وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

خاصیت جابه‌جایی‌پذیری قوی گروه‌های موضعاً پوچ‌توان

توسط:
بهمن حسینی‌نیا

استاد راهنما:
دکتر اسداله فرامرزی ثالث

استاد مشاور:
دکتر پیمان نیرومند

اسفند ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

خاصیت جابه‌جایی‌پذیری قوی گروه‌های موضعاً پوچ‌توان

توسط:

بهمن حسینی‌نیا

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم

برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: خوب

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید حیدر جعفری استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود (داور اول)

دکتر حسن خسروی استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی و فنی و مهندسی دانشگاه گنبد کاووس (داور دوم)

دکتر الهه ظهوریان آزاد استادیار ریاضی کاربردی گرایش احتمال دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

اسفند ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم

و

برادرانم بهرام و بهنام

سپاسگزاری

خداوند متعال را شاکرم که این توفیق را نصیب من نمود تا بتوانم این پایان نامه را به پایان برسانم.

در اینجا بر خود لازم می دانم از استاد عزیزم جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی ثالث به عنوان استاد راهنما، و جناب آقای دکتر پیمان نیرومند به عنوان استاد مشاور، که با راهنمایی های خود باعث فراهم آوردن فرصتی جهت تحقیق در این زمینه شدند و با صبر و حوصله بسیار مرا در این مسیر هدایت فرمودند، خاضعانه سپاسگزاری نمایم.

از اساتید مدعو جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری و جناب آقای دکتر حسن خسروی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند، تشکر و قدردانی می نمایم.

از پدر و مادر مهربانم، برادران عزیزم که همیشه مشوق من بوده و در راه پیشرفتم از هیچ تلاشی فروگذار نکرده اند سپاسگزاری می کنم.

در نهایت از تمامی دوستان خوبم آقایان مصطفی سینجلی، محمد حمدی، مرتضی دست درست، میلاد کرد مصطفی پور، حسن دانا، حمید پهلوانی و خانم نصیبه رشیدی که در این دوره تحصیلی یار و یاورم بوده اند تشکر می کنم.

بهمن حسینی نیا - اسفند ۱۳۹۰

چکیده

خاصیت جابه‌جایی‌پذیری قوی گروه‌های موضعاً پوچ‌توان

به وسیله‌ی:
بهمن حسینی‌نیا

فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت گروه G را جابه‌جایی‌پذیری قوی یا PC-گروه [1] می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر x و y در G که $x^m, y^n \neq 1$، اگر $[x^m, y^n] = 1$ آنگاه $[x, y] = 1$. زیرگروه‌های فیتینگ [2] و عمل‌های دارای نقطه - ثابت - آزاد [3] نقش اساسی در مطالعه‌ی PC -گروه‌ها دارند. یکی از اهداف ما دراین پایان‌نامه رده‌بندی PC -گروه‌های موضعاً متناهی است که بدین منظور ابتدا p -گروه‌های متناهی و گروه‌های پوچ‌توان متناهی و در نهایت گروه‌های موضعاً متناهی[4] را مورد مطالعه و رده‌بندی قرار خواهیم داد. یکی دیگر از اهداف ما در این پایان نامه این است که هسته‌ی گروه جابه‌جایی‌پذیری قوی را روی گروه‌های موضعاً پوچ‌توان و گروه‌های متناهی که مرکز نابدیهی دارند، بررسی کنیم.

[1] Power-Commutative

[2] Fitting subgroup

[3] Fixed-point-free

[4] Locally finite groups

فهرست مطالب

پیشگفتار

فرض کنید G یک گروه باشد. گروه G را جابه‌جایی‌پذیری قوی یا PC-گروه می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر x و y در G که $x^m, y^n \neq ۱$، اگر $[x^m, y^n] = ۱$ آنگاه $[x, y] = ۱$.

واضح است که گروه‌های آبلی و گروه‌هایی از نمای اول، PC -گروه هستند. بنابر قضیه‌ی سوزوکی[۵] [۲۰] برای هر n، $PSL(۲, ۲^n)$، PC -گروه است. در سال ۱۹۹۷ یو-فن وو [۶] [۲۴] CT -گروه‌ها (رابطه‌ی جابه‌جایی‌پذیری متعدی روی گروه نابدیهی)را بیان کرد و به بررسی خواص آن‌ها پرداخت. می‌توان بررسی کرد که CT -گروه‌ها، PC -گروه هستند.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده شده است. در فصل دوم گروه‌هایی خاص از جمله گروه‌های کوهمولوژی[۷] [۲]، گروه‌های فروبنیوس، [۸] گروه‌های زازنهوس[۹][۵]، FC-گروه‌ها[۱۶]، موضعاً χ-گروه‌ها و CT -گروه‌ها [۲۴] بیان شده است. در فصل سوم یک رده‌بندی از PC -گروه‌های متناهی ارائه شده که طی آن چنین گروه‌هایی، ساده یا حل‌پذیر هستند و هم‌چنین PC -گروه‌های موضعاً متناهی به‌طور کامل رده‌بندی شده است. در واقع نشان داده شده است که گروه موضعاً متناهی حل‌پذیر توسیعی از زیرگروه فیتینگ با گروه موضعاً متناهی دوری است و مهم‌ترین نتیجه‌ی این فصل آن است که PC -گروه‌های موضعاً متناهی نسبت به خارج قسمت بسته هستند.

در فصل چهارم هسته‌ی جابه‌جایی‌پذیری قوی را تعریف کرده و خاصیت جابه‌جایی‌پذیری قوی را روی

---

[۵] Suzuki

[۶] Yu-Fen Wu

[۷] Cohomology

[۸] Frobnius

[۹] Zassenhaus

گروه‌های موضعاً پوچ‌توان و گروه‌های متناهی که مرکز نابدیهی دارند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این پایان‌نامه از نمادهای زیر استفاده شده است:

$Z(G)$: مرکز گروه G

$kerF$: هسته‌ی همریختی F

ImF : تصویر همریختی F

$|G|$: تعداد اعضای گروه G(مرتبه‌ی گروه G)

$|G:H|$: اندیس H در G(که Hزیرگروه G است)

$Aut(G)$: گروه خودریختی‌های G

$Inn(G)$: گروه خودریختی‌های داخلی G

$G\simeq H$: G یکریخت با H است

$G\times H$: حاصل‌ضرب مستقیم G و H

$Gal(E/F)$: گروه F-خودریختی‌های E

$\prod G_i$: حاصل‌ضرب مستقیم G_iها

$G^{(n)}$: مشتق nام گروه G

F^* : مجموعه‌ی عناصر غیرصفر یک میدان F

G^* : حاصل‌ضرب مستقیم n کپی از گروه G

$G^\#$: اگر G یک گروه باشد، آنگاه $G^\# = G\setminus\{۱\}$

S_n : گروه جایگشتی از درجه‌ی n

$Hom(G,H)$: گروه همریختی‌ها از G به H

$G\otimes H$: ضرب تانسور G و H

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان بعضی تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در سراسر این پایان‌نامه مورد نیاز است. مطالب این فصل برگرفته از مراجع مختلفی است که در هر یک از بخش‌ها به آن‌ها اشاره شده است و خواننده درصورت نیاز به مطالعه‌ی بیشتر می‌تواند به آن‌ها مراجعه کند.

۱-۱ عمل یک گروه روی یک مجموعه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. دراین‌صورت G **روی X عمل می‌کند**، هرگاه یک تابع از $G \times X$ به X (که معمولاً تصویر (g, x) تحت این تابع با gx نشان داده می شود) وجود داشته باشد به قسمی‌که به‌ازای هر $x \in X$ و هر $a, b \in G$

۱) $(ab)x = a(bx)$؛

۲) $ex = x$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند. دراین‌صورت تابع

$$\phi : G \longrightarrow S_X$$

$$g \longmapsto \phi_g$$

که در آن $\phi_g : X \longrightarrow X$ یک جایگشت از X است، را **نمایش جایگشتی** G متناظر با عمل گروه G روی مجموعه‌ی X می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند و $x_1, x_2 \in X$. دراین‌صورت رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x_۲ \sim x_۱$ هرگاه $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $gx_۱ = x_۲$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی در X است.

یک **مدار عمل** عبارت است از کلاس هم ارزی

$$\{gx \mid g \in G\}$$

که آن را با Gx نشان می‌دهند. هم‌چنین **ثابت ساز** عضو x از X عبارت است از مجموعه‌ی

$$\{g \in G \mid gx = x\}$$

که آن را با G_x یا $Stab_G(x)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه باشد. دراین‌صورت عمل گروه G روی مجموعه‌ی X را **باوفا** می‌نامند، هرگاه نمایش جایگشتی متناظر آن (از G به S_X) یک به یک باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$. عمل گروه H روی مجموعه‌ی G که به صورت $(h, g) \mapsto h^{-۱}gh$ تعریف می شود را عمل **مزدوجی** گویند. عنصر $h^{-۱}gh$ را **مزدوج** g نامیده و مدار

$$\overline{x} = \{g^{-۱}xg \mid g \in H\}$$

را **رده‌ی مزدوجی** x می‌گویند. نسبت به این عمل،

$$Stab_H(x) = \{h \in H \mid h^{-۱}xh = x\} = \{h \in H \mid xh = hx\}$$

را **مرکزساز** x در H می‌نامند و آن را با $C_H(x)$ نشان می‌دهند.

فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y \in G$. دراین‌صورت مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای G مانند y به‌طوری‌که x^y برابر با x یا $x^{-۱}$ باشد را **مرکزساز توسعه‌یافته** می‌نامند و با $C_G^*(x)$ نشان می‌دهند.

اگر زیرگروه H از یک گروه G روی مجموعه‌ی S از تمام زیرگروه‌های G به صورت مزدوجی عمل کند، آنگاه به ازای هر $K \in S$ ثابت‌ساز K یعنی $Stab_H(K) = \{h \in H \mid h^{-۱}Kh = K\}$ را **نرمال‌ساز** K در H می‌نامند و آن را با $N_H(K)$ نشان می‌دهند. زیرگروه $N_G(K)$ را **نرمال‌ساز** K و هم‌چنین به‌ازای هر $g \in G$، $g^{-۱}Kg$ را مزدوج K می‌نامند.

به‌وضوح هر زیرگروه K در $N_G(K)$ نرمال است و $K \trianglelefteq G$ اگروفقطاگر $N_G(K) = G$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$. دراین‌صورت هسته‌ی زیرگروه H را که با $core(H)$ نمایش می‌دهند به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$core(H) = \bigcap_{g \in G} g^{-۱}Hg$$

قضیه ۷.۱.۱. *(ر.ک. [۱۷]) اگر گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند، آنگاه به‌ازای هر $x \in X$،*

$$|Gx| = [G : G_x]$$

نتیجه ۸.۱.۱. *(ر.ک. [۱۷]) فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $K \leq G$. دراین‌صورت*

۱) تعداد عناصر رده‌ی مزدوجی $x \in G$ برابر است با $[G : C_G(x)]$ که $|G|$ را می‌شمارد؛

۲) اگر $\overline{x}_۱$، $\overline{x}_۲$، ...، $\overline{x}_n$، $(x_i \in G)$ تمامی رده‌های مزدوجی متمایز G باشند، آنگاه

$$|G| = \sum_{i=۱}^{n} |\overline{x}_i| = \sum_{i=۱}^{n} [G : C_G(x_i)]$$

*که آن را **معادله‌ی رده‌ای** می‌نامند؛*

۳) تعداد زیرگروه‌های مزدوج با K از G برابراست با $[G : N_G(K)]$ که $|G|$ را می‌شمارد.

لم ۹.۱.۱. *(ر.ک. [۱۷]) اگر $K \leq H \leq G$ و $H \leq C_G(K)$، آنگاه $K \leq Z(H)$.*

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند. دراین‌صورت

۱) عمل G روی X **انتقالی** است هرگاه به‌ازای هر $x, y \in X$ عضوی مانند $g \in G$ وجود داشته باشد، به‌قسمی‌که $gx = y$. به عبارت دیگر برای هر $x \in X$، $X = Gx$. عملی که انتقالی نباشد را **غیرانتقالی** نامند.

۲) عمل G روی X **نیم منظّم** است اگر به‌ازای هر $x \in X$، $G_x = \{e\}$.

۳) عمل G روی X **منظّم** است اگر هم انتقالی و هم نیم منظّم باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $|X| = n$ و $k \leq n$. دراین‌صورت عمل گروه G روی X را **k-انتقالی** می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر زوج از k-تایی‌های دلخواه مانند $(x_۱, \ldots, x_k)$ و $(y_۱, \ldots, y_k)$ از اعضای X با درایه‌های دوبه‌دو متمایز، $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $۱ \leq i \leq k$، $gx_i = y_i$.

در حالت $k = ۲$، G انتقالی دوگانه و درحالت $k = ۳$، انتقالی سه‌گانه نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه k-انتقالی روی X باشد. دراین‌صورت G به طور **k-انتقالی اکید** روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند، هرگاه فقط عضو همانی G، هر k عضو متمایز X را ثابت نگه دارد. که در این‌صورت عمل G روی X را منظّم گویند.

ملاحظه ۱.۱.۱۳. یک عنصر $g \in G$ در مرکز G قرار دارد اگروفقط‌اگر رده‌ی مزدوجی g فقط شامل عنصر g باشد. لذا اگر G متناهی باشد و $x \in Z(G)$ آنگاه بنابر نتیجه‌ی ۱.۱.۸، $[G : C_G(x)] = ۱$ از این‌رو معادله‌ی رده‌ای G را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=۱}^{m}[G : C_G(x_i)]$$

که در آن $\overline{x}_۱$، $\overline{x}_۲$، ...، $\overline{x}_m$، $(x_i \in G \setminus Z(G))$ رده‌های مزدوجی متمایز G هستند به‌طوری‌که $[G : C_G(x_i)] > ۱$.

قضیه ۱.۱.۱۴. (*کیلی*[۱] ر.ک. [۱۶]) *اگر G یک گروه باشد، آنگاه یک تکریختی $G \longrightarrow S_G$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر گروه G با زیرگروهی از S_G یکریخت است. به‌ویژه گروه متناهی G با زیرگروهی از S_n یکریخت است که $|G| = n$.*

نتیجه ۱.۱.۱۵. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$ به‌قسمی‌که $[G : H] = p$، که p کوچک‌ترین عدد اوّلی است که $|G|$ را می شمارد. دراین صورت، $H \trianglelefteq G$.*

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید G یک گروه و M یک زیرگروه سره از G باشد. در این‌صورت M را یک **زیرگروه بیشین یا ماکسیمال** از G گویند، هرگاه $M \leq H \leq G$ نتیجه دهد که $M = H$ یا $H = G$. یا به عبارت دیگر، بین M و G زیرگروه دیگری از G نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید گروه G نابدیهی باشد. دراین‌صورت گروه G را **ساده** می‌نامند هرگاه هیچ زیرگروه نرمال سره‌ی نابدیهی نداشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. گروه متناهی G که هیچ زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی نداشته باشد را **گروه نیمه‌ساده** می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اوّل باشد. دراین‌صورت G را یک p **-گروه** گویند اگر به‌ازای هر $g \in G$، عددصحیح نامنفی n وجود داشته باشد که $o(g) = p^n$.

اگر H زیرگروهی از گروه G و H یک p -گروه باشد، آنگاه H را یک p **-زیرگروه** از G می‌نامند.

قضیه ۱.۱.۲۰. (*لاگرانژ*[۲] ر.ک. [۱۷]) *اگر G یک گروه متناهی باشد و $H \leq G$، آنگاه $|H| \mid |G|$.*

---

[۱] Cayley

[۲] Lagrange

قضیه ۲۱.۱.۱. (**کوشی** [۳] ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید G گروهی متناهی و p یک عدد اوّل باشد به‌قسمی‌که $p \mid |G|$. دراین‌صورت G شامل عنصری از مرتبه‌ی p است.*

نتیجه ۲۲.۱.۱. (ر.ک. [۱۷]) *گروه متناهی G یک p -گروه است اگروفقط‌اگر $|G|$ توانی از p باشد.*

نتیجه ۲۳.۱.۱. (ر.ک. [۱۷]) *اگر G یک p -گروه متناهی نابدیهی باشد، آنگاه $|Z(G)| > 1$.*

قضیه ۲۴.۱.۱. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید G یک p -گروه متناهی باشد. دراین‌صورت برای هر زیرگروه نرمال نابدیهی N از G، $Z(G) \cap N$ نابدیهی است.*

تعریف ۲۵.۱.۱. زیرگروه P از گروه G را یک p **-زیرگروه سیلو** (p عددی اوّل است) از G می‌نامند، هرگاه P یک p -زیرگروه ماکزیمال (بیشین) از G باشد.

قضیه ۲۶.۱.۱. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید G گروهی متناهی، $p \mid |G|$ و p عددی اوّل باشد. دراین‌صورت اگر P، p -زیرگروه سیلوی G باشد و $N_G(P) \leq H \leq G$، آنگاه $N_G(H) = H$.*

قضیه ۲۷.۱.۱. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید P یک p -گروه متناهی و $H \lneqq P$ و $|H| = p^k$. دراین‌صورت P دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی p^{k+1} و شامل H است.*

نتیجه ۲۸.۱.۱. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید G یک p -گروه متناهی و H زیرگروه ماکسیمال G باشد. دراین‌صورت زیرگروه ماکسیمال H در G دارای اندیس عدد اول p است و $H \trianglelefteq G$.*

۱-۲ گروه‌های پوچ‌توان و حل‌پذیر

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت

۱) به‌ازای هر $x, y \in G$ عنصر $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \in G$ را **جابه‌جاگر** x و y می‌نامند.

۲) به ازای هر $X, Y \leq G$، زیرگروه

$$[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle \ \leq G$$

را **جابه‌جاگر** X و Y می‌نامند.

۳) $G' = [G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$ را **زیرگروه مشتق** G می‌گویند.

قضیه ۲.۲.۱. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید G یک گروه باشد و $X, Y \leq G$. دراین‌صورت*

[۳] Cauchy

۱) $[X,Y]=[Y,X]$

و اگر $X,Y \trianglelefteq G$، آنگاه

۲) $[X,Y]\leq X$ و $[X,Y]\leq Y$

۳) $[X,Y]\trianglelefteq G$

قضیه ۳.۲.۱. *اگر $G=\prod_{i=1}^{n} H_i$، آنگاه $G'=\prod_{i=1}^{n} H'_i$.*

اثبات. با استقرا نشان می‌دهیم. فرض کنید $i=2$ و $G=H_1\times H_2$. در واقع عضوهای H_1 با عضوهای H_2 جابه‌جا می‌شوند. دراین‌صورت داریم

$$\begin{aligned} G' = [G,G] &= [H_1\times H_2, H_1\times H_2] \\ &= [H_1,H_1][H_1,H_2][H_2,H_1][H_2,H_2] \\ &= [H_1,H_1][H_2,H_2] = H'_1\times H'_2 \end{aligned}$$

حال با قرار دادن

$$\overline{G}=H_1\times H_2\times \ldots \times H_{k-1}$$

فرض می‌کنیم به‌ازای $i=k-1$ عبارت درست باشد، یعنی

$$\overline{G}' = H'_1\times H'_2\times\ldots\times H'_{k-1}$$

دراین‌صورت به‌ازای $i=k$ داریم

$$G' = [\overline{G}\times H_k, \overline{G}\times H_k] = \overline{G}'\times H'_k = H'_1\times H'_2\times\ldots\times H'_{k-1}\times H'_k$$

پس به‌ازای هر $i\in\{1,\ldots,k\}$،

$$G' = H'_1\times H'_2\times\ldots\times H'_k$$

درنتیجه $G'=\prod_{i=1}^{n} H'_i$ و قضیه اثبات می‌شود.

□

قضیه ۴.۲.۱. *(ر.ک. [۱۷]) فرض کنید G یک گروه و N یک زیرگروه نرمال از G باشد. دراین‌صورت*

۱) *G/N آبلی است اگروفقط‌اگر $G'\leq N$؛*

۲) *G آبلی است اگروفقط‌اگر $G'=\{e\}$؛*

۳) G/G' *آبلی است.*

قضیه ۵.۲.۱. (ر.ک. [۱۶]) *فرض کنید* x, y *و* z *عناصری از یک گروه باشند. دراین‌صورت*

۱) $[x,y]=[y,x]^{-1}, [x,y]^z=z^{-1}[x,y]z$.

۲) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$.

۳) $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت زیرگروه H از G را یک **زیرگروه مشخصه‌ی** G می‌نامند، هرگاه برای هرخودریختی $\varphi: G \longrightarrow G$، $\varphi(H)=H$ که آن را با $H\ char\ G$ نشان می‌دهند.

لم ۷.۲.۱. (ر.ک. [۱۷]) *هر زیرگروه مشخصه‌ی* G*، زیرگروهی نرمال است.*

قضیه ۸.۲.۱. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید* G *یک گروه باشد. دراین‌صورت* $Z(G)$ *و* G' *زیرگروه‌های مشخصه‌ی* G *هستند.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $Z(G)$ زیرگروه مشخصه‌ی G است. بدین‌منظور فرض کنید $\varphi \in Aut(G)$ و $g=\varphi(z)$ که $z\in Z(G)$. اگر $h\in G$ ، آنگاه چون φ پوشا است، عضو $k\in G$ وجود دارد به طوری که $\varphi(k)=h$. حالا با توجه به این که φ یک خودریختی G است می‌توان نوشت

$$gh=\varphi(z)\varphi(k)=\varphi(zk)=\varphi(kz)=\varphi(k)\varphi(z)=hg$$

پس g با تمام اعضای G جابه‌جا می‌شود و لذا $g\in Z(G)$. به این ترتیب ثابت می‌شود که $\varphi(Z(G))\leq Z(G)$ ، یعنی $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصه‌ی G است.
اکنون ثابت می‌کنیم G' یک زیرگروه مشخصه‌ی G است. اگر $\varphi\in Aut(G)$، آنگاه به‌ازای اعضای x و y در گروه G می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\varphi([x,y])=\varphi(x^{-1}y^{-1}xy)&=\varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1})\varphi(x)\varphi(y)\\&=(\varphi(x))^{-1}(\varphi(y))^{-1}\varphi(x)\varphi(y)\\&=[\varphi(x),\varphi(y)]\in G'\end{aligned}$$

چون G' به وسیله‌ی تمام $[x,y]$ها تولید می‌شود لذا $\varphi(G')\leq G'$، یعنی G' زیرگروه مشخصه‌ی G است. □

لم ۱.۲.۹. *فرض کنید H و K زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به طوری‌که $K \leq H \leq G$، K زیرگروه مشخصه‌ی G و H/K زیرگروه مشخصه‌ی G/K باشد. دراین‌صورت H زیرگروه مشخصه‌ی G است.*

اثبات. چون $K\ char\ G$ پس به‌ازای هر خودریختی $\varphi : G \longrightarrow G$، داریم $\varphi(K) = K$ و چون $H/K\ char\ G/K$، خودریختی مانند $\overline{\varphi} : G/K \longrightarrow G/K$ القا می‌شود، به‌طوری‌که به‌ازای هر $g \in G$، $gK \longmapsto \varphi(g)K$، داریم $\overline{\varphi}(H/K) = H/K$.

بنابراین به‌ازای هر $h \in H$، $\varphi(h)K \in H/K$ پس به‌ازای عضوی مانند $h_1 \in H$ خواهیم داشت $\varphi(h)K = h_1K$ بنابراین $h_1^{-1}\varphi(h) \in K$. چون $K \leq H$ درنتیجه $\varphi(h) \in H$ و $H\ char\ G$.

□

لم ۱.۲.۱۰. (ر.ک. [۱۸]) *اگر $H \lhd G$ و $(|H|, [G : H]) = 1$، آنگاه $H\ char\ G$.*

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید G یک گروه و $G = G_0$، G_1، G_2، …، G_n زیرگروه‌هایی از G باشند. دراین صورت

۱) اگر به‌ازای هر i، $0 \leq i < n$، $G_{i+1} \leq G_i$، آنگاه $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n$ را **یک سری** از زیرگروه‌های G می‌نامند.

۲) اگر به‌ازای هر i، $0 \leq i < n$، $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$، آنگاه سری

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n$$

را یک **سری زیرنرمال** برای G می‌نامند.

۳) اگر به‌ازای هر i، $0 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$، آنگاه سری $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n$ را یک **سری نرمال** برای G گویند.

۴) اگر $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n$ یک سری زیرنرمال برای یک گروه G باشد، آنگاه G_i/G_{i+1}ها، $i = 0, 1, \ldots, n-1$ را **عوامل** این سری و تعداد عوامل نابدیهی را **طول** این سری می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۱۲. سری نرمال $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n = \{e\}$ از گروه G را یک **سری مرکزی** گویند هرگاه به‌ازای هر i، $0 \leq i < n$، G_i/G_{i+1} در مرکز G/G_{i+1} قرار داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۳. گروه G را **پوچ‌توان** گویند هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را **رده‌ی پوچ‌توانی** G می‌نامند.

یک گروه پوچ‌توان با رده‌ی پوچ‌توانی صفر از مرتبه‌ی ۱ خواهد بود. گروه‌های پوچ‌توان با رده‌ی حداکثر ۱ آبلی هستند.

تعریف ۱.۲.۱۴. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت زیرگروه‌های $\gamma_i(G)$ به‌طور استقرایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_1(G) = G, \;\; \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G], \;\; i \geqslant 2$$

۱) برای هر $i \in N$، $\gamma_i(G)$ زیرگروه مشخصه‌ی G است؛

۲) $\gamma_{i+1}(G) \trianglelefteq \gamma_i(G)$، برای هر $i \in N$؛

۳) $\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} \leq Z(\frac{G}{\gamma_{i+1}(G)})$، برای هر $i \in N$.

دراین‌صورت

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots \geq \gamma_n(G) \geq \ldots$$

یک سری نرمال برای G است. این سری را **سری مرکزی پایینی** می نامند.

فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت سری نرمال

$$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$$

را **سری مرکزی بالایی** می‌نامند که در آن $Z_i(G)$ به‌طور استقرایی و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$Z_1(G) = Z(G), Z_0(G) = \{e\}$ و برای هر $i > 1$،

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$$

$Z_i(G)$ را i**-امین مرکز** G می‌گویند.

قضیه ۱.۲.۱۵. (ر.ک. [۱۷]) *فرض کنید* $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_n = \{e\}$ *یک سری مرکزی در گروه پوچ‌توان* G *باشد. دراین‌صورت*

۱) *به‌ازای هر* i، $0 \leq i \leq n$، $\gamma_i(G) \leq G_i$ *و لذا* $\gamma_n(G) = \{e\}$.

۲) *به‌ازای هر* i، $0 \leq i \leq n+1$، $G_{n-i} \leq Z_i(G)$ *و لذا* $Z_n(G) = G$.

۳) *رده‌ی پوچ‌توانی* G = *طول سری مرکزی بالایی* G = *طول سری مرکزی پایینی* G.

قضیه ۱.۲.۱۶. (ر.ک. [۱۷]) *اگر* p *عددی اوّل باشد، آنگاه هر* p*-گروه متناهی، پوچ‌توان است.*