بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور شیراز

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

مدول‌ها و زیر مدول‌های اول

توسط:

مهدی اخوان زنجانی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر احمد خاکساری

اسفند ۸۵

جمهوری اسلامی ایران
[وزار]ت علوم، تحقیقات، فناوری

دانشگاه پیام نور - مرکز شیراز

شماره ....
تاریخ ....
پیوست ....

www. spnu.ac.ir

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز

جلسه دفاع از پایان نامه آقای **مهدی اخوان زنجانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** گرایش **جبر** دانشگاه پیام نور مرکز شیراز با عنوان:

مدولها و زیرمدولهای اول

در ساعت **۹** روز **سه‌شنبه** تاریخ **۸۵/۱۲/۱۵** با حضور اعضای کمیته نامبرده در زیر برگزار گردید و با نمره ۱۸/- و درجه ارزشیابی عالی مورد تأئید قرار گرفت.

اعضای کمیته:

	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	از دانشگاه	امضاء
۱-استاد راهنما	دکتر احمد خاکساری	استادیار	پیام‌نور شیراز	
۲-داور جلسه	دکتر منصوره معانی شیرازی	استادیار	پیام‌نور شیراز	
۳-نماینده دانشگاه	دکتر نرگس عباسی	استادیار	پیام‌نور شیراز	

ملاحظات

شیراز - شهرک گلستان بعداز نمایشگاه بین‌المللی - تلفن ۶۱۲۲۷۰۱ - ۶۱۲۲۷۰۰ صندوق پستی ۴۶۵-۹۴۴-۷۱۳۶۵

هوالعليم

ای رستخیزناگهان،وی رحمت بی‌منتها ای آتشی ا فروخته در بیشه ا ندیشه ها

در سینه ها برخاسته ، ا ندیشه را آراسته هم‌خویش حاجت‌خواسته ،هم‌خویشتن کرده‌روا

خداوند بزرگ را سپاس می گویم که توفیق تحصیل علم را تا این مقطع به من عطا فرمود و از درگاه متعالش توفیق تحصیل در مراحل بالاتر را خواستارم .
در اینجالازم می دانم از اساتید محترمی که در این سال ها زحمت زیادی برای اینجانب متحمل شده‌اند، تشکر و قدردانی کنم . همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر احمد خاکساری که راهنمایی من را بر عهده گرفته اند و مرهون الطاف و محبت‌های ایشان می باشم صمیمانه سپاسگزارم .

در پایان از شکیبایی و همراهی مادر و همسر عزیزم که در طول مدت تحصیل یاری گر من بودند ، صمیمانه سپاسگزارم و امیدوارم این کار من باعث شادی روح پدر بزرگوارم گردد.

مهدی اخوان زنجانی

اسفند ۱۳۸۵

۱۳۸۷ /۲/ ۱۱۹۱

ای طایران قدس را عشقت فزوده بالها در حلقه سودای تو روحانیان را حالها

ازعشق گردون مؤ تلف، بی عشق اختر منخسف ازعشق گشته دال الف، بی عشق الف چون دالها

تقدیم به :

همسر و مادر عزیزم

فهرست مطالب

چکیده :

در این پایان نامه کلاسهایی از مدول ها را ارائه خواهیم داد که در آن دو مفهوم π و اول با هم معادل هستند . همچنین شرایطی را اثبات می کنیم که ، تحت آن داریم :

حلقه R دامنه ددکیند [1] است اگر و فقط اگر R—مدول M اول باشد .

علاوه بر این به سؤالی دربارهٔ مدولهایی که در رادیکال فرمولا صدق می‌کند در قسمت پایانی جواب خواهیم داد.

[1] Dedekind domain

فصل اول

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱ — ۱ مقدمه

R را یک حلقه جابجایی همراه با عضو همانی درنظربگیرید.
فرض کنید M یک R—مدول یکانی [۱] باشد. M را یک مدول حاصلضربی [۲] گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M ایده‌آل [۳] I از R موجودباشد به‌طوریکه $N = IM$.
لازم به یادآوری است که R—مدول M اول [۴] نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول غیر صفر N از M داشته باشیم:

$$ann(N) = ann(M)$$

فرض کنید S مجموعهٔ مقسوم علیه های غیرصفر R باشد آنگاه R_S را حلقه کسرهای R گوییم. همچنین فرض کنید

$$T = \{t \in S | m = \circ \text{ ایجاب می کند که } m \in M \text{ برای تعدادی } tm = \circ\}$$

ملاحظه می کنیم که Tیک زیر مجموعهٔ بسته ضربی [۵] R است .
اگر N زیرمدولی از M باشد ، گوییم که N در M وارون پذیر است اگر $NN' = M$ که در آن $N' = \{x \in R_T : xN \subseteq M\}$ است و R_T موضعی کردن [۶] R در T است.
فرض کنید N یک R—مدول باشد و $\pi(N,M) = \sum_\phi \phi(N)$ که در آن $\phi \in Hom(N,M)$.

---

[۱] unitary module
[۲] multiplication module
[۳] Ideal
[۴] Prime module
[۵] multiplicatively closed subset
[۶] localization

۱ — ۲ π—مدولها و مدولهای چگال

تعریف ۱ — ۲ — ۱ : فرض کنید M یک R—مدول باشد آنگاه M را یک π—مدول گوییم هر گاه برای هر زیر مدول غیر صفر N از M ، $\pi(N, M) = M$.
یک زیر مدول N از M را چگال [۱] در M گویند هر گاه $\pi(N, M) = M$.

در این قسمت ما به دنبال جوابی برای سؤال مطرح شده درمقاله نوم والالوان [۲] هستیم. آنها نشان دادهاند که یک π—مدول ، اول است ولی خاطرنشان می کنیم که عکس آن هنوز به صورت یک سؤال باقی مانده است .
آنها همچنین ادعاکردهاند که یک مدول اول شبه انژکتیو [۳] یک π—مدول است. این ادعا درست است ولی اثباتی که برای آن ارائه شده، غلط است (مراجعه شود به ۱—۳—۱) زیرا در اثبات آن بیان شده است که هر زیر مدول از یک مدول شبه انژکتیو یک زیر مدول ثابت تحت π است .

۱ — ۳ روابط بین π—مدولها و مدولهای اول

قضیه ۱ — ۳ — ۱ : فرض کنید M یک مدول اول شبه انژکتیو باشد آنگاه M یک π—مدول است .

اثبات : برای اثبات از این موضوع استفاده می کنیم که مدول M یک π—مدول است اگر و تنهااگر برای هر زیرمدول N از M هرگاه $\pi(N, M) = N$ آنگاه $N = 0$ یا

[۱] dense
[۲] Naoum and AL-Alwan
[۳] quasi injective

$N = M$ است . حال فرض می‌کنیم K یک زیرمدول غیرصفر از M باشد و فرض می‌کنیم که $\pi(K,M) = K$. نشان می دهیم $K = M$ ، از آنجا که M یک شبه انژکتیو است لذا K یک زیرمدول M می باشد که توسط π ثابت نگه داشته می‌شود چون M یک مدول اول است لذا تنها زیرمدول هایی از شبه انژکتیو هال [1] که ثابت نگه داشته می شوند (۰) و $\overline{M}$ هستند ولی $M = \overline{M}$ در نتیجه $M = K$.

حال می بینیم که این اثبات به چه دلیلی غلط است. فرض کنید $\varphi : Q \to Q$ تعریف شده با ضابطهٔ $\varphi(q) = q/p$ که در آن Q اعداد گویا [2] و Z اعداد صحیح [3] فرض می‌شود ، $q \in Q$ و p یک عدد اول ثابت . آشکارا می‌توان نشان داد زیرمدول های Z هموار نیستند .

حال یک اثبات معتبر برای ادعای آنها درقضیه (۱—۳—۲) ارائه می‌دهیم . همچنین در قضیه (۱—۳—۳) اثبات می کنیم که اگر یک مدول اول آرتینی [4] باشد ، آنگاه یک π —مدول است .

قضیه ۱ — ۳ — ۲ : فرض کنید M یک مدول اول شبه انژکتیو باشد آنگاه M یک π—مدول است .

اثبات : فرض کنید N یک زیرمدول غیر صفر از M و x یک عضو غیر صفر از N باشد.
برای هر $y \in M$ داریم $ann(x) = ann(Rx) = ann(M) \subseteq ann(y)$. حال تابع

[1] quasi-injective hull
[2] rational numbers
[3] integers
[4] artinian module

$\varphi : Rx \to M$ را با ضابطه $\varphi(rx) = ry$ تعریف می کنیم . از آنجا که M یک N—انژکتیو [1] است ، لذا همریختی $\overline{\varphi} : N \to M$ وجود دارد به طوریکه $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) = y$. بنابراین $y \in \overline{\varphi}(N) \subseteq \pi(N, M)$. که این اثبات را کامل می کند .

حال کلاس دیگری از مدول ها را ارائه می دهیم که در آن دو مفهوم π و اول با یکدیگر معادل اند .

قضیه ۱ — ۳ — ۳ : فرض کنید M یک R—مدول اول آرتینی باشد آنگاه M یک π—مدول است .

اثبات : فرض کنید S یک زیر مدول ساده [2] از M باشد آنگاه M یک فضای برداری [3] روی میدان R/P است ، که P یک ایده‌آل از $ann(S)$ است از اینرو گیریم $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ که $(1 \leq i \leq n)$ $M_i \cong R/P$.
لازم به ذکر است که برای یک زیرفضای غیرصفر u از M داریم $u = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_k}$ به طوریکه $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ لذا اگر تصویرگر [4] $(1 \leq j \leq n)$ $\varphi_j : u \to Mi_1 \cong R/P \cong M_j$ را در نظر بگیریم بدست خواهیم آورد $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(u) = M$ که این اثبات را کامل می کند .

---

[1] N-Enjective
[2] simple submodule
[3] Vector Space
[4] Projection

فصل دوم

اول ها روی دامنه های ددکیند

فصل دوم

اول ها روی دامنه های ددکیند

۲ — ۱ مقدمه

در این بخش شرایطی را بیان می کنیم که تحت آن شرایط داریم :

حلقه R دامنه ددکیند است اگر و تنها اگر R—مدول M اول باشد.

۲ — ۲ مدول های ضربی متناهی تولید شده

گزارهٔ ۲ — ۲ — ۱ : فرض کنید R یک دامنه صحیح [1] و M یک R—مدول باشد اگر N زیرمدولی وارون پذیر [2] از M باشد آنگاه N در M چگال است .

اثبات : فرض می کنیم $NN' = M$ که $N' = \{x \in K : xN \subseteq M\}$ که در آن K میدان کسرهای [3] R است . حال فرض می کنیم $m \in M$ آنگاه $m = q_1 n_1 + \cdots + q_k n_k$ که $n_i \in N$ و $q_i \in K$ ، $q_i N \subseteq M$ برای همهٔ $i = 1, \cdots, k$.

تابع $\varphi_i : N \to M$ را باضابطهٔ $\varphi_i(x) = q_i x$ برای همهٔ $x \in N$ تعریف می کنیم که این اثبات را کامل می کند زیرا

$\varphi_i \in Hom(N, M)$ و $m = \varphi_1(n_1) + \cdots + \varphi_k(n_k) \in \pi(N, M)$.

حال فرض می کنیم S یک زیرمجموعهٔ بسته ضربی R باشد که شامل صفر نیست . گیریم مجموعهٔ $I = \{r \in R | rs = 0 /$ برای بعضی $s \in S\}$ آنگاه I یک ایده‌آل اول R است و قرار دهید $\overline{R} = R/I$. برای هر $a \in R$ قرار دهید $\overline{a} = a + I \in \overline{R}$ ، آنگاه $\overline{S} = \{\overline{s} : s \in S\}$ یک زیرمجموعهٔ بسته ضربی است که شامل مقسوم علیه های غیر صفر $\overline{R}$ می باشد و ما می توانیم به روش معمول حلقه خارج قسمتی [4] $\overline{R}\,\overline{s}^{-1}$ از $\overline{R}$ را با استفاده از $\overline{S}$ بسازیم . فرض کنید M یک R—مدول و L مجموعهٔ $\{m \in M | sm = 0, s \in S$ برای تعدادی $\}$ باشد آنگاه L یک زیر مدول M است و $IM \subseteq L$ بنابراین $\overline{M} = M/L$ یک $\overline{R}$—مدول است . برای هر $m \in M$،

---

[1] domain
[2] invertible
[3] field fraction
[4] Partial quatient ring

قرار دهید $\overline{m} = m + L$. لازم به ذکر است که اگر $s \in S$ و $m \in M$ آنگاه $\bar{\circ} = \overline{s}.\overline{m}$
ایجاب می کند $sm \in L$ و لذا $m \in L$ ، یعنی $\overline{m} = \bar{\circ}$ بنابراین میتوان $S^{-1}R$—مدول $S^{-1}M$ را به روش معمول ساخت .

متذکر می شویم که اگر Nزیر مدولی از M باشد و $\theta : N \to M$ یک R— همریختی باشد آنگاه θ ، $\bar{S}^{-1}R$ همریختی

$$\bar{\theta} : \bar{S}^{-1}\bar{N} \to \bar{S}^{-1}M$$

را در جایی که $\overline{\theta}(\overline{x}/\overline{s}) = \overline{\theta(x)}/\overline{s}$ برای همه $x \in N$ و $s \in S$ القا می کند.

قضیه ۲ — ۲ — ۲ : هر زیر مدول چگال از یک R—مدول ضربی متناهی تولید شده [1] ، همیشه یک R—مدول ضربی متناهی تولید شده‌است .

اثبات : فرض کنید N یک زیر مدول چگال از یک R—مدول ضربی متناهی تولید شده باشد در اینصورت عدد صحیح مثبت k و عناصر $m_i \in M$ $(\text{۱} \leq i \leq k)$ وجود دارند به طوریکه $M = Rm_\text{۱} + \cdots + Rm_k$.

عدد صحیح مثبت n و عنصر $x_{ij} \in M$ و تابع $\theta_{ij} : N \to M$ $(\text{۱} \leq i \leq k, \text{۱} \leq j \leq n)$ وجود دارد به طوریکه $m_i = \theta_{i\text{۱}}(x_{i\text{۱}}) + \cdots + \theta_{ik}(x_{ik})$ $(\text{۱} \leq i \leq k)$. باید نشان دهیم که $N = \sum_{i=\text{۱}}^{k} \sum_{j=\text{۱}}^{n} Rx_{ij}$.

فرض کنید $A = \{r \in R : rx \in \sum_{i=\text{۱}}^{k} \sum_{j=\text{۱}}^{n} Rx_{ij}, x \in N\}$ حال کافی است نشان دهیم $A = R$ زیرا در اینصورت $\text{۱} \in A$ در نتیجه که $N = \sum_{i=\text{۱}}^{k} \sum_{j=\text{۱}}^{n} Rx_{ij}$.
فرض می‌کنیم $A \neq R$ آنگاه ایده آل ماکسیمال [2] P از Rوجود دارد به‌طوریکه $A \subseteq P$.
ابتدا نشان می‌دهیم که PM نمی تواند شامل همهٔ عناصر m_i $(\text{۱} \leq i \leq k)$ باشد آنگاه $M = Pm$ پس ایده‌آل B از R وجود دارد به طوریکه $Rx = BM$ از اینرو

[1] generated finitely
[2] maximal ideal

به طوریکه $x = px$ و لذا $(۱-p)x = ۰$ و $۱ - p \in A \subseteq P$ که یک تناقض است.
بنابراین $Rx = BM = B(PM) = P(BM) = P(Rx) = Px$ وجود دارد $p \in P$
پس $(۱ \leq i \leq k)$ وجود دارد به طوریکه $m_i \neq PM$. حال یک ایده‌آل c از R وجود دارد به طوریکه $Rm_i = cM$ ، واضح است که $c \not\subseteq P$ پس $۱ - q \in c$ برای تعدادی $q \in P$. در این مورد $(۱ - q)M \subseteq Rm_i$. در نظر بگیرید R_P مدول M_p را که در آن علامت R_P و M_p منظور موضع سازی R و M در P باشد . آشکارا $M_p = R_p\overline{m}_i$ که $\overline{m_i} = \overline{\theta_{i۱}}(\overline{x_{i۱}}) + \cdots + \overline{\theta_{in}}(\overline{x_{in}})$ بنابراین $N_p = R_P(\overline{x_{i۱}}) + R_P(\overline{x_{in}})$. بخصوص $sx \in Rx_{i۱} + \cdots + Rx_{in}$ برای تعدادی $s \in R/P$ ولی این ایجاب می کند که $s \in A \subseteq P$ که این یک تناقض است . بنابراین $A = R$ و $N = \sum_{i=۱}^{k} \sum_{j=۱}^{n} Rx_{ij}$.
یعنی N متناهی تولید شده است و از آنجا که هر زیر مدول چگال متناهی تولید شده از یک R—مدول ضربی همیشه یک مدول ضربی است لذا N یک مدول ضربی است .

لم ۲ — ۲ — ۳ : مدول های ضربی آرتینی دوری [۱] هستند .

قبل از اثبات لم دو قضیه زیر را بدون اثبات بیان می کنیم :

قضیه ۲ — ۲ — ۴ : فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و M یک R—مدول غیر صفر ضربی آنگاه:
i) هر زیر مدول اکید از M در یک زیرمدول ماکسیمال M قرار می گیرد.
ii) K یک زیر مدول ماکسیمال از M است اگر و فقط اگر یک ایده‌آل ماکسیمال P از R موجود باشد به طوریکه $K = PM \neq M$.

[۱] cyclic

قضیه ۲ — ۲ — ۵ : اگر R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و M یک R—مدول ضربی با فقط تعداد متناهی زیر مدول ماکسیمال ، آنگاه M دوری است.

اثبات لم ۲ — ۲ — ۳ : فرض کنید S مجموعه‌ای از زیر مدول های M باشد که تعداد متناهی زیرمدول ماکسیمال دارد . با توجه به فرض ، S دارای عضو مینیمالی به فرم $P_1M \cap \cdots \cap P_nM$ ، برای تعدادی ایده‌آل ماکسیمال P_i که $M \neq P_iM$ است، می‌باشد. حال فرض می کنیم K زیرمدول ماکسیمال از M باشد ، لذا یک ایده‌آل ماکسیمال P از R وجود دارد بطوریکه $K = PM$. بنا به قضیه ۲ — ۲ — ۴ واضح است که $P_1M \cap \cdots \cap P_nM = P_1M \cap \cdots \cap P_nM \cap PM$ ، از اینرو $(P_1 \cap \cdots \cap P_n)M \subseteq PM$. اگر $A = P_1 \cap \cdots \cap P_n \nsubseteq P$ آنگاه $R = A + P$ و لذا $M = AM + PM \subseteq PM = K$ که یک تناقض است ، پس $A \subseteq P$ و لذا $P_i \subseteq P$ برای $(1 \leq i \leq n)$ که این ایجاب می‌کند $P_i = P$ و همچنین $K = P_iM$ ؛ این نشان می دهد که M دارای تنها تعدادی متناهی زیر مدول ماکسیمال است لذا بنا به قضیه ۲ — ۲ — ۵ ، M دوری است .

۲ — ۳ رابطه π — مدول و دامنه ددکیند

لم ۲ — ۳ — ۱ : فرض کنید M یک R—مدول ضربی با وفا [۱] باشد آنگاه M یک π—مدول است اگر و تنها اگر R یک دامنه ددکیند باشد.

برای اثبات این لم ابتدا چند گزاره ارائه می دهیم .

گزارهٔ ۲ — ۳ — ۲ : فرض کنید B یک R—مدول ضربی متناهی تولید شده باوفا باشد اگر A یک زیرمدول چگال از B باشد آنگاه A یک مدول ضربی است .

اثبات : می دانیم اگر B یک R—مدول متناهی تولید شده و A یک زیرمدول ضربی و چگال باشد آنگاه A نیز متناهی تولید شده است پس A متناهی تولید شده و همچنین با وفا است ، لذا برای هر ایده‌آل اول P از R ، $A_P \neq 0$ و $B_P \neq 0$ و B_P یک R_P—مدول دوری است لذا B_P—مدول R_P یکریخت با R_P است . آشکارا A_P در $B_P \cong R_P$ چگال است لذا A_P یک R_P—مدول تصویری متناهی تولید شده است ، ولی R_P موضعی [۲] است پس A_P دوری است که این نشان می دهد A یک R—مدول ضربی است .

گزارهٔ ۲ — ۳ — ۳ : فرض کنید B یک R—مدول ضربی با وفا باشد که R یک

---

[۱] faithful multiplication module

[۲] local

دامنه صحیح [1] است اگر A یک زیر مدول چگال در B باشد و $A = IB$ که I یک ایده‌آل در R است ، آنگاه I یک ایده‌آل وارون پذیر در R است .

اثبات : می دانیم هر R—مدول ضربی با وفا متناهی تولید شده است و چون A نیز متناهی تولید شده و I یک ایده‌آل ضربی است و چون R یک دامنه صحیح است در نتیجه I یک ایده‌آل وارون پذیر است .

گزارهٔ ۲ — ۳ — ۴ : فرض کنید M یک π—مدول روی حلقه R باشد آنگاه $ann(M)$ یک ایده‌آل اول است . بویژه اگر M با وفا باشد آنگاه R دامنه صحیح است.

اثبات : فرض کنید $ab \in ann(M)$ و $b \notin ann(M)$ آنگاه $abM = 0$ و $bM \neq 0$ ولی $ann(M) = ann(bM) \ni a$ لذا $aM = 0$ و $a \in ann(M)$.

اثبات لم ۲ — ۳ — ۱ : فرض کنید M یک π—مدول باشد لذا بنا به گزاره ۲ — ۳ — ۴ ، R یک دامنه صحیح و همچنین M متناهی تولید شده است . فرض کنید I یک ایده‌آل غیر صفر در R باشد آنگاه IM یک زیر مدول غیر صفر از M می‌باشد ، لذا یک زیر مدول چگال است. حال بنابه گزاره ۲ — ۳ — ۳ ، I یک ایده‌آل وارون پذیر است و بنابراین R یک دامنه ددکیند است .
برعکس : فرض کنید R یک دامنه ددکیند باشد آنگاه M متناهی تولید شده است. فرض کنید A یک زیر مدول غیر صفر M باشد لذا یک ایده‌آل $I \neq 0$ در R وجود

[1] Integral domain