بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان


دانشکده علوم

گروه ریاضی


پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی گرایش آنالیز

عنوان:

# نتایجی در نظریه‌ی اختلال عملگرهای یکنوای ماکسیمال و m- افزایشی در فضاهای باناخ


استاد راهنما:

دکتر روح الله جهانی‌پور

توسط:

عذرا خلیلیان



اردیبهشت ماه ۱۳۸۵

باسمه تعالی

دانشگاه کاشان

تاریخ :

شماره:

پیوست:

نام و نام خانوادگی دانشجو : **عذرا خلیلیان** شماره دانشجویی : ۸۲۱۶۰۰۰۳

رشته : **ریاضی** دانشکده : **علوم**

عنوان پایان نامه : **نتایجی در نظریه اختلال عملگرهای یکنوای ماکزیمال و m – افزایشی در فضاهای باناخ**

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارایه می‌گردد.دفاع از پایان نامه در تاریخ ۸۵/۲/۲۰ مورد تأیید و ارزیابی هیأت داوران قرار گرفت و با نمره به عدد: ۱۹,۵۵ به حروف: نوزده ممیز پنجاه و پنج صدم و درجه عالی به تصویب رسید.

# اعضاء هیأت داوران

| عنوان | نام و نام خانوادگی | مرتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| ۱. استاد راهنما : | دکتر روح‌اله جهانی‌پور | استادیار | |
| ۲. متخصص و صاحب نظر از داخل دانشگاه : | دکتر خیراله پوربرات | استادیار | |
| ۳. متخصص و صاحب نظر خارج از دانشگاه : | دکتر صغری نوبختیان | استادیار | |
| ٤. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : | دکتر سیّدمهدی قریشی | دانشیار | |

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که همواره مشوق من بوده اند

و

آن هایی که دوستشان دارم .

حمد و سپاس خدای را که توفیق کسب دانش و معرفت را به مـا عطـا فرمـود. در اینجـا وظیفه ی خود می دانم که از تمامی اساتید گرامی بخصوص اسا تیـد دوره ی کارشناسـی ارشد که در طول دو سال گذشته مرا در تحصیل علم و معرفت و فضـایل اخلاقـی یـاری نموده اند، تقدیر و تشکر نمایم.

از استاد گرامی و بزرگوار جناب آقای دکتر جهانی پور که مرا در انجام تحقیق، پژوهش و نگارش این پایان نامه یاری کردند، نهایت تشکر و سپاسگذاری را دارم.

همچنین از خانم دکتر صغری نوبختیان به عنوان استاد داور مدعو خارج از دانشـگاه کـه این پایان نامه را مورد مطالعه قرار داده و در جلسه ی دفاعیه شرکت نموده اند، تشکر مي کنم.

# فهرست مندرجات

# چکیــده


فرض کنید $X$ یک فضای باناخ حقیقی و $G$ زیرمجموعه‌ی کراندار، باز و محدب از $X$ باشد. در این پایان‌نامه حل معادله‌ی نقطه ثابت $x \in Tx + Cx$ در $D(T) \cap \bar{G}$ در نظر گرفته شده است که $T : D(T) \subset X \longrightarrow 2^X$ عملگر $m$ ـ افزایشی و احتمالاً ناپیوسته و عملگر $C : \bar{G} \longrightarrow X$ کاملاً پیوسته است. فرض می‌کنیم $X$ به‌طور یکنواخت محدب باشد، $D(T) \bigcap G \neq \emptyset$ و $\bar{G} \subset (T+C)(D(T) \bigcap \partial G)$. نتیجه‌ی برودر[1] در مورد عملگرهای تک مقداری $T$ که به‌طور یکنواخت پیوسته‌اند و یا پیوسته‌اند ولی $X^*$ به‌طور یکنواخت محدب است به موارد حاضر گسترش پیدا کرده است. روش برودر را در مورد این مجموعه‌ها نمی‌توان به‌کار برد، حتی در موارد تک مقداری زیرا رده‌ی هومومورفیسم‌های مجاز وجود ندارد. فرض کنید

$$\Gamma = \{\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \beta(r) \longrightarrow 0, \qquad r \longrightarrow \infty\}$$

اثر شرایط کرانداری ضعیف از نوع $\langle u + Cx, x\rangle \geq -\beta(\|x\|)\|x\|^2$ بر روی برد عملگرهای $T + C$ که $T$ عملگر $m$ـ افزایشی و یا یکنوای ماکسیمال است، در این پایان نامه مورد بررسی قرار خواهدگرفت. در این دستور، $\beta \in \Gamma$، و برای $x \in D(T)$ با نرم به اندازه‌ی کافی بزرگ و $u \in Tx$. نتایج چند ـ مقداری گوناگونی شامل حل $0 \in Tx + \lambda Cx$ که $(\lambda, x) \in (0, \infty) \times D(T)$ ارائه شده است.


---

[1] Browder

# مقدمه

این پایان نامه به این صورت سازمان‌دهی شده‌است. در فصل اول مطالبی مقدماتی از آنالیز تابعی را برای یادآوری و همچنین ارجاعات بعدی خواهیم آورد. به‌ویژه نگاشت‌های چند ـ مقداری و مفهوم درجه‌ی توپولوژیک را معرفی می‌کنیم. به‌علاوه اشاره‌ای می‌کنیم به بعضی از خواص فضاهای سوبولف که در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ظاهر می‌شوند. یکی از اهداف ما در فصل دوم، به‌دست آوردن نتایجی مشابه با قضیه‌ای در [۵] درباره‌ی اختلال عملگرهای $m$ ـ افزایشی ناپیوسته و احتمالاً چند ـ مقداری $T : D(T) \subset X \to 2^X$ است. سپس از این نتیجه برای به‌دست آوردن قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت جدیدی برای نگاشت $T + C$ که $T$، $m$ ـ اتلافی است، استفاده می‌کنیم. لازم به ذکر است که روش برودر را در هیچ کدام از این نتایج نمی‌توان به‌کار برد حتی در حالت تک مقداری، زیرا عملگرهای افزایشی قوی و ناپیوسته به رده‌ی همانریختی‌های مطرح شده در مرجع [۵] تعلق ندارند. از طرف دیگر در قضیه‌ی مذکور در [۵]، می‌توانیم $T$ را یک عملگر پیوسته‌ی افزایشی قوی بگیریم. این موضوع امکان‌پذیر است زیرا نتیجه‌ی دیملینگ در [۸] اذعان می‌کند که نگاشت افزایشی قوی پیوسته، مجموعه‌های باز در دامنه‌شان را به مجموعه‌های باز تصویر می‌کند، پس به رده‌ی همانریختی‌های مجاز تعلق دارد. در برهان قضیه‌ی ۴.۲ درمی‌یابیم که شرایط جدید برای پوشایی نیاز داریم، از جمله شرط مرزی از نوع:

$$\langle u + Cx, j \rangle \geq -\beta(\|x\|)\|x\|^2$$

برای هر $x \in D(T)$ با نرم به اندازه‌ی کافی بزرگ و هر $u \in Tx$ و $j \in Jx$ای. در ضمن وقتی $\rho \longrightarrow \infty$ داریم $\beta(\rho) \to 0$. این شرط مرزی را می‌توان با یک شرط رشد روی مجموع $T + C$

ترکیب کرد و نتایجی از نوع $\overline{R(T+C)}=X$ و $R(T+C)=X$ به‌دست آورد. در این فصل همچنین وجود مقدار ویژه‌ی خاصی را برای جفت $(T,C)$ بررسی می‌کنیم. این مقادیر ویژه برابر با $\lambda + ۱$ هستند که $\lambda$ در شرایط مرزی متضمن $T$ و $C$ و نیز در شرط فشردگی عملگر $(\lambda T+I)^{-۱}$ ظاهر می‌شود. در قضیه‌ی (۲.۱۰) ازاین ویژگی برای مقدار ویژه استفاده می‌کنیم تا نتیجه‌ی جدیدی درباره‌ی وجود صفر برای مجموع $T+C$ بیابیم. فصل ۳ شامل گسترشی از نتایج به‌دست آمده در فصل قبل درباره‌ی اختلال در عملگرها به حالت عملگرهای یکنوای ماکسیمال $T:D(T)\subset X\to ۲^{X^*}$ می‌باشد. قضیه‌ی (۳.۳) شامل توسیعی از نتیجه‌ی اصلی در [۲۸] در مورد عملگرهای $m$ ـ افزایشی است. روش ما در این فصل عبارت است از استفاده از تقریب‌های پازی ـ کراندال ـ برزیس [۲]، $J_\lambda$ و $T_\lambda$ که در [۴] ارائه شده است. تفاوت‌های عمده‌ای بین برهان قضیه در [۲۸] و قضیه‌ی (۳.۳) وجود دارد. قضیه‌ی (۳.۶) مسأله‌ای را حل می‌کند که بر اساس آن معلوم می‌شود که چه موقع یک مجموعه در برد $T+C$ واقع می‌شود. این نتایج جالب، محتوای [۲۹] را گسترش می‌دهند و در نهایت به نتیجه‌ی (۳.۹) منجر می‌شوند که شرط پوشایی جدیدی را برای اختلال‌های کاملاً پیوسته از عملگرهای یکنوای ماکسیمال ارائه می‌دهد. در اینجا، مسأله‌ی اختلال از نوع

$$\circ \in Tx+Cx$$

مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن $T:D(T)\subset X\to ۲^{X^*}$ یکنوای ماکسیمال و $C:D(T)\longrightarrow X^*$ دست‌کم کراندار است. در این فصل، فضای $X$ انعکاسی و $X$ و $X^*$ به‌طور یکنواخت محدب موضعی می‌باشند. در فصل ۴ به مسأله وجود مقادیر ویژه‌ی مثبت برای جفت $(T,C)$ می‌پردازیم. قضیه‌ای را که مشابهی برای قضیه‌ی ۲.۵ در [۱۶] است، بیان می‌کنیم که این قضیه، قضیه‌ی ۳.۳ در [۱۶] را بهبود می‌بخشد. در هر دو نتیجه از تقریب‌های [۴] استفاده می‌شود. در همین فصل نگاشت $\tilde{J}x\equiv \|x\|^p x$ را برای مطالعه‌ی مسائل غیرخطی در فضای هیلبرت حقیقی $H$ معرفی می‌کنیم. نسخه‌ی بعد ـ متناهی این نگاشت، به‌وسیله‌ی هاست [۳] و نویسنده مقاله‌ی اصلی در [۳۰] به‌منظور

[۲] Brezis-Crandal-Pazy

[۳] Host

مطالعه‌ی اختلال‌های مشخصی از مسائل کنترلی شامل عملگرهای افزایشی مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور ثابت کردن اثربخشی این روش، صورتی تعمیم‌یافته از قضیه‌ی (۲.۶) و قضیه‌ی (۳.۱) را اثبات می‌کنیم. از اینجا، نتایج مشخصی را درباره‌ی پوشایی مجموع $T + C$ که شامل خود عدد $p$ است به‌دست می‌آوریم. بنابراین خانواده‌ای تک پارامتری از محک‌های پوشایی را در فضاهای هیلبرت در اختیار داریم. در ضمن این فصل شامل چند مثال از عملگرهای $T$ یا $C$ است که در چندین مثال از معادله‌ی مشتقات جزئی به‌کار برده می‌شود.

# فصل ۱

# مفاهیم و تعاریف اولیه

این فصل شامل پنج بخش است، که در آن برخی مطالب مهم آنالیز تابعی ذکر شده است که در فصل‌های بعدی به کار رفته‌اند. لازم به ذکر است که در سراسر این پایان‌نامه، فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شده‌اند. همچنین به بیان پیش نیازهایی از آنالیز تابعی همچون، قضیه‌ی هان ـ باناخ و نتایج آن و برخی تعاریف و قضایایی که درفصل‌های آینده به آنها نیاز داریم، می‌پردازیم. در بخش دوم عملگرهای یکنوا و یکنوای ماکسیمال را معرفی می‌کنیم و از این تعاریف و قضایا در فصل ۳ در حل اختلالهای عملگرهای یکنوا و یکنوای ماکسیمال استفاده می‌کنیم. ویژگیهایی از عملگرهای افزایشی و $m$ ـ افزایشی را که در فصل ۲ در حل معادلات شامل اختلالهایی از این نوع عملگرها به کار برده می‌شوند، معرفی می‌کنیم. مثال‌هایی از معادلات پاره‌ای شامل این عملگرها خواهیم آورد که در آن‌ها فضاهای سوبولف ظاهر می‌شوند. لذا بخش پایانی به معرفی فضاهای سوبولف و خواص آن‌ها اختصاص دارد. در این پایان نامه $X$ معرف یک فضای باناخ حقیقی و $X^*$، معرف فضای دوگان آن یعنی فضای عملگرهای حقیقی ـ مقدار، خطی و کراندار روی $X$ است. نرم هر دوفضای $X^*$ و $X$ را با نماد مشترک $\|\cdot\|$ نمایش می‌دهیم.

## ۱—۱ قضیه‌ی هان ـ باناخ و نتایج آن

در این بخش قضیه‌ی اساسی هان ـ باناخ و بعضی از مهمترین نتایج آن را بیان می‌کنیم. زمینه‌ی بحث در این قضیه ونتایجش فضاهای کلی باناخ هستند.

**تعریف ۱.۱** یک فضای برداری نرمدار $X$ با نرم $\|\cdot\|$ را که نسبت به متر ناشی از نرم خود کامل باشد، فضای باناخ می‌نامیم. در حقیقت $X$، یک فضای باناخ است هرگاه برای هر دنباله‌ی کشی $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ در $X$ عضو $x\in X$ موجود باشد به طوری که $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n-x\|=۰$.

اگر نرم تعریف شده روی یک فضا از یک ضرب داخلی ناشی شده باشد، آن فضا را فضای ضرب داخلی می‌نامیم. به‌خصوص فضاهای هیلبرت یعنی فضاهای ضرب داخلی کامل، تعمیم طبیعی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ به بعد نامتناهی‌اند.

**تعریف ۲.۱** فرض کنید $H$ یک فضای برداری و تابع $(\cdot,\cdot):H\times H\longrightarrow\mathbb{R}$ با خواص زیر موجود باشد:

۱) برای هر $x_۱,x_۲,y\in H$ و $\alpha_۱,\alpha_۲\in\mathbb{R}$

$$(\alpha_۱x_۱+\alpha_۲x_۲,y)=\alpha_۱(x_۱,y)+\alpha_۲(x_۲,y);$$

۲) برای هر $x,y\in H$، $(x,y)=(y,x)$؛

۳) برای هر $x\in H$، $(x,x)\geq ۰$ و $(x,x)=۰$ اگر و تنها اگر $x=۰$.

دراین صورت $(x,y)$ را ضرب داخلی $x$ و $y$ می‌گوئیم و توسط آن یک نرم روی $H$ به صورت $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ تعریف می‌کنیم. اگر $H$ نسبت به متر ناشی ازاین نرم کامل باشد، $H$ را فضای هیلبرت می‌نامیم.

در حقیقت هر فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی کامل است و بنابراین یک فضای باناخ است. اکنون قضیه‌ی هان ـ باناخ [۱] را بیان می‌کنیم که جزٔ مهمترین قضایای آنالیز تابعی است و حاکی از

[۱] Hahn - Banach

تعداد کافی تابعک خطی روی یک فضای باناخ است. به خصوص دو نتیجه‌ی بعد از این قضیه برای ما اهمیت دارد.

**قضیه ۳.۱** (**هان ـ باناخ** ) فرض کنیم $P : X \to \mathbb{R}$ نگاشتی با خواص زیر باشد:

$$P(\lambda x) = \lambda P(x), \qquad \forall x \in X, \forall \lambda > 0$$

و

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y), \qquad \forall x, y \in X$$

از طرف دیگر فرض کنیم که $G \subseteq X$ یک زیرفضای برداری $X$ و $g : G \to \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی باشد به طوری که

$$g(x) \leq P(x), \qquad \forall x \in G$$

در این صورت یک نگاشت خطی $f$ روی $X$ موجود است که $g$ را توسعه می‌دهد، یعنی

$$f(x) = g(x), \qquad \forall x \in G$$

و همچنین

$$f(x) \leq P(x), \qquad \forall x \in X$$

**اثبات.** به [۴۳] رجوع کنید. □

دو نتیجه‌ی مهم زیر که از قضیه‌ی هان ـ باناخ حاصل می‌شود، در مباحث آتی به کار می‌آیند. اثبات هر دو نتیجه در [۴۳] یافت می‌شوند.

**نتیجه ۴.۱** فرض کنیم $G$ یک زیرفضای برداری از $X$ و $g : G \to \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی و پیوسته با نرم $\| g \|_{G^*} = \sup\limits_{\substack{x \in M \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)|$ باشد. در این صورت $f \in X^*$ موجود است که $g$ را توسعه می‌دهد و $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{G^*}$.

**نتیجه ۵.۱** برای هر $x_\circ \in X$ می‌توان $f_\circ \in X^*$ را پیدا کرد که $\|f_\circ\| = \|x_\circ\|$ و $(f_\circ, x_\circ) = \|x_\circ\|^2$.
اینجا و هر جای دیگر اگر $f \in X^*$ و $x \in X$، اثر $f$ روی $x$ را به جای $f(x)$ بانماد $(f,x)$ یا $(x,f)$ نشان می‌دهیم.

روی $X^*$ سه نوع توپولوژی مرسوم است: یکی توپولوژی قوی که از نرم فضا ناشی می‌شود، دومی توپولوژی ضعیف و سومی توپولوژی ضعیف ـ ستاره. با این حال به‌سادگی دیده می‌شود که اگر $X$ یک فضای برداری نرمدار انعکاسی باشد، آن‌گاه توپولوژی ضعیف و ضعیف ـ ستاره روی $X^*$ با هم یکی هستند. به‌علاوه در فضاهای متناهی ـ بعد هر سه توپولوژی بر هم منطبق می‌شوند. در زیر، این توپولوژی ها را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۶.۱** فرض کنید $X$ یک فضای برداری نرمدار باشد. کوچکترین توپولوژی روی $X$ را که تمام نگاشت‌های $\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ باضابطه‌ی $\varphi_f = (f,x)$ و$f \in X^*$، نسبت به آن پیوسته هستند، توپولوژی ضعیف روی $X$ می‌نامیم. همچنین کوچکترین توپولوژی روی $X^*$ که همه‌ی نگاشت‌های $\psi_x : X^* \to R$ با ضابطه‌ی $\psi_x(f) = (f,x)$ به ازای هر $x \in X$، نسبت به آن پیوسته هستند، توپولوژی ضعیف ستاره روی $X^*$ نامیده می‌شود. اگر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در توپولوژی ضعیف به سمت $x$ همگرا باشد، می گوییم $\{x_n\}$ به طور ضعیف به سمت $x$ همگراست و می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ وقتی $n \to \infty$ و به همین ترتیب برای همگرایی در توپولوژی ضعیف ستاره می‌نویسیم $x_n \rightharpoondown x$ وقتی $n \to \infty$.

می‌دانیم توپولوژی قوی همان توپولوژی حاصل از نرم فضاست. در مطالب آینده منظور از پیوستگی، پیوستگی قوی می‌باشد. هرگاه $D \subseteq X$ آن‌گاه $intD$، $\partial D$، $\overline{D}$ به ترتیب نشان دهنده‌ی درون، نقاط مرزی و بستار $D$ در توپولوژی قوی هستند. مجموعه‌ی$D$ فشرده‌ی نسبی نامیده می‌شود، هرگاه $\bar{D}$ مجموعه‌ای فشرده باشد.

**تعریف ۷.۱** عملگر(نه لزوماً خطی ) $T : D(T) \subseteq X \to Y$ با دامنه‌ی $D(T)$ را که در آن $Y$ فضای باناخ دیگری است، کراندار می‌نامیم هرگاه زیرمجموعه‌های کراندار از $D(T)$ را بر روی

مجموعه‌های کراندار در $Y$ تصویر کند. این عملگر فشرده نامیده می‌شود هرگاه پیوسته باشد و زیرمجموعه‌های کراندار از $D(T)$ را به مجموعه‌های فشرده نسبی در $Y$ تصویر کند.

**تعریف ۸.۱** عملگر $T : D(T) \subseteq X \to Y$ که $Y$ فضای باناخ دلخواهی‌است، را نیم‌پیوسته[۲] نامیم اگر به‌طور قوی ـ ضعیف پیوسته باشد یا به عبارت دیگر برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(T)$ که $x_n \to x$ در $D(T)$، نتیجه بگیریم که $Tx_n \rightharpoonup Tx$. همچنین این عملگر را کاملاً پیوسته[۳] گوییم، هرگاه به طور ضعیف ـ قوی پیوسته باشد.

اگر عملگر $T$ پیوسته باشد، آن‌گاه نیم‌پیوسته نیز هست، زیرا اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(T)$ دنباله‌ای باشد که $x_n \to x$ آن‌گاه خواهیم داشت، $Tx_n \to Tx$ ولذا $Tx_n \rightharpoonup Tx$ و این، یعنی این‌که $T$ نیم‌پیوسته است. با همین استدلال می‌توان ثابت کرد که هر تابع کاملاً پیوسته، پیوسته نیز هست.

**تعریف ۹.۱** عملگر $T : D(T) \subset X$ را صادق در شرط لیپ‌شیتز خوانیم هرگاه عدد ثابتی مانند $K$ موجود باشد که $\|T(x) - T(y)\| \leq K\|x - y\|$ برای هر $x, y \in D(T)$. عدد $K$ را ثابت لیپ شیتز می‌نامیم. اگر $K = 1$، آن‌گاه $T$ بسط‌ناپذیر[۴] نامیده می‌شود.

نگاشت‌هایی که در ازای هر عضو از یک مجموعه به‌عنوان دامنه، بیش از یک مقدار در فضای هم‌دامنه را نسبت می‌دهند، در جاهای مختلفی از آنالیز و کاربردهای آن رخ می‌دهند. نمونه‌ی خیلی ساده‌ی آن در آنالیز مختلط است که هر عدد مختلط، $n$ تا ریشه‌ی $n$ ــ ام مختلط دارد، لذا تابع ریشه‌ی $n$ ــ ام یک نگاشت چند ــ مقداری است. در واقع نگاشت‌های چند ــ مقداری تابع نیستند، بلکه صرفاً رابطه‌اند، با این حال می‌توان به هر نگاشت چند ــ مقداری یک تابع مجموعه ــ مقداری نسبت داد. بر عکس نمودار هر تابع مجموعه ــ مقداری که در زیر تعریف خواهد شد، یک نگاشت چند ــ مقداری است. از این رو، این دو مفهوم را معادلاً به کار می‌برند. همچنین آزادانه اصطلاحات

[۲] Demicontinuous

[۳] Completely continuous

[۴] Nonexpansive

نگاشت یا عملگر و یا تابع چند ـ مقداری را هم به کار می‌بریم. این بند به تعریف موجودات ریاضی وابسته به توابع مجموعه ـ مقداری و بیان مفاهیم پیوستگی آن‌ها اختصاص دارد. اکنون به بیان برخی ویژگی‌های نگاشت‌های چند ـ مقداری می‌پردازیم. لازم به ذکر است، نگاشت‌هایی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، چند ـ مقداری و احتمالاً ناپیوسته می‌باشند.

**تعریف ۱۰.۱** فرض کنیم $T : D(T) \subseteq X \to 2^Y$ یک نگاشت چند ـ مقداری باشد. $D(T)$، $R(T)$ ترتیب نشان دهنده‌ی دامنه و برد هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D(T) = \{x \in X : Tx \neq \emptyset\}, \qquad R(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx$$

$G(T)$ نمودارنگاشت $T$ است که عبارت است از

$$G(T) = \cup_{x \in D(T)}\{[x,y] : y \in Tx\}$$

که زوج مرتب $[x,y]$، نمایش عناصر فضای حاصلضربی $X \times Y$ است.

حاصلضرب یک عدد حقیقی در عملگر $T$ و معکوس عملگر $T$ و مجموع دو عملگر $T_1$ و $T_2$ را که به ترتیب با $\lambda T$ و $T^{-1}$ و $T_1 + T_2$ نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(\lambda T) = D(T), \qquad (\lambda T)x = \lambda(Tx) = \{\lambda y : y \in Tx\}$$

$$D(T^{-1}) = R(T), \qquad T^{-1}(y) = \{x \in D(T) : y \in Tx\}$$

دامنه مجموع عبارت است از

$$D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$$

و به شکل

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x = \{y + z : y \in T_1x, z \in T_2x\}$$

تعریف می‌شود.

در مورد عملگرهای خطی تک ـ مقداری $T$ می‌توان بسته بودن را تعریف کرد که معادل است با این‌که اگر $x_n \in D(T)$، $x_n \to x$ و $y$ $T(x_n) \to$، آن‌گاه $x \in D(T)$ و $y = T(x)$. مشابه این تعریف در مورد نگاشت‌های چند ـ مقداری غیرخطی نیز وجود دارد.

**تعریف ۱۱.۱** عملگر $T : D(T) \subseteq X \to Y$ بسته نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(T)$ که $x_n \to x$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ که $y_n \in Tx_n$ و $y_n \to y$ نتیجه بگیریم $x \in D(T)$ و $y \in Tx$. اگر در تعریف فوق $y_n \rightharpoonup y$، آنگاه $T$ را نیم بسته نامیم. حال اگر $T$ را به عنوان زیر مجموعه‌ای از $X \times Y$ در نظر بگیریم بسته بودن، معادل با این می‌شود که اگر $[x_n, y_n] \in G(T)$، $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آنگاه $[x, y] \in G(T)$. به همین ترتیب برای نیم‌بسته بودن نیز می‌توان تعریف هم‌ارز مشابه با این ارائه کرد.

می‌دانیم که در مجموعه‌های محدب، پاره خط واصل بین دو نقطه‌از یک مجموعه کاملاً درخود آن مجموعه واقع می‌شود. فضاهای اکیداً محدب و به طور یکنواخت محدب و به طور یکنواخت محدب موضعی، از فضاهای بسیار مهم هستند که در این پایان‌نامه از آنها استفاده می‌شود. بنابراین، دراینجا به بیان مطالبی در مورد این فضاها و روابطی که بین آنها و نگاشت دوگانی برقرار است، می‌پردازیم. یکی از دلایل اهمیت این فضاها این است که فضاهای هیلبرت که زمینه‌ی تحقیقات در بسیاری از بخش‌های آنالیز تابعی است، این ویژگی‌ها را دارند.

**تعریف ۱۲.۱** مجموعه $X_0 \subseteq X$ محدب[۵] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y \in X_0$ وهر $0 < \alpha < 1$ داشته باشیم، $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X_0$. فضای باناخ $X$ اکیداً محدب[۶] نامیده می‌شود اگر برای هر دو عنصر $x, y \in X$ که $y \neq 0$ از این‌که $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$، بتوانیم نتیجه بگیریم $x = \lambda y$ $(\lambda > 0)$ ویا به‌طور معادل $\|x\| = \|y\| = 1$ و $x \neq y$، آن‌گاه $\|x + y\| < 2$.

اکنون فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱۳.۱** فضای باناخ $X$ به طور یکنواخت محدب[۷] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ که $0 < \epsilon \leq 2$ عدد $\delta(\epsilon) > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ که $\|x\| \leq 1$ و $\|y\| \leq 1$ و $\|x - y\| \geq \epsilon$ نتیجه بگیریم $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon))$.

---

[۵] Convex

[۶] Strictly convex

[۷] Uniformly convex

در قضیه‌ی زیر شرایط معادل برای ویژگی به‌طور یکنواخت محدب بودن را بیان می‌کنیم که اثبات آن در [۴۳] یافت می‌شود.

**قضیه ۱۴.۱** فرض کنید $X$ یک فضای باناخ باشد، در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

الف) برای هر دو دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $X$ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\|x_n\| \leq 1$، $\|y_n\| \leq 1$ و داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ آن‌گاه بتوان نتیجه گرفت که $\|x_n - y_n\| \to 0$.

ب) برای هر دو دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $X$ به‌طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ و $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ آن‌گاه $\|x_n - y_n\| \to 0$.

پ) $X$ به‌طور یکنواخت محدب است.

**تعریف ۱۵.۱** فضای باناخ $X$ به‌طور یکنواخت محدب موضعی[8] نامیده می‌شود، اگر برای هر $0 < \epsilon \leq 2$ و هر $u \in X$ که $\|u\| = 1$، $\delta(\epsilon, u)$ موجود باشد که برای هر $v \in X$ با $\|v\| = 1$ و $\|u - v\| \geq \epsilon$ بتوان نتیجه گرفت، $\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon, u))$.

اگر $X$ یک فضای به‌طور یکنواخت محدب باشد، واضح است که به‌طور یکنواخت محدب موضعی نیز هست.

**قضیه ۱۶.۱** اگر $X$ به‌طوریکنواخت محدب موضعی باشد، آن‌گاه اکیداً محدب نیز هست.

**اثبات.** فرض کنید که $x, y \in X$ و $x \neq y$ و $\|x\| = \|y\| = 1$. آن‌گاه $\epsilon > 0$ موجود است که $\|x - y\| \geq \epsilon$. بنابراین عدد $\delta(\epsilon, y) > 0$ وجود دارد به‌طوری که $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta) < 2$. پس $X$ اکیدا محدب است. □

واضح است که قضیه‌ی فوق برای فضاهای به‌طور یکنواخت محدب نیز برقراراست، یعنی هر فضای به‌طور یکنواخت محدب، اکیداً محدب نیز هست.

[8] Locally uniformly convex

یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های $X$ با نماد $2^X$ نشان داده می‌شود. برای هر $x \in X$، $J(x)$ نگاشت دوگانی بر روی $X$ را که از نوع چند ـ مقداری است، به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$J(x) = \{f \in X^* : (f,x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

از قضیه‌ی هان ـ باناخ نتیجه می‌شود که برای هر $x \in X$، $J(x) \neq \emptyset$ و در نتیجه $D(J) = X$. اکنون به ذکر چند ویژگی از فضاهای انعکاسی و نتایج انعکاسی بودن در رابطه با نگاشت $J$ می‌پردازیم. براساس قضیه‌ی نمایش ریس[9]، دوگان یک فضای هیلبرت با خودش یکریخت[10] یک‌متر[11] می‌شود و به همین دلیل، معمولاً دوگان فضای هیلبرت را با خودش یکسان می‌گیریم و فضای هیلبرت یک فضای انعکاسی است. در نتیجه نگاشت دوگانی هر فضای هیلبرت معادل با نگاشت همانی می‌باشد.

**قضیه ۱.۱۷** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد. نگاشت دوگانی دارای خواص زیر است:

الف) اگر $X$ انعکاسی باشد، آن‌گاه $J$ پوشاست.

پ) اگر $X$ اکیداً محدب باشد، $J$ یک به یک است.

**اثبات.** الف) برای هر $f \in X^*$ طبق قضیه هان ــ باناخ $u \in X = X^{**}$ هست که $\|u\| = 1$ و $\|f\| = (f,u)$. قرار می‌دهیم $x = \|f\|u$، داریم که

$$(f,x) = (f, \|f\|u) = \|f\|^2 \;\; = \|x\|^2 = \|f\|^2\|u\|^2$$

بنابراین $f \in J(x)$، در نتیجه $J$ یک نگاشت پوشااست. برای اثبات قسمت (پ) فرض کنیم $x,y \in X$ و $f \in J(x) \cap J(y)$. در این صورت داریم $\|x\| = \|y\|$ و $\|x\|^2 = (\frac{x+y}{2}, f) \geq \|\frac{x+y}{2}\|\|x\|$، از این رو $\|\frac{x+y}{2}\| = \|x\| = \|y\|$. پس بنابر اکیداً محدب بودن $X$ داریم $x = y$. به این ترتیب اگر $x \neq y$، آن‌گاه $J(x) \cap J(y) = \emptyset$. لازم به ذکر است در حالت تک ــ مقداری این تعریف با یک به یک بودن معمولی معادل است. □

[9] Riesz
[10] Isomorphic
[11] Isometeric