u = u$.

۶. $\forall u \in V, \exists -u \in V \Longrightarrow u + (-u) = (-u) + u = \circ$.

۷. $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in F \Longrightarrow (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

۸. $\forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in F \Longrightarrow \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

۹. $\forall u \in V, \forall ۱ \in F \Longrightarrow ۱u = u$.

تعریف ۱۲.۲.۱. اگر V یک فضای برداری بر روی میدان F و S یک زیرمجموعه غیر تهی از V باشد، S را یک زیرفضا از V می‌نامند، هرگاه:

۱. $\forall s, t \in S \longrightarrow s + t \in S$.

۲. $\forall s \in S, \forall \alpha \in F \longrightarrow \alpha s \in S$.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم V فضای برداری و S یک زیرمجموعه نامتناهی از V باشد. بردار $\nu \in V$ را ترکیب خطی از اعضای V گوییم اگر تعداد متناهی از بردارهای S مانند $u_۱, \dots, u_n$ و اسکالرهای $a_۱, \dots, a_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که:

$$\nu = a_۱u_۱ + a_۲u_۲ + \dots + a_nu_n.$$

قضیه ۱۴.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای برداری V روی میدان F باشد، آن‌گاه مجموعه تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای V است.

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید S زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V باشد. زیرفضای شامل تمام ترکیبات خطی از اعضای S زیرفضای تولید شده توسط S نامیده می‌شود.

تعریف ۱۶.۲.۱. زیرمجموعه S از فضای V را در نظر بگیرید. برای اسکالرهای c_i، $(i = \circ, ۱, \dots, n)$، اگر معادله به شکل

$$\forall u_۱, u_۲, \cdots, u_n \in S \quad , \quad c_۱u_۱ + c_۲u_۲ + \cdots + c_nu_n = \circ$$

فقط به شرط این‌که $c_۱ = c_۲ = \dots = c_n = \circ$ برقرار باشد، آنگاه بردارهای $u_۱, u_۲, \dots, u_n$ را مستقل خطی نامند.

در غیراین‌صورت بردارهای $u_۱, u_۲, \dots, u_n$ را وابسته خطی گویند.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه S را پایه V گوییم هرگاه S یک زیرمجموعه مستقل خطی باشد که V را تولید می‌کند.

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد تعداد بردارهای پایه V را بعد فضای V نامیده و با $\dim V$ نشان می‌دهند.

رتبه، برد و فضای پوچ ماتریس

تعریف ۱۹.۲.۱. رتبه ماتریس A برابر با ماکزیمم تعداد ستون‌های یا سطرهای مستقل خطی در آن ماتریس است که با $\mathrm{rank}(A)$ نشان داده می‌شود.

$$A_{n\times n} \quad \text{غیر منفرد} \quad \longrightarrow |A| \neq ۰ \longrightarrow \mathrm{rank}(A) = n \quad (\text{رتبه کامل})$$

$$A_{m\times n} \to \begin{cases} \mathrm{rank}(A) = \min(m,n) \longrightarrow (\text{رتبه کامل}) \\ \mathrm{rank}(A) < \min(m,n) \longrightarrow (\text{نقص رتبه}) \end{cases}$$

نکته ۲۰.۲.۱. رتبه یک ماتریس معادل با بعد فضای گسترده آن ماتریس است.

$$\dim[\mathrm{R}(A)] = \mathrm{rank}(A)$$

تعریف ۲۱.۲.۱. فضای پوچ ماتریس $A_{m\times n}$، نگاشت خطی به صورت زیر است:

$$\mathrm{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = ۰\}$$

نکته ۲۲.۲.۱. فضای پوچ، مجموعه تمامی پاسخ‌های غیر صفر معادله همگن $Ax = ۰$ است و اگر تنها جواب معادله $Ax = ۰$، همان جواب بدیهی صفر باشد، رتبه A، کامل است.

برای هر ماتریس A از مرتبه $m \times n$، زیرفضای وابسته به فضای پوچ ماتریس وجود دارد که برد A نام دارد و توسط $\mathrm{R}(A)$ نمایش داده می‌شود.

$$\mathrm{R}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax, \ \ x \in \mathbb{R}^n \text{به ازای هر برداری مانند}\},$$

تعریف ۲۳.۲.۱. ماتریس A از مرتبه $n \times n$، معکوس‌پذیر است اگر ماتریس B از مرتبه $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

$$AB = BA = I$$

و توسط $A^{-۱}$ نمایش داده می‌شود. معکوس ماتریس منحصربه فرد است و ماتریس معکوس‌پذیر اغلب ماتریس نامنفرد نامیده می‌شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. دو ماتریس A و B مشابه نامیده می‌شوند اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته به قسمی که:

$$T^{-۱}AT = B$$

یک خاصیت مهم ماتریس‌های مشابه این است که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند.

تعریف ۲۵.۲.۱. مجموعه بردارهای $\{\nu_۱, \dots, \nu_m\}$ در $\mathbb{R}^n$ متعامد است اگر $\nu_i^T \nu_j = ۰$ باشد، به علاوه اگر $\nu_i^T \nu_j = ۱$ به ازای هر i ، آن‌گاه آن‌ها را یکامتعامد نامند. یک پایه برای زیرفضا که یکامتعامد نیز باشد، پایه یکامتعامد برای زیرفضا نامیده می‌شود.

معرفی چند ماتریس خاص

۱. ماتریس قطری[۱۸]: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن به جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشد.

$$A = \mathrm{diag}(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{nn}) = \quad , \quad a_{ij} = ۰ \quad i \neq j$$

۲. ماتریس بالامثلثی[۱۹]: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.

$$U = \begin{cases} a_{ij} & i \leqslant j \\ ۰ & i > j \end{cases}$$

۳. ماتریس پایین‌مثلثی[۲۰]: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.

$$L = \begin{cases} a_{ij} & i \geqslant j \\ ۰ & i < j \end{cases}$$

۴. ماتریس متعامد[۲۱]: ماتریس A متعامد است، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده کند:

$$A^T A = A A^T = I$$

۵. ماتریس هسنبرگی: ماتریس مربعی A بالاهسنبرگی است هرگاه به ازای $i > j + ۱$، $a_{ij} = ۰$. ترانهاده یک ماتریس بالاهسنبرگی پایین هسنبرگی است، یعنی ماتریس $A = (a_{ij})$ پایین هسنبرگی است اگر $a_{ij} = ۰$ به ازای $j > i + ۱$. یک ماتریس مربعی که هم بالاهسنبرگی و هم پایین هسنبرگی باشد، سه قطری است.

۴.۲.۱ بردار ویژه ومقدار ویژه

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. چندجمله‌ای $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$، چند جمله‌ای مشخصه نامیده می‌شود.

صفر های چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه A هستند. این معادل است با:

$\lambda \in \mathbb{C}$، یک مقدار ویژه از ماتریس A است، اگر وتنها اگر، بردار غیر صفر x وجود داشته‌باشد، به‌طوری‌که:

$$Ax = \lambda x$$

[۱۸] Diagonal

[۱۹] Upper triangular

[۲۰] Lower triangular

[۲۱] Orthogonal

تعریف ۲۷.۲.۱. بردار $x \neq 0$، بردار ویژه ماتریس A است، اگر:
$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۲۸.۲.۱. بردار $y \neq 0$، بردار ویژه چپ نامیده می‌شود، اگر:
$$y^H A = \lambda y^H$$

نکته ۲۹.۲.۱. برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $\mid \lambda I - A \mid = 0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به صورت مختلط $\alpha \pm i\beta$ است.

برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس به صورت زیر قابل محاسبه است:
$$\mid A \mid = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$
$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

چند جمله ای مشخصه برای هر ماتریس $A_{n\times n}$ یک چند جمله ای از مرتبه n است.
$$\mid \lambda I - A \mid = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0$$

این چند جمله ای را می توان به صورت زیر نمایش داد:
$$\mid \lambda I - A \mid = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ای هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ را قرار دهیم، مقدار $\mid A \mid$ به دست می آید:
$$\mid A \mid = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

نکته ۳۰.۲.۱. در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند.

۵.۲.۱ دستگاه کنترل خطی

تعاریف و قضایای این بخش از [۶] و [۵] انتخاب شده‌است.

دستگاه یک بعدی

- برای بسیاری از دستگاه‌های فیزیکی، معادله دیفرانسیل آن را به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \qquad (۷.۱)$$

که در آن

- t متغیر زمان،
- $x(t)$ یک بردار ستونی n بعدی موسوم به بردار حالت،
- $u(t)$ یک بردار ستونی m بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل ،
- $y(t)$ یک بردار r بعدی متغیر با زمان به‌نام بردار خروجی

هستند.

در حالتی‌که ماتریس‌های A و B و C و D مستقل از t و ثابت باشند، دستگاه حاصل را دستگاه خطی ناوردای زمان[۲۲] می‌نامیم.

معادله (۷.۱) را معادله دستگاه پیوسته گویند.

برای برخی از دستگاه‌ها، بردار حالت یا بردار ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه‌گیری نیستند، بلکه در دنباله‌ای از نقاط t_i، $i = ۰, ۱, \ldots, n$ این کمیت‌ها در دسترس است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت دستگاه به طور هم‌ارز به صورت معادله تفاضلی مرتبه اول زیر است:

$$\begin{cases} x(i+۱) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i) \end{cases} \tag{۸.۱}$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت و ورودی در زمان t_i هستند.

نکته ۳۱.۲.۱. برخی از دستگاه‌ها ذاتا گسسته زمانی هستند و تغییر حالت دستگاه فقط در نقاط زمانی خاصی صورت می‌پذیرد. در این حالت، دستگاه به صورت گسسته خطی زیر است:

$$x(k+۱) = Ax(k) + Bu(k) \tag{۹.۱}$$

۶.۲.۱ کنترل‌پذیری

دستگاه توصیف شده با معادله (۷.۱) ، کنترل‌پذیر نامیده می‌شود، اگر با شروع از حالت اولیه $x(۰)$، با انتخاب ورودی مناسب $u(t)$، $۰ \leqslant t \leqslant t_۱$، در زمان متناهی $t_۱$، بتوان دستگاه را به هر گام نهایی $x_۱ = x(t_۱)$ هدایت کرد.

نکته ۳۲.۲.۱. کنترل‌پذیری دستگاه (۷.۱)، اغلب به کنترل‌پذیری زوج (A, B) اشاره دارد.

نکته ۳۳.۲.۱. حالت ماتریس A در دستگاه پیوسته زمانی (۷.۱) و یا به طور معادل، مقدار ویژه λ از A، کنترل‌پذیر است، اگر بردار ویژه سمت چپ متناظر با λ با ستون‌های ماتریس B نامتعامد باشد. در غیر این صورت، غیر قابل کنترل هستند.

[۲۲] Time invariant

ماتریس کنترل‌پذیری

برای دستگاه توصیف شده با معادله تفاضلی (۷.۱) ماتریس کنترل‌پذیری را به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^{۲}B & \dots & A^{n-۱}B \end{bmatrix} \tag{۱۰.۱}$$

قضیه ۳۴.۲.۱. (معیار کنترل‌پذیری دستگاه پیوسته زمانی)[۵]
فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $(m \leqslant n)$ باشد، عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. دستگاه (۷.۱) کنترل‌پذیر است.

۲. ماتریس کنترل‌پذیری $Q_{n\times nm}$، رتبه کامل n است.

$$\mathrm{rank}(Q) = n$$

۳. اگر (λ, x)، جفت ویژه ماتریس A^T باشند، به این معنی که $x^TA = \lambda x^T$، آنگاه:

$$x^TB \neq ۰$$

۴. برای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A ،

$$\mathrm{rank}(A - \lambda I, B) = n$$

۵. با انتخاب مناسب ماتریس K، مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ را می‌توان به مقادیر دلخواه تخصیص داد.

برهان. در اینجا تنها اثبات هم ارزی قسمت دوم به سوم و برعکس را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای ادامه اثبات می‌توانید به [۵] مراجعه کنید. فرض می‌کنیم $t_۰ = ۰$، $x(۰) = ۰$ را در نظر می‌گیریم.
۳ $\longrightarrow$ **۲**: x را بردار ویژه A^T متناظر با مقدار ویژه λ در نظر می‌گیریم، یعنی

$$x^TA = \lambda x^T.$$

به برهان خلف فرض می‌کنیم $x^TB = ۰$ آن‌گاه

$$x^TQ = [x^TB, \lambda x^TB, \lambda^{۲} x^TB, \dots, \lambda^{n-۱}x^TB] = ۰. \tag{۱۱.۱}$$

چون ماتریس Q، رتبه کامل است پس، $x = ۰$ خواهد بود که این یک تناقض است.
۲ $\longrightarrow$ **۳**: فرض کنید هیچ‌یک از بردارهای ویژه A با ستون‌های B متعامد نباشد. اما رتبه Q برابر $k < n$ باشد. بنابراین ماتریس نامنفرد T وجود دارد [۵] به‌طوری‌که:

$$\bar{A} = TAT^{-۱} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{۱۱} & \bar{A}_{۱۲} \\ ۰ & \bar{A}_{۲۲} \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_{۱} \\ ۰ \end{bmatrix}, \tag{۱۲.۱}$$

به‌طوری‌که $\bar{A}_{۲۲}$ از مرتبه $(n-k)$ است و $k = \mathrm{rank}(Q)$.