بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

مدول مینی‌ماکس

و

مدول‌های مربوط به آن

استاد راهنما

دکتر جعفر اعظمی

استاد مشاور

دکتر احمد خوجالی

توسط

محبوبه قربانعلی‌زاده

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

روح پرفتوح پدرم

این پایان‌نامه را در کمال افتخار و امتنان تقدیم می‌نمایم به روح پرفتوح و بزرگواری که مرا همراه خود به دنیای پر رمز و راز ریاضی کشاند و نخستین مقدمات آشنایی مرا با این دنیای پر از شگفتی و زیبایی رقم زد... پدر و اولین معلم ریاضی من که عشق به ریاضی را تماماً مدیون او هستم و حالا که بیش از هر وقت دیگری جای خالی‌اش را احساس می‌کنم، این اثر را که چندان قابل نیست به روح بزرگ و دریایی‌اش تقدیم می‌نمایم.

تقدیر و تشکر:

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم و به این مرحله از علم برسم و در تمام مراحل زندگی‌ام همواره همراه و یاورم بوده است. سپاس خدا را به اندازه همه سپاسی که نزدیکترین فرشتگان و گرامی‌ترین بندگان و پسندیده‌ترین ستایش کنندگان او را ستایش کرده‌اند، سپاسی که بر سپاس‌های دیگر برتری داشته باشد مانند برتری که پروردگار نسبت به آفرینندگان دارد.

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم که من همواره جرعه‌نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت ایشان بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی‌ها و مشکلات بوده است.

و با سپاس بی‌دریغ خدمت داماد گرامی و خواهران عزیزم که مرا صمیمانه و مشفقانه همراهی نموده‌اند و به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری داده‌اند.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر جعفر اعظمی که با گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم‌پرور نمود و گلشن‌سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های سازنده بارور ساخت و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بوده است.

در پایان از زحمات اساتید محترم دانشگاه محقق اردبیلی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

محبوبه قربانعلی‌زاده

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: قربانعلی‌زاده **نام:** محبوبه

عنوان پایان نامه :

مدول مینی‌ماکس و مدول‌های مربوط به آن

استاد راهنما: دکتر جعفر اعظمی

استاد مشاور: دکتر احمد خوجالی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر
دانشگاه: محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی: ۲۹ /۱۳۹۱/۶ **تعداد صفحه:** ۷۶

کلید واژه‌ها :
مدول مینی‌ماکس، آرتینی، نیم—آرتینی، هم‌نواخت، هم‌اتمی، مدول رادیکالی

چکیده:
A—مدول M مینی‌ماکس نامیده می‌شود اگر یک زیرمدول با تولید متناهی از آن مانند N موجود باشد بطوریکه A—مدول M/N آرتینی باشد. در این پایان‌نامه مدول‌های مینی‌ماکس و بعضی کلاس‌های تعمیم یافته از آنها را روی حلقه‌های جابه‌جایی و نوتری مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از نتایج اصلی به صورت زیر است:
A—مدول M مینی‌ماکس است اگر و فقط اگر هر تجزیه از تصویر همریخت آن متناهی باشد.
از این قضیه نتایج زیر به دست می‌آید:
(۱) همه‌ی مدول‌های هم‌نواخت، مینی‌ماکس هستند.
(۲) همه‌ی مدول‌های هم‌بعد متناهی، مینی‌ماکس هستند.
(۳) پوشش‌های اساسی مدول‌های مینی‌ماکس، مینی‌ماکس هستند.
با استفاده از مطالب بالا ساختار مدول‌های هم‌نواخت و هم‌بعد متناهی را مشخص می‌کنیم.
همچنین شرایط زیر را بررسی می‌کنیم:
(۱) A—مدول U را که با تولید متناهی است با یک مدول هم‌اتمی جایگزین می‌کنیم.
(۲) A—مدول M/U را که آرتینی است با یک مدول نیم—آرتینی جایگزین می‌کنیم و نتایج جدیدی را به دست می‌آوریم.

فهرست مندرجات

مقدمه

این مقاله بر اساس مرجع [13] نوشته شده است. از سایر مراجع گفته شده نیز برای پربار شدن مطالب پایان‌نامه استفاده نموده‌ایم. مدول‌های هم‌اتمی، مینی‌ماکس، رادیکالی و... در مراجع [21, 20, 19, 18] توسط زوشینگر [1] به صورت کامل مورد بحث و بررسی قرار گرفته و ما در ادامه بر اساس مرجع [13] این مطالب را بیشتر مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. اکثر مطالب ما روی مدول‌های مینی‌ماکس است که توسط زوشینگر در سال ۱۹۸۶ تعریف شده و مطالب مربوط به آن به صورت کامل در مرجع [20] مورد بررسی قرار گرفته است. در سراسر این پایان‌نامه R یک حلقه جابه‌جایی و نوتری و M یک R—مدول می‌باشد. هدف اصلی در این پایان‌نامه مشخص کردن مدول‌های مینی‌ماکس با استفاده از تجزیه‌های متناهی برای مدول‌های خارج قسمتی M می‌باشد. در بخش اول مدول‌های قویاً باوفا را مورد مطالعه قرار داده و در پایان این بخش نتیجه زیر را خواهیم داشت: فرض کنید M یک مدول نیم—آرتینی و غیرآرتینی باشد. در این صورت M دارای یک مدول خارج قسمتی است بطوریکه این مدول خارج قسمتی یک تجزیه نامتناهی دارد. با استفاده از این نتیجه، در بخش دوم مدول‌های مینی‌ماکس به صورت زیر کلاس بندی می‌شوند:

قضیه۱. برای R—مدول M شرایط زیر معادلند:

(۱) M یک R—مدول مینی‌ماکس است.

(۲) هر مدول خارج قسمتی نیم—آرتینی از M، آرتینی است.

(۳) هر مدول خارج قسمتی از M دارای شرط ACC برای جمعوندهای مستقیم است.

(۴) هر تجزیه برای هر مدول خارج قسمتی از M، متناهی است.

---

[1] Zöschinger

به کمک مطالب بالا نتایج زیر ثابت می‌شود:

(۱) همه‌ی مدول‌های هم‌نواخت، مینی‌ماکس هستند.

(۲) همه‌ی مدول‌های هم‌بعد متناهی، مینی‌ماکس هستند.

(۳) پوشش‌های اساسی مدول‌های مینی‌ماکس، مینی‌ماکس هستند.

همچنین قضیه‌های زیر را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم:

قضیه ۲. برای R—مدول M شرایط زیر معادلند:

(۱) هر مدول خارج قسمتی رادیکال از M، یک مدول مینی‌ماکس است.

(۲) هر تجزیه از مدول خارج قسمتی رادیکال از M، متناهی است.

(۳) هر مدول خارج قسمتی نیم—آرتینی از M به صورت مجموع مدول‌های هم‌اتمی و آرتینی می‌باشد.

(۴) M توسیع یک مدول هم‌اتمی به وسیله‌ی یک مدول آرتینی می‌باشد.

قضیه ۳. فرض کنید R یک حلقه دلخواه و M یک R—مدول رادیکالی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R، M_m یک R_m—مدول مینی‌ماکس است.

(۲) M توسیع یک مدول هم‌اتمی به وسیله‌ی یک مدول نیم—آرتینی و موضعاً آرتینی می‌باشد.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ R—مدول M را مینی‌ماکس می‌نامیم اگر یک زیر مدول با تولید متناهی از آن مانند N موجود باشد بطوریکه M/N یک R—مدول آرتینی باشد.

تعریف ۲.۱ فرض کنید M یک R—مدول و N یک زیرمدول واقعی آن باشد. N را در M کوچک می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمدول K از M بطوریکه $N + K = M$ باشد، $K = M$ باشد.

تعریف ۳.۱ R—مدول M را تجزیه‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه جمعوندهای مستقیم M فقط صفر و خود M باشند.

تعریف ۴.۱ R—مدول M هم‌نواخت نامیده می‌شود اگر M مخالف صفر باشد و هر زیرمدول واقعی آن در M کوچک باشد، یا به طور معادل همه‌ی مدول‌های خارج قسمتی آن تجزیه‌ناپذیر باشند.

تعریف ۵.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. مجموعه همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R را با نماد $Max(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر I ایده‌آلی از حلقه R باشد، در این صورت تعریف

می‌کنیم:

$$M[I] = \{x \in M \quad | \quad Ix = 0\} = 0 :_M I$$

تعریف ۶.۱ R–مدول M رادیکال نامیده می‌شود اگر هیچ زیر مدول ماکسیمال نداشته باشد، به عبارت دیگر $Rad(M) = M$. ($Rad(M)$ اشتراک زیرمدول‌های ماکسیمال M می‌باشد).

تعریف ۷.۱ مجموع زیرمدول‌های رادیکال M را با نماد $P(M)$ نشان می‌دهیم. در صورتیکه $P(M) = 0$ آنگاه M را کاهشی می‌نامیم.

نکته ۱.۱ $P(M)$ بزرگترین زیر مدول رادیکال از M می‌باشد و $P(M)$ زیرمدول ماکسیمال ندارد. زیرا فرض کنید N زیرمدول ماکسیمال $P(M) = \sum M_i$ باشد. (M_iها زیرمدول‌های رادیکال M هستند). در این صورت به ازای $i = 1$ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$N \cap M_1 \subseteq M_1 \ , \ N \nsubseteq M_1 \Longrightarrow \exists m_1 \in M_1, m_1 \notin N$$

بطوریکه

$$N \subsetneqq N + Rm_1 \subseteq \sum M_i \Longrightarrow N + Rm_1 = \sum M_i$$

از طرفی

$$\sum M_i = N + Rm_1 \subseteq N + M_1 \subseteq \sum M_i \Longrightarrow N + M_1 = \sum M_i$$

همچنین داریم

$$M_1/(N \cap M_1) \cong (M_1 + N)/N = \sum M_i/N$$

چون $\sum M_i/N$ ساده می‌باشد، پس $M_1/(N \cap M_1)$ نیز ساده می‌باشد. در نتیجه $N \cap M_1$ زیرمدول ماکسیمال M_1 می‌باشد که این یک تناقض است.

تعریف ۸.۱ مجموع تمام زیرمدول‌های آرتینی مدول M را با نماد $L(M)$ نشان می‌دهیم. اگر $L(M) = 0$ آنگاه M را آزاد — پایه می‌نامیم.

قضیه ۱.۱ فرض کنید M یک مدول آرتینی روی حلقه جابه‌جایی R باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل ماکسیمال m از R، $L_m(M) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(0 :_M m^n)$ یک زیرمدول از M می‌باشد.

برهان به [14] رجوع شود.

قضیه ۲.۱ فرض کنید M یک مدول آرتینی روی حلقه جابه‌جایی R باشد و $Max(R)$ مجموعه همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R باشد. در این صورت جمع $\Sigma_{m\in Max(R)}L_m(M)$ از زیرمدول‌های M مستقیم است.

برهان به [14] رجوع شود.

قضیه ۳.۱ فرض کنید M یک مدول آرتینی روی حلقه جابه‌جایی R باشد. در این صورت تنها تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال m از R وجود دارد بطوریکه $L_m(M) \neq 0$ و اگر این ایده‌آل‌های ماکسیمال را بوسیله‌ی $m_1, \cdots, m_n$ مشخص کنیم، آنگاه داریم:

$$M = L_{m_1}(M) \oplus \ldots \oplus L_{m_n}(M)$$

برهان به [14] رجوع شود.

تعریف ۹.۱ فرض کنید R و $\hat{R}$ دو حلقه باشند و $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ و $\hat{I}_1 \supseteq \hat{I}_2 \supseteq \hat{I}_3 \supseteq \cdots$ به ترتیب دنباله‌هایی در R و $\hat{R}$ باشند. همچنین $\phi : R \longrightarrow \hat{R}$ یک R—هومومرفیسم باشد. در این صورت جفت $(\hat{R}, \phi)$ را یک مکمل از R می‌نامیم هرگاه ۴ شرط زیر برقرار باشند:

(۱) $\hat{R}$ کامل باشد.

(۲) $ker\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

(۳) $\phi(R)$ در $\hat{R}$ چگال باشد.

(۴) $\forall n \; ; \; \phi(I_n) = \phi(R) \cap \hat{I}_n$.

لم ۱.۱ فرض کنید m ایده‌آل ماکسیمال R و q یک ایده‌آل m—اولیه باشد. فرض کنید M یک R—مدول باشد. در این صورت $L_q(M)$ ساختار R_m—مدولی دارد. همچنین $L_m(M)$ ساختار $\hat{R}_m$—مدولی دارد.

برهان به [3] رجوع شود.

تعریف ۱۰.۱ R—مدول M را نیم—آرتینی می‌نامیم اگر هر زیرمدول واقعی آن شامل یک زیرمدول مینیمال باشد.

تعریف ۱۱.۱ اگر q ایده‌آل اولیه R باشد، آنگاه $\sqrt{q}=p$ ایده‌آل اول R است. در این صورت q را یک ایده‌آل p—اولیه می‌نامیم.

نکته ۲.۱ $L(M)$ بزرگترین زیرمدول نیم—آرتینی از M می‌باشد. زیرا فرض کنید N زیرمدول واقعی $L(M)=\sum M_i$ باشد.(M_iها زیرمدول‌های آرتینی M هستند). در این صورت $N\cap M_i \subseteq M_i$. بنابراین $N\cap M_i$ یک زیرمدول آرتینی N است. لذا $N\cap M_i$ شامل یک زیرمدول مینیمال است. در نتیجه N نیز شامل همان زیرمدول مینیمال خواهد بود، بنابراین $L(M)$ نیم— آرتینی می‌باشد. همچنین $L(M)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L(M)=\bigoplus_{m\in Max(R)} L_m(M)$$

که در آن $L_m(M)=\sum_{n=۱}^{\infty} M[m^n]$. زیرا اگر m ایده‌آل ماکسیمال R و M یک R—مدول آرتینی باشد، آنگاه $M=\bigoplus_{m\in Max(R)} L_m(M)$ (تعداد mها متناهی می‌باشد). بنابراین

$$\begin{aligned} L(M) &= \sum_{i\in J} M_i = \sum_{i\in J}\Big(\bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M_i)\Big) = \bigoplus_{i\in J}\Big(\bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M_i)\Big) \\ &= \Big(\bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M_۱)\Big)\bigoplus\Big(\bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M_۲)\Big)\bigoplus\cdots = \bigoplus_{\substack{i\in J\\ m\in MaxR}} L_m(M_i) \end{aligned}$$

حال

$$\bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M)\subseteq L(M)=\bigoplus_{\substack{i\in J\\ m\in MaxR}} L_m(M_i)\subseteq \bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M)$$

در نتیجه

$$L(M)=\bigoplus_{m\in MaxR} L_m(M)$$

$L_m(M)$ را یک مولفه m—اولیه از $L(M)$ می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱ حلقه R را حوزه ایده‌آل اصلی $(P.I.D)$ می‌نامیم هرگاه R حوزه صحیح بوده و هر ایده‌آل آن اصلی باشد.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید I یک ایده‌آل واقعی حلقه‌ی R باشد. رادیکال ایده‌آل I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \ \mid \ \exists n \in \mathbb{N}_{\circ} \ \ ; \ \ x^n \in I\}$$

تعریف ۱۴.۱ ایده‌آل q از حلقه R را اولیه می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(۱) $q \neq R$.

(۲) $\forall x, y \in R \ \ ; \ \ xy \in q \Longrightarrow x \in q$ یا $y \in \sqrt{q}$.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید I ایده‌آل R باشد. یک تجزیه اولیه از I عبارتست از اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل اول. یعنی ایده‌آل I را بتوان به صورت اشتراک تعداد متناهی ایده‌آل اولیه نوشت: $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ که $\sqrt{q_i} = p$. در این صورت می‌گوییم ایده‌آل I تجزیه‌پذیر است یا یک تجزیه اولیه دارد. این تجزیه را مینیمال یا نرمال یا کاهشی می‌نامیم هرگاه ۲ شرط زیر را داشته باشد:

(۱) به ازای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ و $i \neq j$ آنگاه $p_i \neq p_j$.

(۲) به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $q_i \not\supseteq \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} q_j$.

تعریف ۱۶.۱ حلقه R را موضعی می‌نامیم هرگاه فقط دارای یک ایده‌آل ماکسیمال مانند m باشد. این حلقه را معمولاً به صورت (R, m) می‌نویسیم. همچنین R را نیم—موضعی می‌نامیم هرگاه دارای تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال باشد.

تعریف ۱۷.۱ زیرمجموعه S از حلقه R را بسته ضربی می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:

(۱) $1 \in S$.

(۲) $\forall a, b \in S \Rightarrow ab \in S$.

همچنین فرض کنید R یک حلقه و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. رابطه $\equiv$ را روی $R \times S$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall r_1, r_2 \in R, \forall s_1, s_2 \in S, (r_1, s_1) \equiv (r_2, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S, (r_1 s_2 - r_2 s_1)t = 0$$

$\equiv$ یک رابطه هم‌ارزی روی $R \times S$ می‌باشد. حال کلاس هم‌ارزی عنصر (r, s) را با نماد r/s نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $S^{-1}R = \{r/s \mid r \in R, s \in S\}$. $S^{-1}R$ یک حلقه جابه‌جایی و یکدار می‌باشد و آن را حلقه کسرهای R می‌نامیم. همچنین در صورتیکه P ایده‌آل اول حلقه R باشد، داریم:

$$S = R - P \text{ بسته ضربی از } R \text{ باشد} \Longleftrightarrow P \text{ ایده‌آل اول}$$

نکته ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه و P ایده‌آل اول R و $S = R - P$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد. در این صورت حلقه $S^{-1}R$ را با نماد R_P نشان می‌دهیم و R_P را موضعی سازی حلقه R نسبت به ایده‌آل P می‌نامیم. R_P یک حلقه موضعی است و تنها ایده‌آل ماکسیمال آن عبارتست از $P_P = S^{-1}P = PR_P$.

تعریف ۱۸.۱ بعد حلقه R را با نماد $dimR$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dimR = Sup\{0 \leqq n \in \mathbb{Z} \mid \exists P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_n \text{ ، هر } P_i \text{ یک ایده‌آل اول } R \text{ است}\}$$

اگر Sup موجود نباشد، آنگاه می‌نویسیم $dimR = \infty$.

تعریف ۱۹.۱ اگر P یک ایده‌آل اول R باشد، آنگاه ارتفاع P را با نماد $ht_R P$ یا htP نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$htP = Sup\{0 \leqq n \in \mathbb{Z} \mid \exists P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_n = P\}$$

اگر Sup موجود نباشد، آنگاه می‌نویسیم $htP = \infty$.

نکته ۴.۱ $dimR$ در واقع برابر است با سوپریمم طول زنجیرهای به صورت $P_\circ \subseteq P_۱ \subseteq \cdots \subseteq P_n$ که در آن $P_\circ$ ایده‌آل اول مینیمال و P_n ایده‌آل ماکسیمال R است. لذا اگر $dimR$ متناهی باشد، آنگاه $dimR = Sup\{htm \mid m \in MaxR\} = Sup\{htP \mid P \in SpecR\}$.
در نتیجه اگر (R, m) موضعی باشد، آنگاه $dimR = htm$.

تعریف ۲۰.۱ فرض کنید M یک $R-$مدول و N یک $R-$زیرمدول M باشد. N را یک زیرمدول اساسی M می‌نامیم هرگاه به ازای هر زیرمدول غیرصفر K از M داشته باشیم $N \bigcap K \neq \circ$ و یا به طور معادل:

$$\forall m \in M \Longrightarrow \exists \circ \neq r \in R \quad ; \quad \circ \neq rm \in N$$

تعریف ۲۱.۱ مونومرفیسم $f : K \longrightarrow M$ را یک مونومرفیسم اساسی گوییم هرگاه $Im(f)$ زیرمدول اساسی M باشد.

تعریف ۲۲.۱ $R-$مدول M را یکنواخت می‌نامیم اگر هر زیرمدول غیرصفر آن یک زیرمدول اساسی باشد، یا به طور معادل برای هر دو زیرمدول غیر صفر N و K از M، $N \cap K \neq \circ$ باشد.

تعریف ۲۳.۱ فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. بعد گلدی M را با نماد $Gdim(M)$ نشان داده و به این صورت تعریف می‌کنیم: $Gdim(M) = n$ اگر و تنها اگر M یک زیرمدول اساسی مانند B داشته باشد بطوریکه B به صورت جمع مستقیم n مدول یکنواخت باشد. $Gdim(M) = \infty$ اگر و فقط اگر M شامل یک زیرمدول باشد بطوریکه آن زیرمدول یک تجزیه نامتناهی داشته باشد.

تعریف ۲۴.۱ عنصر $r \in R$ را یک نامقسوم علیه می‌نامیم هرگاه به ازای هر $s \in R$، $sr = \circ$ ($rs = \circ$) نتیجه دهد $s = \circ$.

تعریف ۲۵.۱ R—مدول E را بخش‌پذیر می‌نامیم هرگاه به ازای هر نامقسوم علیه $r \in R$ و هر $e \in E$ عنصر $e' \in E$ موجود باشد بطوریکه $e = re'$.

تعریف ۲۶.۱ عنصر $x \in R$ را پوچتوان می‌نامیم هرگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد بطوریکه $x^n = 0$.

تعریف ۲۷.۱ R—مدول M را قویاً باوفا می‌نامیم اگر به ازای هر $r \in R$، مدول rM آرتینی باشد، آنگاه $r = 0$.

تعریف ۲۸.۱ فرض کنید $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ و $\sqrt{q_i} = p_i$ یک تجزیه اولیه مینیمال برای I باشد، آنگاه

$$\{p_1, \ldots, p_n\} = \{p \in SpecA \mid \exists x \in A \ , \ p = \sqrt{(I : x)}\}$$

مجموعه $\{p_1, \ldots, p_n\}$ را مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به ایده‌آل I می‌نامیم و این مجموعه را با $ass_R I$ یا $assI$ نشان می‌دهیم. پس $assI = \{p_1, \ldots p_n\}$.

تعریف ۲۹.۱ فرض کنید I یک ایده‌آل R باشد. ایده‌آل اول p را یک ایده‌آل اول مینیمال روی I می‌نامیم هرگاه $I \subseteq p$ و هیچ ایده‌آل اولی مانند q نتوان یافت بطوریکه $I \subseteq q \subsetneqq p$. در حالت خاص اگر $I = 0$، آنگاه هر ایده‌آل اول مینیمال روی صفر را یک ایده‌آل اول مینیمال حلقه می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱ فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یکدار و M یک R—مدول باشد. تکیه‌گاه مدول M را با نماد $Supp_R M$ یا به اختصار با $SuppM$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$SuppM = \{P \in Spec(R) \mid M_P \neq 0\}$$

حال اگر R یک حلقه و I یک ایده‌آل آن باشد، آنگاه داریم:

$$Supp_R R/I = \{P \in Spec(R) \mid P \supseteq I\}$$

تعریف ۳۱.۱ فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت $P \in Spec(R)$ را یک ایده‌آل اول وابسته به M می‌نامیم هرگاه $\circ \neq x \in M$ موجود باشد بطوریکه $P = \circ :_R x$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با نماد $Ass_R M$ نشان می‌دهیم:

$$Ass_R M = \{P \in Spec(R) \quad | \quad \exists \circ \neq x \in M, P = \circ :_R x\}$$

حال اگر I ایده‌آل R باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} Ass_R R/I &= \{P \in Spec(R) \quad | \quad \exists \circ \neq x + I \in R/I, \circ : x + I = P\} \\ &= \{P \in Spec(R) \quad | \quad \exists \circ \neq x + I \in R/I, I :_R x = P\} \end{aligned}$$

تعریف ۳۲.۱ $R-$مدول انژکتیو E را یک انژکتیو هم‌مولد[۱] برای R می‌نامیم هرگاه به ازای هر $R-$مدول A و هر عضو $\circ \neq a \in A$، یک $R-$هومورفیسم $f : A \longrightarrow E$ موجود باشد بطوریکه $f(a) \neq \circ$. به عبارت معادل برای هر $R-$مدول ناصفر A، $Hom_R(A, E) \neq \circ$.

تعریف ۳۳.۱ برای حلقه نوتری دلخواه R، $R-$مدول M را هم‌اتمی می‌نامیم هرگاه هیچ مدول خارج قسمتی رادیکال غیر صفر نداشته باشد یا به طور معادل هرگاه $Rad(M/N) = M/N$، آنگاه $M = N$. همچنین زیرمدول U از $R-$مدول M یک زیرمدول هم‌اتمی است اگر هر زیرمدول واقعی از آن مشمول در یک زیرمدول ماکسیمال باشد. به وضوح هر زیرمدول هم‌اتمی از یک مدول رادیکال M، در M کوچک است. زیرا M هیچ مدول خارج قسمتی هم‌اتمی غیر صفر ندارد.

تعریف ۳۴.۱ فرض کنید (R, m) یک حلقه موضعی باشد. $R-$مدول B را مجزا می‌نامیم هرگاه $n \geqq ۱$ وجود داشته باشد بطوریکه $m^n B = \circ$.

---
[۱] injective cogenerator

تعریف ۳۵.۱ دو ایده‌آل a و b را نسبت به هم اول (هم‌ماکسیمال) می‌نامیم هرگاه $a+b=R$.

نکته ۵.۱ هر دو ایده‌آل ماکسیمال مانند $m_۱$ و $m_۲$ نسبت به هم اولند، زیرا $m_۱ \subsetneqq m_۱ + m_۲$ بنابراین $m_۱ + m_۲ = R$.

قضیه ۴.۱ به ازای هر $R-$مدول M یک $R-$مدول انژکتیو مانند E و مونومرفیسم $f : M \longrightarrow E$ موجود است.

برهان به [14] رجوع شود.

تعریف ۳۶.۱ برای هر $R-$مدول A یک $R-$مدول E موجود است بطوریکه E یک توسیع اساسی انژکتیو A است. در این صورت E را پوشش انژکتیو A می‌نامیم و با علامت $E_R(A)$ یا به اختصار با $E(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱ فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی و M یک $R-$مدول باشد. در این صورت پوشش انژکتیو R/m را به وسیله E نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم $M^{\circ} = Hom_R(M,E)$. حال $Coass(M)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Coass(M) = \{P \in Spec(R) \quad | \quad \text{صفرساز یک مدول خارج قسمتی آرتینی از } M \text{ باشد } P\}$$

یا به طور معادل فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$مدول باشد. ایده‌آل اول P را هم‌وابسته به M می‌نامیم هرگاه مدول خارج قسمتی هم‌نواخت M' از M وجود داشته باشد بطوریکه $P = I(M')$. مجموعه همه‌ی ایده‌آل‌های اول هم‌وابسته به M را با $Coass(M)$ مشخص می‌کنیم.

تعریف **۳۸.۱** R—مدول M را ساده می‌نامیم هرگاه $M \neq 0$ و زیرمدول‌های آن فقط صفر و خود M باشند، یا به طور معادل

$$\forall 0 \neq m \in M \ \ ; \ \ 0 \neq Rm \trianglelefteq M \Longrightarrow M = Rm$$

تعریف **۳۹.۱** R—مدول M را نیم—ساده می‌نامیم هرگاه M به صورت مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده خود باشد.

تعریف **۴۰.۱** R—مدول M را متناهیاً نشانده شده $(f.e)$ می‌نامیم در صورتیکه زیرمدول‌های ساده $S_1, \dots, S_n$ موجود باشند بطوریکه:

$$E(M) \cong E(S_1) \bigoplus \cdots \bigoplus E(S_n)$$

تعریف **۴۱.۱** فرض کنید M یک R—مدول باشد. خانواده $\{M_i\}_{i \in I}$ از زیرمدول‌های M را یک دستگاه معکوس می‌نامیم هرگاه به ازای هر $i_1 \dots i_k \in I$ عضوی مانند $i_0 \in I$ موجود باشد بطوریکه:

$$M_{i_0} \subseteq M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_k}$$

تعریف **۴۲.۱** سوکل مدول M را با نماد $Soc(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$Soc(M) = \sum\{S \ \ | \ \ $ یک زیرمدول ساده M است $S\}$

تعریف **۴۳.۱** مجموعه $\mathcal{M}$ از زیرمدول‌های M را هم‌مستقل می‌نامیم هرگاه برای $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{M}$ که U_iها برای $i = 1, \dots, n$ دو به دو جدا از هم هستند، $U_1 + \cap_{i=2}^{n} U_i = M$. مجموعه تهی و هر مجموعه تک عضوی هم‌مستقل می‌باشند. در R مجموعه Ω شامل همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال، هم‌مستقل می‌باشد.

تعریف ۴۴.۱ برای R—مدول M مجموعه $\{r \in R \quad | \quad rM$ آرتینی است $\}$ را با نماد $Art_R(M)$ نشان می‌دهیم. واضح است $Art_R(M)$ یک ایده‌آل R است.

نکته ۶.۱ حلقه R نوتری است، لذا ایده‌آل $Art_R(M)$ با تولید متناهی می‌باشد. در نتیجه $Art_R(M)M$ به صورت جمع متناهی از مدول‌های آرتینی خواهد بود. لذا $Art_R(M)M$ آرتینی می‌باشد. یا به طور معادل :

$$Art_R(M) = \langle r_۱ \dots r_n \rangle$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}(Art_R(M))M &= \langle r_۱ \dots r_n \rangle M = (Rr_۱ + Rr_۲ + \dots + Rr_n)M \\ &= Rr_۱M + Rr_۲M + \dots + Rr_nM = r_۱M + r_۲M + \dots + r_nM\end{aligned}$$

لم ۲.۱ $M/Art_R(M)M$ یک $R/Art_R(M)$—مدول قویاً باوفا است.

برهان فرض کنید $a = Art_R(M)$ و $(r + a)M/aM$ آرتینی باشد، آنگاه $(rM + aM)/aM$ آرتینی می‌باشد. حال چون

$$(rM + aM)/aM \cong rM/(rM \cap aM)$$

لذا $rM/(rM \cap aM)$ نیز آرتینی می‌باشد و $rM \cap aM \subseteq aM$. پس $rM \cap aM$ آرتینی، بنابراین rM نیز آرتینی می‌باشد. حال بنا به فرض $r \in a$ در نتیجه $r + a = ۰$.

لم ۳.۱ فرض کنید b یک ایده‌آل حلقه R باشد. در این صورت R—مدولی مانند N وجود دارد بطوریکه $Art_R(N) = b$.