موضوع :

مش‌بندی مدلهای اجزاء محدود دو بعدی با استفاده از مفاهیم نگاشت

استاد راهنما:

دکتر کامبیز کوهستانی

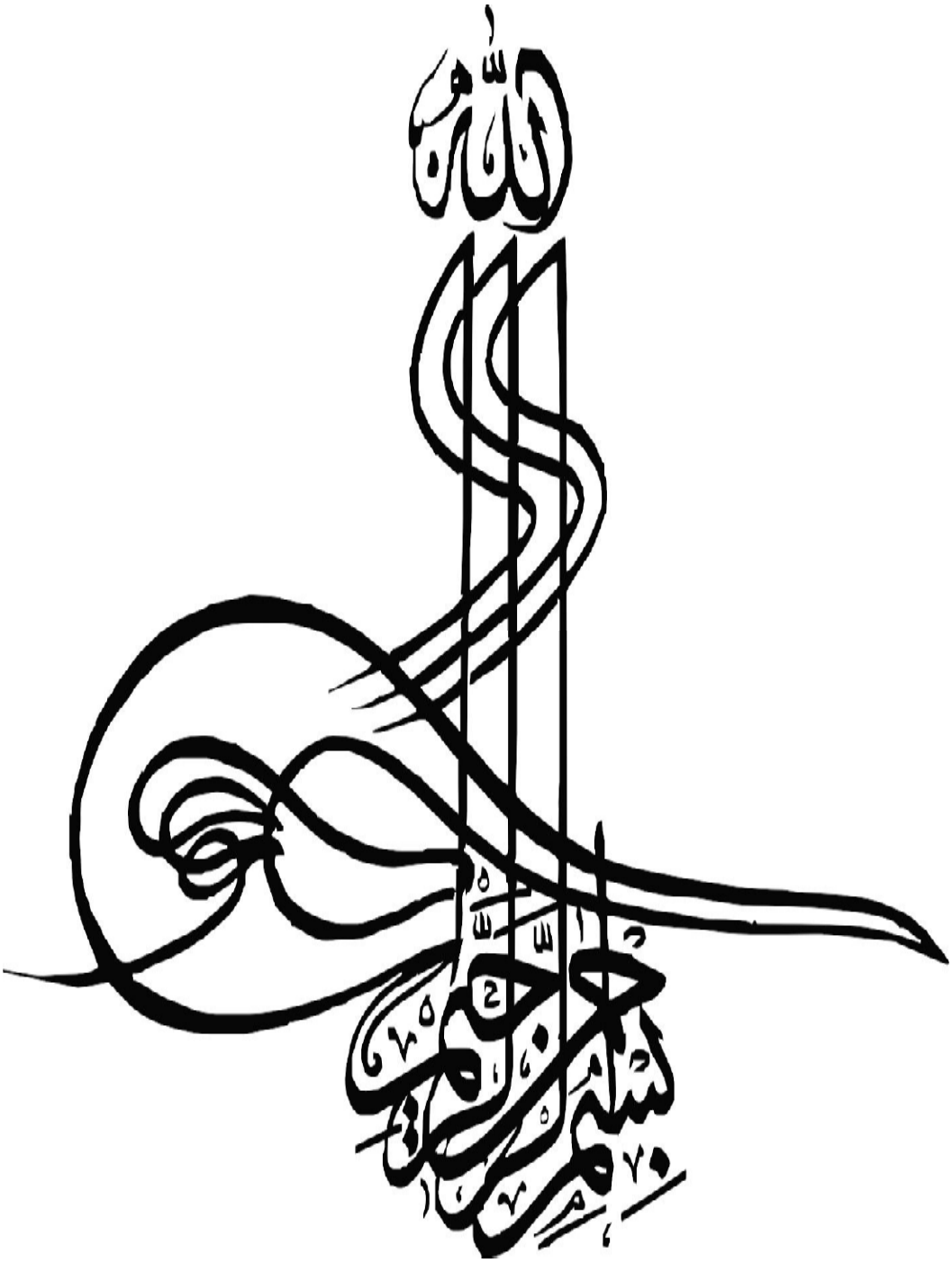
استاد مشاور :

دکتر علی حدیدی

پژوهشگر:

امیر سرلک

زمستان ۹۰


الله
بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیر و تشکر

این رساله زیر نظر استاد عالیقدر جناب آقای دکتر کامبیز کوهستانی به عنوان استاد راهنما انجام گرفته است که بدینوسیله از راهنمایی‌های ارزنده و زحمات بی دریغ ایشان صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

در تهیه و انجام این رساله از راهنمایی‌هایی ارزنده استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علی حدیدی به عنوان استاد مشاور بهره فراوان برده شده است که بدینوسیله از زحمات ایشان صمیمانه قدردانی می‌شود.

نام خانوادگی دانشجو : سرلک **نام** : امیر

عنوان پایان نامه :

مش بندی مدل های اجزاء محدود دو بعدی با استفاده از مفاهیم نگاشت

استاد راهنما : دکتر کامبیز کوهستانی

استاد مشاور : دکتر علی حدیدی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد

رشته : عمران **گرایش** : سازه

دانشگاه: تبریز **دانشکده** : مهندسی عمران

تاریخ فارغ التحصیلی : بهمن ۹۰ **تعداد صفحه**: ۶۶

کلید واژه ها: روش اجزاء محدود- نگاشت- مش‌بندی

چکیده: روش اجزاء محدود یکی از شناخته شده‌ترین روش‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشد. در این روش، میدان حاکم بر مسئله توسط المان‌هایی به بخشهای کوچکتر و با رفتار مشخص تقسیم می‌شود. در نهایت معادلات تعادل سیستم در نقاط گرهی تشکیل و با حل دستگاه معادلات خطی نظیر، متغیرهای حاکم مسئله تعیین می‌شوند. اصولاً، هر چه تعداد اجزاء، بیشتر و تقسیم‌بندی ریزتر باشد، پاسخ‌های بدست آمده به پاسخ‌های واقعی نزدیکتر خواهد بود. ولی با توجه به محدودیت‌های موجود در ابزارهای حل(میزان حافظه، سرعت سیستم‌های کامپیوتری موجود و...) تقسیم‌بندی‌ها باید بکشل بهینه و به نحوی انجام شود که با حداقل تعداد المان بتوان به بیشترین میزان دقت دسترسی داشت. بنابراین چگونگی تقسیم‌بندی میدان(مش‌بندی) یکی از چالش‌های عمده در روش المان‌های محدود می‌باشد. روش‌های متعددی برای مشبندی میدان‌های دو بعدی و سه بعدی ارائه شده است. در تحقیق حاضر، مش‌بندی میدان‌های دو بعدی دلخواه بر اساس مش‌بندی یک میدان ساده‌تر(مربع استاندارد) و با استفاده از مفاهیم نگاشت انجام می‌گیرد. در نهایت، کارائی روش مذکور در مقایسه با روش‌های موجود، مورد بررسی و مطالعه قرار خواهد گرفت.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول- مقدمه

۱-۱- بیان مسئله ۱

۱-۲- بررسی منابع ۱

۱-۳- مش‌بندی میدان به روش دلانوی ٦

۱-۳-۱- تعاریف اولیه ۷

۱-۳-۲- مثلث‌بندی دلانوی مقید ۸

مثال ۹

فصل دوم- تئوری

۲-۱- مقدمه ۱۳

۲-۲- مربع واحد ۱٤

۲-۳- مش‌بندی میدان‌های بدون حفره ۱٤

۲-۳-۱- مثلث خیام- پاسکال: ۱۵

۲-۳-۲- نحوهٔ انتخاب نقاط کلیدی ۱۵

۲-۳-۲-۱- گام اول- انتخاب نقاط ۱ تا ٤ ..... ۱٦

۲-۳-۲-۲- گام دوم- انتخاب سایر نقاط ۱٦

۲-۳-۳- تعداد نقاط کلیدی ۱٦

۲-٤- مش‌بندی میدان‌های حفره دار ۳۰

۲-۵- میدان های مقعر و محدب ۳۲

۲-٦- بررسی سایر نگاشت‌ها ۳۲

فصل سوم- تخمین خطاو مشبندی وفقی

۳-۱- مشبندی وفقی ۳۵

۳-۲- خطا ۳٦

۳-۳- بهبود تنش ۳٦

۳-٤- تخمین خطا و کاربرد آن در مشبندی وفقی ۳۸

فصل چهارم- مثال‌های عددی بحث و نتیجه گیری

٤-۱- مثال‌ها ٤۱

مثال ۱ ..... ٤۱

مثال ۲ ..... ٤٤

مثال ۳ ..... ٤۸

مثال ٤ ..... ۵۲

مثال ۵ ..... ۵۷
٤-۲- نتایج ٦۰
٤-۳- پیشنهادات برای تحقیقات بعدی ٦۱
منابع ٦۲
چکیده انگلیسی

فصل اول

مقدمه

۱-۱- بیان مسئله

مدل ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی توسط معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. برای حل معادلات دیفرانسیل می‌توان از روشهای کلاسیک یا عددی استفاده کرد. روش های کلاسیک صرفاً برای میدان‌های ساده کاربرد دارند و این درحالیست که برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر میدان‌های دلخواه، استفاده از روش های عددی اجتناب ناپذیر است. از میان روش‌های عددی زیادی که برای حل موجود است، روش المان‌های محدود یکی از شناخته شده‌ترین و پر کاربردترین‌ها می‌باشد. در این روش، میدان حاکم به تعدادی جزء کوچک که المان نامیده می‌شوند، با شکل‌ها و رفتار مشخص تقسیم می‌شود. هر یک از این المان‌ها دارای تابع تقریب مشخص و از پیش تعیین شده می‌باشد. با سر هم‌بندی این المان‌ها و برقراری شرایط تعادل در نقاط گرهی(بر اساس متغییر حاکم که عمدتاً تغییر مکان می‌باشد)، یک دستگاه معادلات خطی حاصل می‌شود که از حل آن، مقدار عددی متغییر حاکم در نقاط گرهی محاسبه می‌شود. در صورتیکه المان‌ها به شکل درستی انتخاب و به اندازه کافی کوچک باشند، پاسخ سیستم، به پاسخ واقعی نزدیکتر خواهد بود. با کوچک کردن المان‌ها، اصولاً میزان خطاها کاهش می‌یابند ولی در هر حال با توجه به محدودیت‌های موجود در سیستم‌های کامپیوتری(میزان حافظه،سرعت سیستم های کامپیوتری و...) انتخاب مش مناسب یکی از چالش‌های عمده در روش المان‌های محدود می‌باشد.

در این پایانامه سعی می‌کنیم تا بر اساس مفاهیم نگاشت، مش‌بندی یک مدل المان محدود دو بعدی پیچیده را بر اساس مش‌بندی یک مدل ساده انجام دهیم، در این راستا، یافتن نگاشت مناسب و ایجاد ارتباط ریاضی بین مدل واقعی و مدل ساده(مربع استاندارد) بخش اصلی مطالعه را تشکیل می‌دهد. مش‌بندی مدل ساده، انتقال آن به مدل واقعی و کنترل خطاها مراحل بعدی را تشکیل می‌دهند. در عین حال چگونگی مدلسازی حفره‌ها در این نوع فرمولبندی نیز در مراحل نهایی مورد مطالعه قرار خواهدگرفت.

۱-۲- بررسی منابع:

Shewchuk (2002) برای مش بندی میدان از روش Delaunay Triangulation استفاده می کرد. شوچاک با بکار بردن الگوریتم روپپرت مش بندی را بگونه ای انجام می دادکه هیچ یک از زوایای حاده مثلث ها از مقداری مشخص که معمولاً حدود ۳۰درجه است، کمتر نشود. Lohner و Onate (2010)برای مش بندی میدان از روش Advancing Front Technicque استفاده می‌کردند.روش کار آنها اینگونه بود که ناحیه مورد نظر را بوسیله اشکال هندسی می پوشاندند به نحوی که سطح پوشیده نشده توسط اشکال هندسی حداقل باشد. Tam و Armstrong (1991) با استفاده از روش Delaunay Triangulation به مش بندی میدان می پرداختند. آنها ابتدا در میدان مورد نظر دایره ای با شعاع حداکثر محاط می کردندو سپس با بدست آوردن اطلاعاتی از این دایره و با استفاده از روش Delaunay اقدام به مش بندی میدان می کردند.

Peterson و همکارانش (2000) ابتدا با استفاده از روش Grid – Based method اقدام به مش بندی اولیه میدان می کردند. و در مکانهایی که مجبور به افراز المان های غیر مستطیلی بودند، براساس مثلث بندی دلانوی مقید (Constrained Delaunay Triangulation) آن المان ها را با مرز مرتبط می ساختند.

Maeda و همکارانش (2005) با ارائه روشی که در آن از تبدیل مختصات استفاده می شد به مش بندی میدان می پرداختند.

Zhu و همکارانش (2006) با استفاده از تئوری فراکتل ها میدان را مش بندی می کردند. آنها در روش خود براساس تئوری فراکتل ها یک سیستم تابعی تکرار شونده تولید کردند که از آن برای مش بندی ناحیه استفاده می شد.

Wang و همکارانش(2007) برای مش بندی از روش Advancing Front Circle Packing استفاده می کردند. آنها روشی ارائه کردند که در آن المان ها با سایز مفروض و دلخواه ایجاد شوند. با این تفاوت که بر خلاف روش Frontal Method شروع مش بندی از مرز ناحیه صورت نمی گیرد بلکه از یک نقطه مناسب واقع در داخل ناحیه.

Hamalawi (2004) با ادغام روش های Advancing Front Technique و Delaunay اقدام به مش بندی ناحیه می کرد. روند کار او اینگونه بود که نقاطی اضافی بروی مرزهای ناحیه ایجاد می کرد. سپس نقاط داخلی به گونه ای ایجاد می شد که علاوه بر آن که داخل دایره دلوآنی آن المان قرار گیرد این راس جدید یک راس مثلث متساوی الضلاع باشد.Shepherd وهمکاران(2010) برای مش بندی و فقی میدانی که با المان های چهارضلعی مش بندی شده است. اینگونه عمل کردند. اساس کار آن ها، بر افزایش سایز المان ها در مکان هایی که نیاز به استفاده از المان هایی با سایز قبلی نمی بود، قرار داشت. آن ها ابتدا المان هایی که می بایست درشت شوند را مشخص می کردند و آن ها را نوار چهارضلعی می نامیدند سپس با ادغام کردن هر دو رأس رو به رو هم در این نوار که در نتیجه آن نوار به منحنی تبدیل می شد، باعث می شدند که این المان ها حذف شوند و در نتیجه به سایز المان های مجاور به المان های نوار چهارضلعی افزوده می شد. Lin وNg (1997) برای مش بندی میدان بوسیله المان های مثلثی، ابتدا میدان را بوسیله دوایری اشغال می کردند. سپس مرحله به مرحله مرز میدان را محدود می کردند به گونه ای که در نهایت میدان بوسیله مثلث هایی مش بندی می شد که این دوایر، دوایر محاطی داخلی آن مثلث ها بودند. Laug (2010)با تعریف دو پارامتر تحت عناوین شاخص تغییرات فاصله و شاخص تغییرات زاویه بین میدان مش بندی شده و میدان واقعی به مش بندی و کنترل کیفیت مش بندی میدان پرداخت.

Merhof وهمکاران(2007) برای مش بندی وفقی میدان چهارضلعی هایی را تولید کردند که این چهارضلعی ها دارای اضلاعی با ویژگی خاص بودند.هر یک از این چهارضلعی ها با تعدادی المان افراز شده بودند که در برخی از اضلاع آنها المان های بیشتری موجود بودند. اساس کار آنها این گونه بود که آن اضلاع خاص در نواحی با گرادیان های بالا قرار بگیرند.

Yao وهمکاران(2005) با استفاده از شبکه عصبی به مش بندی میدان می پرداختند.LoوWang (2005) بااستفاده از روش advancing front circle packing به مش بندی میدان های نامحدود می پرداختند. الگوریتم ارائه شده توسط آنها به گونه ای بود که میدان مش بندی شده دارای المان هایی با سایزهای متفاوت بود.

Kaminsky وهمکاران (2005) با استفاده از مزایای روش Voxel و همچنین با استفاده از تغییر دادن مکان گره ها به منظور تولید المان هایی با هندسه بهتر میدان را مش بندی می کردند.

Hongmei وGuoqun (2009) با استفاده از ویژگی های هندسی میدان، میدان را به صورت وفقی مش بندی می کردند.

Jangوهمکاران(2008) ابتدا میدان را به بخش هایی با هندسه ساده تر تجزیه می کردند و سپس هریک را مش بندی می کردند.

Zhangوهمکاران (2008) با استفاده از روشی که در آن به تخمین مرز میدان می پرداخت اقدام به مش بندی میدان می کردند. اساس کار آن ها بر قرارگیری نقاط گرهی روی مرز میدان و در مکان های مناسب، بنا نهاده شده بود.

Leeوهمکاران(2003) برای مش بندی میدان های مقید با استفاده از المان های چهارضلعی، از روش Constrained Delaney Triangulation و الگوریتمQ morph به صورت همزمان استفاده کرد.

Schimpf وهمکاران (1996) برای مش بندی میدان الگوریتمی را ارائه کردند که در آن از تصاویر بافت ها به منظور تولید مش های نامنظم استفاده شد. در روش آنها پیوستگی در داخل میدان از طریق مقید کردن جواب در نقاط گرهی نامنظم بدست می آمد.

Wangو Moriwaki (2003) برای مش بندی میدان الگوریتمی را براساس تعویض سلول های کدبندی شده ارائه کردند. در روش کار آنها پس از اینکه میدان برای بار اول مش بندی شد. به گره ها و اضلاع المان ها برچسب های مناسبی تخصیص داده می شود. این برچسب گذاری ها برای تسهیل انتخاب المان های مناسب در فرآیند مش بندی به کار می رفتند.

Coupezوهمکاران(2000) وسیله اصل حداقل فضای اشغال شده میدان رامش بندی می کردند. روش آن ها براساس بهینه سازی موضعی توپولوژی مش ها بنا نهاده شده بود.

Boussettaوهمکاران(2006) برای مش بندی وفقی میدان از بهینه سازی شکل استفاده می کردند.

Marcheix و Gueorguieva (1998) برای مش بندی میدان ناحیه ای را تحت عنوان ناحیه اثر تعریف کردند. در این ناحیه تولید گره و کنترل عدم تقاطع اضلاع المان ها صورت می گرفت.

Blackerوهمکاران(1991) برای مش بندی میدان های دو بعدی از الگوریتمی تحت عنوان الگوریتم فرش کردن (یا پوشاندن) استفاده می کردند.

Wen وهمکاران(2006) برای مش بندی وفقی میدان و پیش گیری از اعوجاج شدید المان ها روشی را ارائه دادند که در آن از کنترل زوایای اولیه و کنترل قیود مش بهره می جست .

Saxenaو Perucchio (1990) ابتدا میدان را بوسیله اشکال منظمی تقریب می زدند. در روش کار آنها مهم نبود که آیا این اشکال یکدیگر را قطع می کنند یا نه و یا اینکه اشکال از مرز ناحیه بیرون می زنند یا نه . بلکه صرفاً منظم بودن اشکال در اولویت قرار داشت. در مرحله بعد این اشکال را به المان ها تجزیه می کردند.

Leeو Joun (2008) برای مش بندی، ابتدا میدان را بوسیله المان های مثلثی و در حالت کلی مش بندی می کردند. سپس برای تک تک المان ها به منظم کردن هندسه می پرداختند. به گونه ای که مثلث بندی نهایی هم دارای سازگاری توپولوژیکی می بود و هم ضوابط مثلث بندی دلانوی را رعایت می کرد.

Chengو Topping (1998) برای مش بندی وفقی میدان از المان های انتقالی استفاده کردند. آنها المان های انتقالی جدیدی بنام fission elements تولید کردند.

Shimadaو Gossard (1998) روشی را برای مش بندی اتوماتیک میدان بوسیله المان های مثلثی ارائه کردند. در روش آنها هندسه میدان و تابعی که مکان قرارگیری گره ها را مشخص می کرد به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است.

Angladaوهمکاران (1999) برای مش بندی میدان روشی را ارائه کردند که در آن میدان توسط المان های مثلثی مش بندی شده و در نتیجه بوسیله مجموع این المان ها تقریب زده می شد. آن ها در روش خود خطای این تقریب را به عنوان ورودی در نظر می گرفتند.

Lauوهمکاران(1997) برای مش بندی میدان با استفاده از المان های چهارضلعی ابتدا یک مثلث بر روی مرز میدان ایجاد می کردند. سپس مثلث بعدی را به گونه ای در نظر می گرفتند که از حذف ضلع مشترک آن دو المان چهارضلعی ایجاد شود.

Yokosukaو Imai (2009) با بسط و گسترش دادن الگوریتم ریزتر کردن ورونی به مش بندی میدان با مرزهای منحنی می پرداختند.

Liangوهمکاران(2010) برای مش بندی میدان از روش quadtree – based method استفاده می کردند. روش آنها اینگونه بود که ابتدا تعداد متناهی نقطه داخل میدان تعریف می کردند و سپس با استفاده از این نقاط المان های چهارضلعی درست می کردند که زاویه بین اضلاع آنها بیشتر از ٤٥° و کمتر از ١٣٥° بود.

Maza وهمکاران(1999) برای مش بندی میدان با استفاده از المان های چهارضلعی ابتدا از طریق روش frontal میدان را با المان های مثلثی افراز می کردند. سپس هر دو المان مثلثی مجاور را با هم ادغام و از آنها المان های چهارضلعی می ساختند. و در نهایت با یک سری تغییرات توپولوژیکی مش بندی میدان را بهینه می کردند که در نتیجه آن نقاط تکین از بین می رفت.

Vartziotis وهمکاران (2008) برای مش بندی میدان با استفاده از المان های مثلثی، ابتدا میدان را مثلث بندی می کردند. سپس با تبدیل تک تک المان ها که سبب حرکت نقاط گرهی می شد به میدان مش بندی شده و هموار می رسیدند.

Haber وهمکاران (1989) برای مش بندی نواحی اطراف ترک ها از نگاشت های تطبیقی استفاده می کردند. این نگاشت ها سبب مش بندی بهینه در اطراف ناحیه ترک می شد.

Korošec وهمکاران (2004) پس از آنکه میدان را مش بندی کردند با استفاده از الگورتیم کلونی – مورچگان به هموارسازی میدان مش بندی شده می پرداختند.

Kruithofو Vegter (2007) الگوریتمی ارائه کردند که به وسیله آن رویه های صفحه ای را با استفاده از مش هایی که از لحاظ توپولوژیکی مناسب می بودند ، تقریب می زد . پیچیدگی الگوریتم ارائه شده به وسیله آنها از نوع خطی بود .

Sheffer (2001) روشی را برای ساده سازی میدان پیش از مش بندی ارائه کرد . در روش او بر اساس متد خوشه بندی از تکنیک آنالیز موضعی میدان استفاده می شد .

Dhondt (2001) بر اساس مثلث بندی سطح سازه ، میدان را به وسیله یک میدان بزرگ تر مش بندی شده که در آن از ۲۰ گره استفاده شده بود ، محاط می کرد . در مرحله بعد المانهایی از میدان که با میدان ۲۰ گره ای تقاطع داشتند انتخاب و اصلاح می شدند .

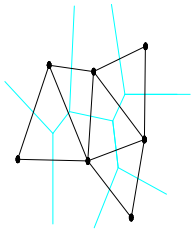
۱-۳-مش بندی میدان به روش دلانوی (Delauney Triangulation Method)

روش دلانوی برای مش بندی میدان و تولید المان های مثلثی به کار می رود(George, Frey(2008))و (Borouchaki, George) (1996)) .ابتدا در میدان تعداد متناهی نقطه در نظر گرفته می شود و سپس با استفاده از دیاگرام ورونی میدان را به تعدادی ناحیه افراز می شود . و در نهایت به ترتیبی خاص میدان مثلث بندی می شود .

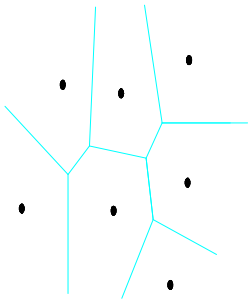
طبق دیاگرام ورونی اگر مجموعه ای از نقاط یک صفحه مفروض باشند ، این دیاگرام صفحه را به زیر ناحیه هایی مانند V_i افراز می کند به گونه ای که :

$$V_i = \{ P \quad : \quad d (P , P_i) \leq d (P , P_j) , \forall j \neq i \} \qquad (۱)$$

در رابطه بالا $d (P , P_i)$ فاصله نقطه P_i از نقطه P می باشد



شکل ۱: مثلث بندی دلانوی



شکل ۲: دیاگرام ورونی

رابطه(۱)به ما می گوید که دیاگرام ورونی میدان را به تعدادی زیر ناحیه افراز می کند که این زیر ناحیه ها شامل بی نهایت نقطه مانند P هستند به گونه ای که به ازای هر دو نقطه دلخواه و متمایز P_i و P_j فاصله نقطه P از نقطه P_i کمتر مساوی با فاصله نقطه P از نقطه P_j است . حال با توجه به اینکه عمود منصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله می باشند در نتیجه تساوی در رابطه (۱) زمانی رخ می دهد که نقطه P روی عمود منصف خط واصل ما بین دو نقطه P_i و P_j قرار گرفته باشد . به عبارتی دیگر این خط عمود منصف مرز ناحیه ایجاد شده توسط دیاگرام ورونی را برای ما مشخص می کند . زیرا اگر نقطه P در سمت راست این عمود منصف قرار گیرد آنگاه فاصله آن از P_j کمتر از فاصله آن از P_i می شود و رابطه (۱) نقض می گردد .

پس ازآنکه دیاگرام ورونی ایجاد شد از رئوس موجود در میدان به ترتیب دو تا دو تا راس انتخاب می کنیم این دو تا راس باید به گونه ای باشد که هر یک در یک ناحیه مجزا و مجاور به هم قرار گرفته باشند . هر سه جفت نقطه با ویژگی فوق سه ضلع المان مثلثی را تشکیل می دهند . با انتخاب این رئوس و وصل کردن آنها میدان مثلث بندی می شود .

۱-۳-۱- تعاریف اولیه

Cavity : اگر P نقطه ای دلخواه در صفحه یک مثلث باشد . آنگاه مجموعه ای از المانها که دایره محیطی آنها شامل نقطه P است ، را Cavity می نامند .

Ball : مجموعه ای از المان ها که از وصل کردن نقطه P با دو راس از دو ضلع دورتر از المانهای Cavity حاصل می شود را Ball می گویند .

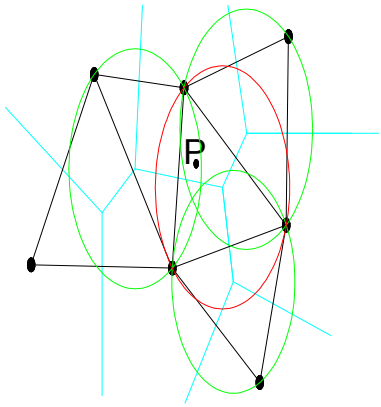
قضیه : اگر T_i مثلث بندی دلانوی i تا نقطه باشد ، می توان با وارد کردن نقطه جدید P یک مثلث بندی دلانوی جدید بدست آورد . به این صورت که :

$$T_{i+1} = T_i - C_p + B_p \qquad (۲)$$

C_p : Cavity مربوط به نقطه P

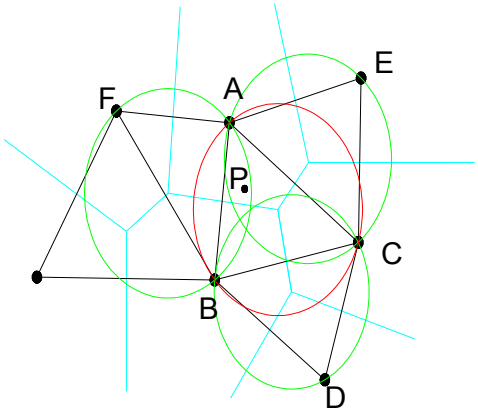
B_p : Ball مربوط به نقطه P

در شکل زیر مثلث بندی دلانوی میدانی مفروض است . قصد داریم با وارد کردن نقطه P میدان را مجدداً مش بندی کنیم به نحوی که مثلث بندی نهایی نیز از نوع دلانوی باشد .

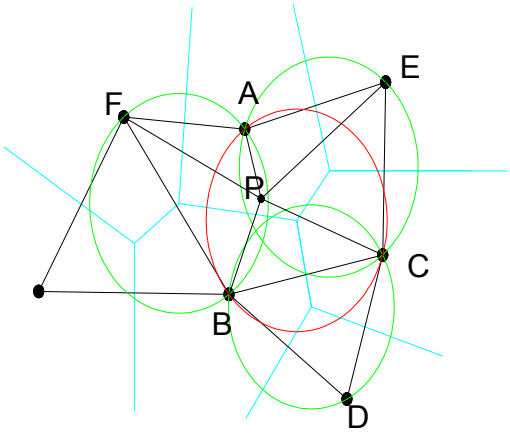


شکل ۳: مثلث‌بندی دلانوی میدان با وارد کردن نقطهٔ جدید P

دوایر سبز رنگ ، دوایر محیطی مثلث های AFB و AEC و BCD هستند . بنابراین المانهای AFB و AEC ، Cavity می باشند . با وصل کردن نقطه P به نقاط F، A و B به ترتیب المانهای جدید AFP و BFP تولید می شوند . به همین ترتیب نیز با وصل کردن نقطه P به نقاط A و C المانهای جدید PAE و PEC تولید می شوند . حال طبق فرمول (۲) :



شکل ٤: مثلث‌بندی دلانوی میدان با وارد کردن نقطهٔ جدید P



شکل ٥: تولید المان‌های جدید در حضور نقطهٔ P

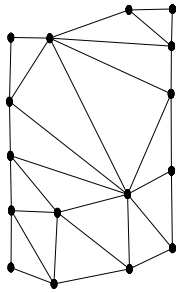
بنابراین مثلث بندی دلانوی میدان با حضور نقطه جدید P شکل گرفت .

۱-۳-۲- مثلث بندی دلانوی مقید (Constianed Delannuy Triangulation)

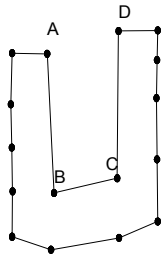
در مثلث بندی دلانوی که تا بحال به آن اشاره شد هیچ گونه قید یا الزامی مبنی بر اینکه اضلاع برخی از مثلث ها در چه جهت یا چه اندازه ای باشند وجود نداشت . به عبارتی دیگر تنها مثلث بندی دلانوی تعدادی نقطه مفروض بود و در بین این نقاط هیچ گونه خطی وجود نداشت .

در شکل زیر سمت چپ قصد مش بندی ناحیه ای که از این نقاط به دست آمده است را داریم . مثلث بندی دلانوی ما باید به گونه ای باشد که حتماً شامل خطوط AB و BC و CD نیز باشد . همانطور که در شکل راست مشاهده می شود مثلث بندی دلانوی صورت پذیرفته،اما شرط بالا را ندارد . برای حل این مشکل از تکنیک جابجایی یا تعویض (swapping) استفاده می کنیم . بدین صورت که آن ضلعی از مثلث که ضلع AB را قطع میکند پیدا می کنیم . ضلع مفروض ، ضلع مشترک دو مثلث دیگر می باشد . در نتیجه این دو

مثلث چهار ضلعی می سازند . که ضلع مشترک ، یک قطر آن است . در این روش (swapping) این قطر را حذف و قطر دیگر چهار ضلعی را جانشین می کنیم .



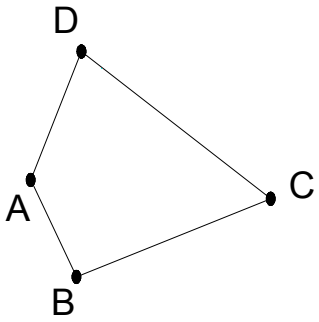
شکل٦:مثلث‌بندی دلانوی میدان



شکل۷:میدانی مفروض همراه با قیود

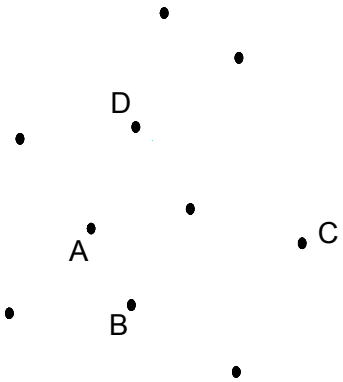
با ادامه این روند و یافتن اضلاعی که ضلع AB را قطع می کنند ، مثلث بندی دلانوی مقید بدست می آید . یعنی مثلث بندی ناحیه به گونه ای که در آن حتماً مثلث هایی (المانهایی) با اضلاع BC، AB و CD وجود داشته باشد .

مثال : مطلوب است مثلث بندی دلانوی ناحیه زیر :



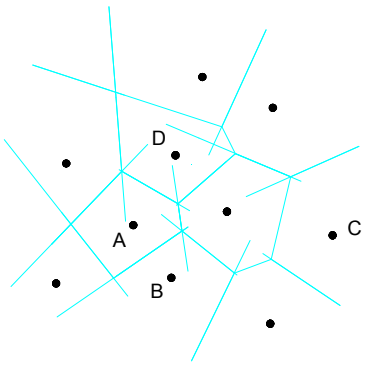
شکل ۸: میدان چهارضلعی

گام اول – ابتدا تعدادی نقطه که شامل نقاط A و B و C و D نیز است را در صفحه در نظر میگیریم



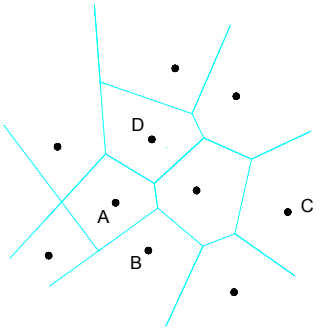
شکل ۹: تولیدنقاط جدید علاوه بر نقاط A,B,C,D

گام دوم – در مرحله بعد دیاگرام ورونی میدان را ترسیم می کنیم



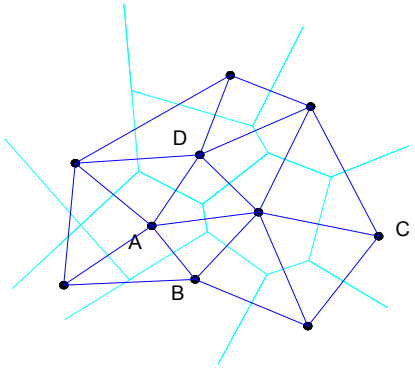
شکل ۱۰: دیاگرام ورونی میدان همراه با خطوط اضافه

با از بین بردن خطوط اضافی شکل زیر حاصل می شود که دیاگرام ورونی میدان است .



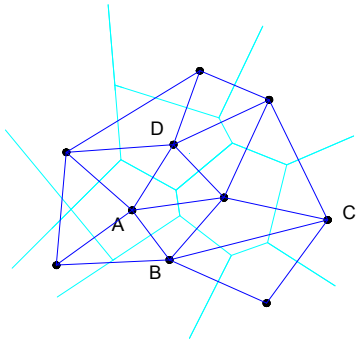
شکل ۱۱: دیاگرام ورونی میدان پس از بین رفتن خطوط اضافه

گام سوم – به ترتیب سه نقطه سه نقطه از میدان انتخاب می کنیم. این سه نقطه باید به گونه ای انتخاب شوند که عمود منصف هر دوتایی از آنها در یک نقطه به هم برسند. شکل زیر مثلث بندی دلانوی میدان است:

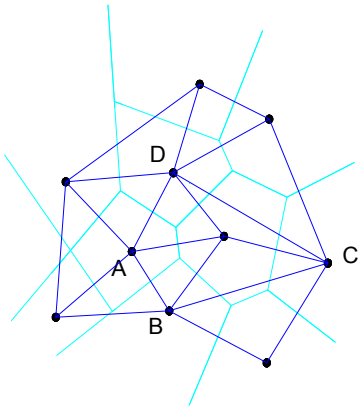


شکل ۱۲: مثلث‌بندی دلانوی میدان

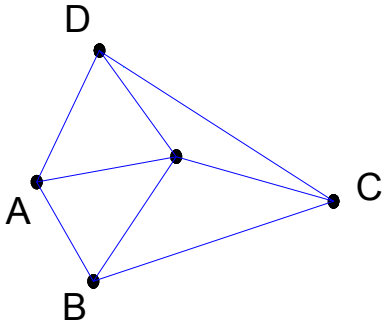
گام چهارم – با استفاده از تکنیک جابه جایی به میدان مش بندی شده مطلوب می رسیم .



شکل ۱۳: استفاده از تکنیک جابجایی برای تولید خطوط قید



شکل ۱٤: استفاده از تکنیک جابجایی برای تولید خطوط قید



شکل ۱۵: مثلث‌بندی دلانوی میدان مقید

فصل دوم

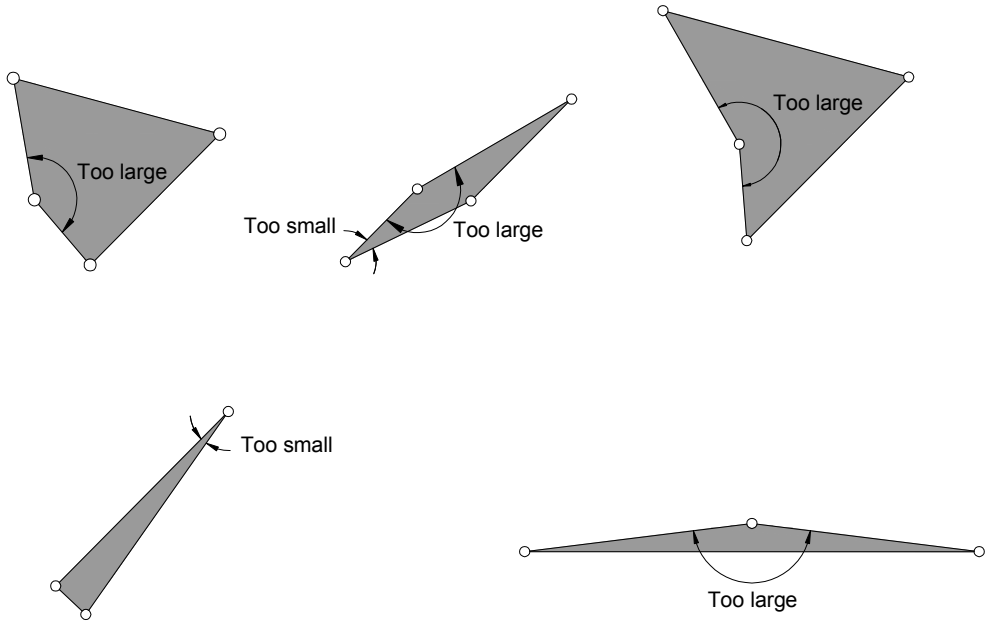
تئوری

۲-۱- مقدمه

افراز میدان به تعدادی ناحیه را مش‌بندی[1] میدان می‌گویند. مش‌بندی میدان اولین گام در حل مسئله به روش اجزاء محدود می‌باشد. در حین مش‌بندی میدان به تعدادی المان با رفتار و توپولوژی مشخص (منظور از توپولوژی شکل هندسی المان می‌باشد: مثلثی، مستطیلی، چهار ضلعی....) تجزیه می‌شود. برای هر المان پارامتری را به عنوان سایز المان تعریف می‌کنیم که عبارت است از اندازه بزرگترین ضلع المان.

مکان قرارگیری المان‌ها، سایز المان‌ها در آن مکان خاص و تعداد المان‌ها همگی در همگرایی و یا واگرایی به سمت جواب‌های درست مؤثر می‌باشد.

زاویهٔ حادث بین اضلاع هر المان نیز به عنوان یک پارامتر تأثیرگذار در دقت جواب‌ها محسوب می‌گردد. به عنوان یک قاعدهٔ کلی این زاویه نباید کمتر از $^{\circ}$۱۵ و بیشتر از $^{\circ}$۱۶۵ باشد(Reddy(2006)) در شکل‌های زیر تعدادی المان مشاهده می‌شود که از این نظر المان‌های مناسبی تلقی نمی‌شوند. به عبارت دیگر مش‌بندی میدانی که شامل این المان‌هاست نیز مناسب نمی‌باشد:



شکل ۱۶: نمونه‌ای از المان‌هایی که از لحاظ هندسی نامناسب می‌باشند

با توجه به توضیحات فوق می‌توان فهمید که مش‌بندی میدان مهم‌ترین گام در حل مسئله به روش اجزاء محدود می‌باشد.

[1] - Mesh generation