دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

مشتقات جبرهای لی موضعاً متناهی ساده

استاد راهنما

محمد شهریاری

استاد مشاور

حمید موسوی

پژوهشگر

مریم وفایی پور سرخابی

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم،

بنام خدا

الهی،
خلقِ تو، شکر نعمت‌های تو کنند،
من، شکر بودن تو کنم.
نعمت، بودنِ تواست.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **محمد شهریاری** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**حمید موسوی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.
از جناب آقای دکتر مهتدیفر که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم. ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.
در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

مریم وفایی پور سرخابی
۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: وفایی پور سرخابی نام: مریم
عنوان: مشتقات جبرهای لی موضعاً متناهی ساده
استاد راهنما : محمد شهریاری استاد مشاور : حمید موسوی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۶۸
کلید واژه‌ها: جبرهای لی، موضعاً متناهی، فرم‌های پایا

چکیده

فرض می‌کنیم L یک جبر لی موضعاً متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ با مشخصه‌ی صفر و بصورت حد مستقیم جبرهای لی ساده با بعد متناهی باشد. ثابت می‌کنیم هر فرم دوخطی متقارن، پایا و ناتبهگون تحت همه مشتقات L پایا است. ضمناً نشان می‌دهیم چنین فرمی وجود دارد و یکتا است.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایاننامه که بر اساس مقاله:[۴]

Neeb Karl-Hermann,*Derivation of Locally Simple Lie Algebras,* Journal of Lie Theory, Volume 15(2005) 589-594.

تهیه شده است به مطالعه جبرهای لی موضعاً متناهی ساده می‌پردازد. فرض می‌کنیم L یک جبر لی موضعاً متناهی روی یک میدان با مشخصه‌ی صفر و L مساوی حد مستقیم جبرهای لی ساده با بعد متناهی باشد. هدف ما مطالعه مشتقات و فرم‌های دو خطی پایا روی L است. با استفاده از هر فرم دوخطی پایا یک نشاننده طبیعی $DerL \hookrightarrow L^\star$بدست آورده و با استفاده از آن مشتقات L را تعریف خواهیم کرد. سپس نشان خواهیم داد که هر فرم متقارن پایا تحت همه مشتقات L پایا است. ضمناً وجود فرم‌های پایا روی L را ثابت می‌کنیم.

این پایاننامه در سه فصل تهیه شده است. در فصل اول مفاهیم مقدماتی را معرفی کرده‌ایم. فصل دوم به بیان حد مستقیم و معکوس در جبرهای لی و معرفی جبرهای لی موضعاً متناهی و نامتناهی اختصاص دارد. در فصل سوم به مطالعه مشتقات و فرم‌های دوخطی متقارن پایا روی جبرهای لی موضعاً متناهی کلاسیک خواهیم پرداخت.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ جبر لی

در این پایاننامه $\mathbb{F}$ را میدانی دلخواه با مشخصه‌ی صفر درنظر می‌گیریم و هر جا بسته جبری بودن $\mathbb{F}$ لازم باشد، به آن اشاره خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱.۱. *فضای برداری L روی میدان $\mathbb{F}$ همراه با ضرب*

$$[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$$
$$(x, y) \longmapsto [x, y]$$

(که آن را براکت یا جابجاگر x و y می‌نامیم) را یک جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) *این ضرب خاصیت دو خطی داشته باشد.*

۲) *برای هر $x \in L$، $[x, x] = 0$.*

۳) *به ازای هر $x, y, z \in L$*

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0.$$

خاصیت سوم را اتحاد ژاکوبی می‌نامیم.

اگر مشخصه‌ی میدان 2 نباشد ($char\mathbb{F} \neq 2$) داریم $[x,y] = -[y,x]$. اگر به ازای هر $x,y \in L$ داشته باشیم $[x,y] = 0$ آن‌گاه به وضوح L یک جبرلی است که ما آن را جبر لی آبلی می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است و روی A عمل دو تایی دیگری مانند:*

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A$$
$$(x,y) \longrightarrow xy$$

بنام ضرب تعریف شده که دارای خواص دوخطی و شرکت پذیری باشد آنگاه A را یک جبر شرکت پذیر می‌نامیم.

حال با تعریف $[x,y] = xy - yx$ برای هر x و y در A، می توان A را به یک جبرلی تبدیل کرد. بنابراین از هر جبر شرکت‌پذیر می‌توان یک جبر لی ساخت. به عنوان مثال فضای ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی که عضو میدان $\mathbb{F}$ هستند، ($Mat_n(\mathbb{F})$) همراه با عمل ضرب ماتریسی یک جبر شرکت پذیر است. بنا به آنچه گفته شده با تعریف براکت به صورت : $[x,y] = xy - yx$ در جبر $Mat_n(\mathbb{F})$ یک جبر لی حاصل می‌شود که با $gl(n,\mathbb{F})$ نشان می‌دهیم و آن را جبر لی عام از درجه‌ی n روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم.

فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. مجموعه‌ی تبدیلات خطی از V به V را با $End_{\mathbb{F}}(V)$ نشان می‌دهیم. این مجموعه همراه با عمل ترکیب توابع یک جبر شرکت پذیر است که با تعریف $[x,y] = xy - yx$ به یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ تبدیل می‌شود. جبر لی حاصل را با $gl(V)$ نشان می‌دهیم وآن را جبر لی خطی عام می‌نامیم.

نکته: می‌دانیم مجموعه‌ی ماتریس‌های مقدماتی $E_{i,j}(1 \leq i,j \leq n)$ پایه‌ای برای جبر $gl(n,\mathbb{F})$ است. از

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

نتیجه می‌شود

$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{jk}E_{i,l} - \delta_{li}E_{k,j}.$$

حال اگر L یک جبرلی با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $x_1, x_2, ..., x_n$ پایه‌ای برای L، آنگاه به ازای هر i, j که $1 \le i, j \le n$و اسکالرهای $\lambda^r_{i,j}$، $1 \le r \le n$ ،وجود دارند چنانکه

$$[x_i, x_j] = \sum \lambda^r_{ij} x_r.$$

داریم:

۱) $\lambda^r_{ii} = 0$

۲) برای هر i, j, k،

$$\sum_{r,s} (\lambda^r_{ij}\lambda^s_{rk} + \lambda^r_{jk}\lambda^s_{ri} + \lambda^r_{ki}\lambda^s_{rj}) = 0$$

بر عکس اگر اسکالرهای $\lambda^r_{i,j}$ با خواص بالا موجود باشند آنگاه می‌توانیم یک جبرلی n-بعدی تعریف کنیم که توسط $x_1, x_2, \cdots, x_n$ تولید می‌شود و

$$[x_i, x_j] = \sum_{r=1}^{n} \lambda^r_{ij} x_r.$$

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنیم H و K زیر فضاهایی از جبرلی L باشند. $[H, K]$ را زیر فضای تولید شده توسط $[x, y]$ هایی تعریف می‌کنیم که $x \in H$ و $y \in K$. در واقع هر عضو $[H, K]$ به صورت*

$$u = \sum_i [x_i, y_i] \quad \forall x_i \in H, y_i \in K$$

است که در آن $x_i \in H$ و $y_i \in K$.

گزاره ۴.۱.۱. به ازای هر دو زیر فضای H و K در L داریم: $[H, K] = [K, H]$.

تعریف ۵.۱.۱. *زیر فضای I از جبرلی L را یک ایده‌آل L می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $[I, L] \subseteq I$. در چنین شرایطی می‌نویسیم $I \trianglelefteq L$.*

در جبرلی چون به ازای دو زیر فضای H و K، رابطه $[H, K] = [K, H]$ برقرار است، پس ایده‌آل چپ و راست معادلند. مثال‌های واضح ایده‌آل، زیر فضای صفر و خود جبرلی هستند. اگر I ایده‌آلی غیربدیهی از L باشد، با تعریف زیرفضای خارج قسمتی L/I را می‌توان به جبرلی تبدیل کرد:

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

تعریف ۶.۱.۱. *نرمال‌ساز زیر جبر K از L را به صورت*

$$N_L(K) = \{x \in L : [x, K] \subseteq K\} = \{x \in L : \forall y \in K \;\; [x, y] \in K\}$$

تعریف می‌کنیم و به راحتی دیده می‌شود که $N_L(K)$ زیر جبری از L است. در واقع $N_L(K)$ بزرگترین زیرجبر L است که شامل K می‌باشد. هم‌چنین K ایده‌آلی از $N_L(K)$ است. اگر $K = N_L(K)$، آنگاه K را خود نرمالساز گوییم.

تعریف ۷.۱.۱. *مرکز ساز زیرمجموعه‌ی X از L را به صورت*

$$C_L(X) = \{x \in L : [x, X] = 0\} = \{x \in L : \forall y \in X \;\; [x, y] = 0\}$$

تعریف می‌کنیم. مرکزساز زیرجبری از جبر L می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱. *مرکز جبرلی را به صورت*

$$Z(L) = \{x \in L : \forall y \in L \quad [x, y] = 0\}$$

تعریف می‌کنیم.

مرکز جبر لی L ایده‌آلی از L است و داریم $Z(L) = C_L(L)$.

تعریف ۹.۱.۱. *فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. تبدیل خطی $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ را همومورفیسم جبرلی گوییم هرگاه داشته باشیم*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

φ را منومورفیسم گوییم هرگاه $\ker \varphi = 0$ و اپی‌مورفیسم گوییم هرگاه $Im\,\varphi = L_2$. اگر φ هم مونومورفیسم و هم اپی‌مورفیسم باشد φ را ایزومورفیسم نامیم.

نکته: بوضوح $\ker \varphi$ ایده‌آلی از L_1 و $Im\,\varphi$ زیر جبری از L_2 است.

گزاره ۱۰.۱.۱. $L/\ker \varphi$ ایزومورف با $Im\,\varphi$ است.

تعریف ۱۱.۱.۱. *یک نمایش از جبرلی L عبارتست از همومورفیسم $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ که در آن V یك فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است.*
نمایش $ad : L \longrightarrow gl(L)$ که به صورت

$$ad\ x(y) = [x, y] \qquad (1.1)$$

تعریف می‌شود، یک تبدیل خطی است و به راحتی اثبات می‌شود همومورفیسم جبرلی است که آن را نمایش الحاقی می‌نامیم و داریم: $\ker ad = Z(L)$

تعریف ۱۲.۱.۱. *جبر لی L را جبرلی ساده گوییم هرگاه L ایده‌آلی بجز صفر و خودش نداشته باشد.*

اگر L جبرلی ساده باشد چون $Z(L)$ ایده‌آلی از L است، آن‌گاه $Z(L) = L$ یا $Z(L) = 0$. اگر $Z(L) = L$، یعنی L جبر لی آبلی است و جبر لی آبلی تنها زمانی جبر لی ساده است که یک بعدی باشد. این حالت استثنا را در این پایاننامه در نظر نمی‌گیریم و تمامی جبرهای لی ساده را غیر آبلی در نظر می‌گیریم. پس برای جبر لی ساده داریم $Z(L) = 0$. حال با استفاده از این مطلب $\mathrm{ad} : L \longrightarrow gl(L)$ یک همومورفیسم یک به یک می‌باشد. لذا برای جبرلی های ساده نتیجه می گیریم هر جبر لی ساده در یک جبرلی خطی نشانده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. *فرض می‌کنیم L یک جبرلی باشد زیر جبر مشتق n-ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$L^{(0)} = L$$
$$L^{(1)} = [L, L] = L'$$
$$\vdots$$
$$L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$$

دنباله تو در توی

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots$$

را سری مشتق می‌نامیم. براحتی اثبات می‌شود که به ازای هر n ، $L^{(n)}$ ایده‌آلی از L است.

تعریف ۱۴.۱.۱. *جبرلی L را حل‌پذیر می‌گوییم هرگاه*

$$\exists n: \quad L^{(n)} = 0.$$

مثلاً هر جبرلی آبلی حل‌پذیر است چون $L' = [L, L] = 0$.

گزاره ۱۵.۱.۱. اگر L جبر لی حل‌پذیر باشد آنگاه زیرجبرهایش نیز حل‌پذیرند و اگر A ایده‌آلی از جبرلی حل‌پذیر L باشد L/A نیز حل‌پذیر است.

غکس این گزاره نیز برقرار است: اگر A ایده‌آلی از جبرلی L باشد و A و L/A حل‌پذیر باشند آنگاه L حل‌پذیر است.
اگر L یک جبرلی با بعد متناهی باشد، آنگاه L دارای ایده‌آل حل‌پذیر ماکزیمال منحصربفرد است که آن را با $Rad(L)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. *اگر داشته باشیم $Rad(L) = 0$ آنگاه L را جبر لی نیم ساده می‌نامیم.*

تعریف ۱۷.۱.۱. *فرض می‌کنیم L یک جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تعریف می‌کنیم:*

$$\begin{aligned}
&L^0 = L \\
&L^1 = [L, L] = L' \\
&\quad\vdots \\
&L^n = [L^{n-1}, L]
\end{aligned}$$

سری $L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \cdots$ را سری مرکزی پایینی می‌نامیم. به راحتی اثبات می‌شود برای هر $n \in \mathbb{N}$، L^n ایده‌آلی از L است.

گزاره ۱۸.۱.۱. اگر L یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه
۱) برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $[L^m, L^n] \subseteq L^{m+n}$.
۲) $L^{(n)} \subseteq L^{2^n}$.

تعریف ۱.۱.۱۹. *L را جبرلی پوچ توان می‌نامیم هرگاه n-ای وجود داشته باشد که $L^n = 0$. بنا به قسمت دوم گزاره ۱.۱.۱۸ هر جبرلی پوچ توان حل‌پذیر است.*

گزاره ۱.۱.۲۰. اگر L یک جبرلی پوچ‌توان و K زیرجبر L باشد، آنگاه K نیز پوچ توان است. اگر K ایده‌آلی از L باشد و L پوچ توان، L/K نیز پوچ توان است و اگر $L/Z(L)$ پوچ توان باشد، آنگاه L پوچ توان است.

گزاره ۱.۱.۲۱. هر جبرلی ساده یک جبرلی نیم ساده است.

گزاره ۱.۱.۲۲. اگر L یک جبرلی پوچ توان باشد آنگاه $Z(L) \neq 0$.

پس اگر $Z(L) = 0$، L یک جبرلی پوچ توان نیست و چون هر جبرلی پوچ توان حل‌پذیر است و در جبرلی ساده، $Z(L) = 0$ است، بنابراین جبرلی ساده، حل‌پذیر نیست و برعکس، هر جبر لی حل‌پذیر، ساده نیست.

قضیه ۱.۱.۲۳ (قضیه اِنگل). *فرض کنیم L یک جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، آن‌گاه L پوچ توان است اگر وتنها اگر به ازای هر x عضو L اپراتور $ad\ x$ پوچ توان باشد.*

۱.۲ مدول‌ها

تعریف ۱.۲.۱. *V را یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و L را یک جبرلی روی همان میدان درنظر می‌گیریم. نگاشت*

$$\cdot : L \times V \longrightarrow V$$
$$(x, \nu) \longmapsto x.\nu$$

را در نظر می‌گیریم، در این صورت V را یک L-مدول می‌نامیم هرگاه شرایط زیر نیز برقرار باشند:

$I)(ax + by).\nu = a(x.\nu) + b(y.\nu)$

$x.(a\nu + bw) = a(x.\nu) + b(x.w)$

$$II)[x,y].\nu = x.y.\nu - y.x.\nu \quad \forall x,y \in L, \quad \nu, w \in V \quad a,b \in \mathbb{F}$$

با تعریف ضرب به صورت $x.y = [x,y]$ ، L یک L مدول است، این مدول را مدول الحاقی می‌نامیم و تعریف می‌کنیم:

$$ad\ x : L \longrightarrow L$$
$$ad\ x(y) = [x,y]$$

گزاره ۱.۲.۲. هرگاه $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ یک نمایش از L باشد آن‌گاه V یک L-مدول است و برعکس.

تعریف ۱.۲.۳. *L-مدول‌های V و W را درنظر می‌گیریم. تابع خطی $\varphi : V \longrightarrow W$ را هomomورفیسم L مدول گوییم هرگاه داشته باشیم:*

$$\varphi(x \cdot \nu) = x \cdot \varphi(\nu), \quad \forall x \in L, \nu \in V.$$

هر گاه این φ ایزومورفیسم باشد آن را ایزومورفیسم L مدول نامیم، در این صورت L-مدول‌های V و W را ایزومورف می‌نامیم. اگر دو L-مدول، ایزومورف باشند آنگاه نمایش های معادلی خواهند داشت.

تعریف ۱.۲.۴. *زیر فضای برداری A از L-مدول V را زیرمدول می‌نامیم هرگاه*

$$\forall x \in L, \forall \nu \in A : x \cdot \nu \in A.$$

تعریف ۱.۲.۵. *L مدول V را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه L - زیر مدولی غیر از صفر وخودش نداشته باشد.*

قضیه ۱.۲.۶ (قضیه لی). *فرض کنیم L یک جبرلی حل‌پذیر باشد. آنگاه هر L مدول تحویل‌ناپذیر با بعد متناهی، دارای بعد یک است.*

تعریف ۱.۲.۷. *فضای برداری V را کاملاً تحویل پذیر گوییم هرگاه V جمع مستقیم L - زیر مدول‌های تحویل ناپذیر باشد.*

تعریف ۸.۲.۱. *فرض کنیم V یک L-مدول و ρ نمایش متناظر با آن باشد، λ را نمایش یک بعدی از L درنظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم:*

$$V_\lambda = \{\nu \in V : \forall x \in L \ \exists n \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad (\rho(x) - \lambda(x) \cdot 1)^n(\nu) = 0\}$$

اگر $V_\lambda \neq 0$ آنگاه V_λ را فضای وزن V و λ را وزن V می‌نامیم.

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنیم L یک جبر لی پوچ‌توان و V یک L-مدول با بعد متناهی باشد، برای هر نمایش یک بعدی λ از L داریم:*

۱) $V = \oplus_\lambda V_\lambda$.

۲) $V_\lambda \leq_L V$.

۳.۱ زیرجبرکارتان

A را یک جبر(یک فضای برداری همراه با یک عمل دو تایی دیگر بنام ضرب) روی میدان $\mathbb{F}$ درنظر می‌گیریم. اپراتور خطی $\delta : A \longrightarrow A$ را یک مشتق A می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

به خصوص اگر A یک جبر لی باشد آنگاه

$$\delta([a, b]) = [\delta(a), b] + [a, \delta(b)]$$

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید L یک جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و $x \in L$ آن‌گاه $\mathrm{ad}x$ یک مشتق است چون به ازای هر $a, b \in L$ داریم:

$$(\mathrm{ad}\ x)[a, b] = [(\mathrm{ad}\ x)(a), b] + [a, (\mathrm{ad}\ x)(b)]$$

گزاره ۲.۳.۱. فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و $Der(A)$ مجموعه مشتقات A باشد، آنگاه $Der(A)$ زیر جبرلی، جبرلی $gl(V)$ است.

قاعده‌ی لایب نیتز: A را یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و $\delta\ :\ A\longrightarrow A$ اپراتور مشتق آن درنظر می‌گیریم. در این صورت برای هر عدد طبیعی n و اسکالرهای $\lambda, r\in F$ و به ازای هر $a,b\in A$ خواهیم داشت:

$$(\delta-(\lambda+r)\cdot 1)^n(ab)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\delta-\lambda\cdot 1)^{n-i}(a)(\delta-r\cdot 1)^i(b)$$

گزاره ۳.۳.۱. اگر A یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ و $\delta\ :\ A\longrightarrow A$ اپراتور مشتق آن باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n و هر $a,b\in A$ داریم:

$$\delta^n(ab)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\delta^{n-i}(a)\delta^i(b)$$

بخصوص اگر A یک جبرلی باشد، آنگاه داریم:

$$\delta^n([a,b])=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[\delta^i(a),\delta^{n-i}(b)]$$

تعریف ۴.۳.۱. *فرض کنیم A یک جبرلی روی میدان $\mathbb{F}$ و δ یک اپراتور مشتق پوچ توان از A باشد، تعریف می‌کنیم:*

$$\exp(\delta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}$$

گزاره ۵.۳.۱. $\exp(\delta)\ :\ A\longrightarrow A$ یک اتومورفیسم است.

تعریف ۶.۳.۱. *$ad\ x$ها را مشتقات داخلی می‌نامیم و اگر $\delta\ :\ A\longrightarrow A$ یک مشتق باشد که به ازای هر $x\in A$، $\delta\neq ad\ x$، آنگاه δ را یک مشتق خارجی می‌نامیم.*

تعریف ۷.۳.۱. *زیر جبر H از جبرلی L را زیر جبر کارتان می‌نامیم هرگاه H پوچ توان باشد و $N_L(H)=H$.*

تعریف ۸.۳.۱. *فرض کنیم $x\in L$ و تعریف می‌کنیم:*

$$L_{0,x}=\{y\in L\quad :\exists n\geq 1\quad (ad\ x)^n(y)=0\}$$

داریم $L_{0,x}\leq L$.

تعریف ۹.۳.۱. *اگر x عضوی از L، باشد که $\dim L_{0,x}$ مینیمم شود، آنگاه x را منظم می‌نامیم.*

قضیه ۱۰.۳.۱. *اگر x منظم باشد، آنگاه $L_{0,x}$ یک زیر جبرکاتان است. بنابراین طبق این قضیه هر جبرلی، دارای زیر جبر کاتان است.*

تعریف ۱۱.۳.۱. *فرض کنیم $\lambda : H \longrightarrow \mathbb{C}$ یک نمایش یک بعدی باشد، مجموعه:*

$$L_\lambda = \{x \in L : \forall h \in H \quad \exists n \geq 1; (adh - \lambda(h) \cdot 1)^n(x) = 0\}$$

را زیر فضای وزن می‌نامیم.

با توجه به این که زیرجبر کارتان پوچ‌توان است، بنابراین بنا به قضیه ۹.۲.۱ می‌توان L را به صورت جمع مستقیم زیر فضاهای وزن نوشت:

$$L = \oplus_\lambda L_\lambda$$

برای $\lambda = 0$ داریم:

$$L_0 = \{x \in L : \forall h \in H \, \exists n \geq 1 \; s.t \, (\text{ad } h)^n(x) = 0\}$$

گزاره ۱۲.۳.۱. $L_0 = H$.

تعریف ۱۳.۳.۱. *فرض کنیم Φ مجموعه‌ی تمام نمایش‌های یک بعدی غیر صفر مانند $\alpha : H \longrightarrow \mathbb{C}$ باشد که $L_\alpha \neq 0$ آنگاه Φ را سیستم ریشه L متناظر با H و هر عضو Φ را یک ریشه می‌نامیم، و داریم:*

$$L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

این تجزیه را تجزیه‌ی کارتان می‌نامیم.

۴.۱ فرم‌های دو خطی

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع $H : V\times V \longrightarrow \mathbb{F}$ را فرم دو خطی گوییم، هرگاه نسبت به هر دو متغیر خطی باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $u, \nu, u', \nu' \in V$ و $\lambda \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:*

۱) $H(\lambda u + u', \nu) = \lambda H(u, \nu) + H(u', \nu)$

۲) $H(u, \lambda\nu + \nu') = \lambda H(u, \nu) + H(u, \nu')$

تعریف ۲.۴.۱. *نگاشت‌های خطی R و L از V به V^* را به صورت:*

$$L(\nu)(u) = H(u, \nu), \quad R(\nu)(u) = H(\nu, u) \tag{۲.۱}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۴.۱. *فرم دوخطی H را ناتبهگون گوییم اگروتنها اگر L و R یک به یک باشند.بطور معادل H ناتبهگون است اگر وتنها اگر*

۱) به ازای هر u اگر $H(u, \nu) = 0$ باشد آن‌گاه $\nu = 0$

۲) به ازای هر ν اگر $H(u, \nu) = 0$ باشد آن‌گاه $u = 0$

تعریف ۴.۴.۱. *گیریم W زیر فضایی از V باشد مزدوج چپ و راست W نسبت به فرم H را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$W'_L = \{\nu \in V : \forall u \in W \ H(u, \nu) = 0\}$$

$$W'_R = \{\nu \in V : \forall u \in W \ H(\nu, u) = 0\}$$

(۳.۱)

W'_L و W'_R زیرفضایی از V هستند و داریم :

$$W'_L = \{\nu \in V : W \subseteq \ker L(\nu)\}$$

$$W'_R = \{\nu \in V : W \subseteq \ker R(\nu)\}$$

(۴.۱)