دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی - آنا لیز عددی

بررسی روش انتگرال گیری عددی $Gauss - Turan$

نگارش: سوده فخرآور

استاد راهنما: دکتر محمد مسجدجامعی

شهریور ۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج و وجودشان برایم همه مهر است.

زانوی ادب به زمین می نهم و با قلبی از عشق، محبت بر دستانشان بوسه می زنم.

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: انتگرال گیری عددی به روش گاوس-توران

استاد راهنما: دکترمحمد مسجدجامعی

نام دانشجو: سوده فخرآور

شماره دانشجویی: ۸۸۰۳۷۱۴

اینجانب سوده فخرآور دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که ستایشگران نمی توانند حق سپاس را ادا کنند و حسابگران از شمارش نعمت های بی پایانش عاجزنند، خدایی که نه کلام گنجابش تعریفش را دارد و نه زمان فرصت شمارش را.

اکنون با لطف خدای مهربان، مرحله ای دیگر از دوران تحصیل را به پایان می رسانم، فرصت را مغتنم شمرده و بر خود لازم می دانم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده اند و تمام موفقیت های من مرهون فداکاری ایشان می باشد سپاسگزاری کنم.

همچنین از استاد راهنمای گرامی و ارجمندم جناب آقای دکتر مسجد جامعی که در تمام مراحل پایان نامه با دقت و ژرف نگری، متانت ،صبر و شکیبایی راهنماییم فرمودند خالصانه تشکر و قدردانی می نمایم. بی شک بدون راهنمایی ارزشمند و حمایت ایشان، تکمیل این پایان نامه امکان پذیر نبود.

از جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا (داور خارجی) و جناب آقای دکتر محمود هادی زاده (داور داخلی) نیز به جهت خواندن این رساله و داوری کمال تشکر را دارم.

چکیده رساله

در این پایان نامه به بررسی تعمیمی از روش های انتگرال گیری گاوس که با نام $Gauss - Turan$ معروف است می پردازیم، این نوع انتگرال گیری بر پایه چندجمله ای های درونیاب بنیادی هرمیت (یا چندجمله ای درونیاب بوسان) بنا شده است که به کمک چندجمله ای های s - متعامد تقریب زده می شود، در ابتدا به معرفی ساختار چندجمله ای های s- متعامد می پردازیم سپس ارتباط این چندجمله ای ها را با روش انتگرال گیری $Gauss - Turan$ بیان می کنیم، در ادامه برای محاسبه ضرایب انتگرال گیری دو روش ارائه می دهیم. چون چندجمله ای های s- متعامد از نوع چندجمله ای های متعامد گسسته است، روشی را برای محاسبه ضرایب چند جمله ای های s- متعامد به کمک سری ها بررسی می کنیم .در انتها مثال های عددی محاسبه می شود. مبنای اصلی کار تحقیقاتی در این پایان‌نامه مبتنی بر مراجع [۸]،[۳]،[۲]، [۱] و [۱۱] می‌باشد.

مقدمه

اگر بخواهیم برای تابع $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مقدار انتگرال معین

$$I(f) = \int_B f(x)dx, \tag{۱}$$

را به دست آوریم. برای این منظور اولین وسیله ای که به ذهن خواهد رسید قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال [۱] می باشد، که یک نقش اساسی در نظریه انتگرال گیری دارد. این قضیه بیان می کندکه برای هر تابع پیوسته f بازه بسته ی$[a,b]$ داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a), \tag{۲}$$

که در آن $F(x)$ پاد مشتق $f(x)$ است. اگر $F(x)$ در دسترس و به اندازه کافی ساده باشد، آنگاه (۱) برای به دست آوردن مقدار (۲) می تواند به کار رود. اما در عمل استفاده از (۲) برای به دست آوردن مقدار (۱) نیستٌ زیرا انتگرال های زیادی وجود دارند که هر چند شکل ظاهری آن ها ساده است، اما نمی توان مقدار دقیق $F(x)$ را برای آن ها به دست آورد [۱۴]. از جمله ی این انتگرال ها می توان به موارد ذیل اشاره کرد:

$$\int_{-\pi}^{۰} (a^۲ \sin^۲(x) + b^۲ \cos^۲(x))^{۱/۲} dx,$$
$$\int_۱^۲ \frac{dx}{\ln(x)}$$
$$\int_۰^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}$$

در عمل مشکلات انتگرال گیری که در بخش علوم و صنعت رخ می دهند دارای پیچیدگی بسیار زیادی هستند که اغلب امکان بیان تحلیلی $F(x)$ برای آن ها وجود ندارد و تنها راه به دست آوردن مقدار این انتگرال ها به کار بردن روش ها ی انتگرال گیری عددی است. در اغلب موارد استفاده از تقریب عددی مقدار انتگرال، بسیار ساده تر و سریعتر از به دست آوردن مستقیم پاد مشتق می باشد. بر این اساس محققین در این زمینه، تلاش می کنند تا روش های تقریب عددی مقدار انتگرال را توسعه و بهبود دهند[۱۶ − ۱۴]. نظریه انتگرالگیری عددی تاریخ بسیار طولانی دارد به

---

[۱] $fundamentaltheoremofcalculus$

طوریکه آن را می توان از بیش از ۲۰۰۰ سال پیش زمانیکه ارشمیدس ریاضیدان ایتالیایی مساحت دایره را با استفاده از محاط و محیط کردن یک چند ضلعی تقریب زد، دنبال کرد. پس از آن استفاده از روشهای انتگرالگیری عددی توسط ریاضیدانان در قرنهای بعد افزایش پیدا کرد. تا آنکه ابراهیم ریاضیدان عرب تأثیر بسزایی در این ارتباط داشت. او توانست در قرن ۱۰ یک روش انتگرالگیری عددی معرفی کند که توسعه روش ارشمیدس بود و با این روش، مساحت سهمی را محاسبه کرد. در قرن ۱۷ نظریه انتگرالگیری عددی توسعه چشم گیری داشت به طوری که بسیاری از ریاضیدانان مشهور به این حوزه توجه خاصی کردند. سیمپسون، نیوتن و گاوس از این جمله ریاضیدانان می باشند که در فصل بعد به ارائه روشهای آنها خواهیم پرداخت. در قرنهای بعد با اختراع کامپیوتر این امکان فراهم شد که بتوان روشهای انتگرالگیری عددی را در عمل برای حل مشکلات موجود در مهندسی و علوم کاربردی، به کار برد. مطالعه سیر تاریخی تقریب چند جمله ای توابع، نشان می دهد که یکی از اولین افرادی که در این حوزه فعالیت کرده است، اویلر ریاضیدان روسی در قرن هفدهم می باشد. زمینه کاری اویلر، تقریب توابع غیر چند جمله ای توسط توابع غیر چند جمله ای توسط توابع چند جمله ای با تعداد جملات نامتناهی بوده است. پس از آن مهمترین کاری که در این زمینه انجام شد را می توان به لاگرانژ نسبت داد. وی موفق به پیدا کردن خطای تحلیلی $f(x)$ شد، که $P_n(x)$ چندجمله ای درونیاب لاگرانژ حداکثر از درجه n می باشد که مقادیر آن در $n+۱$ نقطه با $f(x)$ برابر است. $R_n(x)$ باقیمانده ی لاگرانژ نامیده می شود که برای هر $x_۰$ در دامنه ی $f(x)$ به صورت $R_n(x_۰) = \dfrac{f^{n+۱}(c)x^{n+۱}}{(n+۱)!}$ است که برای هر $x_۰$ در دامنه f می باشد. سپس چندجمله ای های درونیاب هرمیت که علاوه بر درونیابی تابع، مقدار مشتق اول تابع با مشتق اول چندجمله ای نیز در نقاط درونیاب برابر بود، مسیر جدیدی را در مسئله درونیابی گشود به طوری که چندجمله ای های هرمیت که قادر به درونیابی تابع و مشتقات متوالی تابع با مرتبه دلخواه در هر گره بودند توسط هرمیت معرفی شد.

در سال ۱۹۵۰ توران تعمیم جدیدی از روش انتگرال گیری گاوسی را معرفی کرد که در فصل ۳ این پایان نامه بررسی می کنیم، روش انتگرال گیری $Gauss-Turan$ بر پایه چندجمله ای های درونیاب هرمیت بنیادی بنا شده است، در روش گفته شده در این پایان نامه برای محاسبه انتگرال از چند جمله ای های s-متعامد که از نوع چند جمله ای متعامد گسسته است [۱]. که صفرهای این چند جمله ای گره های انتگرال گیری گاوس-توران است و برای محاسبه ضرایب انتگرال گیری دو روش معرفی می کنیم که تابع f را بر حسب چندجمله ای نیوتن تقریب می زنیم [۱]،[۲]. انتگرال گیری گاوس-توران برای چندجمله ای های از درجه $۲(s+۱)n-۱$ دقیق است و چون چندجمله

ای های s-متعامد از نوع چندجمله ای های گسسته است برای محاسبه ضرایب این چندجمله ای های روشی براساس روند تکراری نیوتن-رافسون بیان می کنیم[۱۲]. در فصل اول صورت کلی روش های انتگرال گیری عددی نیوتن در فصل دوم به معرفی توابع متعامد، زیر شاخه های کلاسیک و غیر کلاسیک آنها، خصوصیات مهم و نحوه استخراج آنها پرداخته شده است. توابع متعامد سپس در تلفیق با روش انتگرال گیری گاوس مورد بررسی قرار گرفته اند و روش های انتگرال گیری مهمی را شکل داده اند که در این فصل معرفی می شوند. درفصل سوم به بررسی روش انتگرال گیری گاوس-توران پرداخته و چندجمله ای های s-متعامد و دو روش برای محاسبه ضرایب انتگرال گیری و یک روش برای محاسبه ضرایب s-متعامد و همچنین انتگرال گیری چبیشف-توران را به دست می آوریم.

فهرست مطالب

مقدمه . . . . چ

۱ مقدمه ای بر روش های انتگرال گیری عددی **۱**

۱.۱ انتگرال گیری عددی ۱

۱.۱.۱ قوانین انتگرال گیری عمومی ۳

۲.۱.۱ فرمول لاگرانژ ۶

۳.۱.۱ فرمول های $Newton-Cotes$ ۶

۴.۱.۱ انتگرال گیری گوسی ۱۳

۵.۱.۱ فرمول های گوسی ۱۳

۶.۱.۱ فرمول های گاوسی تعمیم یافته ۱۸

۷.۱.۱ فرمول $Gauss-Jacobi$ ۱۹

۸.۱.۱ فرمول $Gauss-Legendre$ ۲۰

۹.۱.۱ فرمول $Gauss-Laguerre$ ۲۲

۱۰.۱.۱ فرمول $Gauss-Hermite$ ۲۳

۱۱.۱.۱ فرمول $Gauss-Radau$ ۲۴

۱۲.۱.۱ فرمول $Gauss-Lobatto$ ۲۵

۱۳.۱.۱ فرمول $Gauss-Chebyshev$ ۲۶

۲.۱ فرمول های $Gauss-Christoffel$ ۲۸

محاسبه وزن های کریستوفر ۳۰

تظریف تکراری از اعداد کریستو فر ۳۲

۲ چندجمله ای های متعامد و خواص آن ۳۵

۱.۲ چندجمله ای های متعامد ۳۵

۱.۱.۲ تعریف و وجود ۳۵

۲.۲ خواص چندجمله ایهای متعامد ۴۰

۱.۲.۲ تقارن ۴۰

۲.۲.۲ صفرها ۴۱

۳.۲.۲ تعامد گسسته ۴۱

۴.۲.۲ ویژ گی های فرینال ۴۲

۳.۲ رابطه بازگشتی سه -جمله ای ۴۴

۱.۳.۲ چندجمله ایهای متعامد تکین ۴۵

۲.۳.۲ چندجمله ایهای متعامد یکه ۴۶

۳.۳.۲ $Christoffel-Darbouxformula$ ۴۸

۴.۲ چندجمله ای های متعامد کلاسیک ۴۹

۱.۴.۲ چندجمله ای های متعامد کلاسیک با متغییر پیوسته ۴۹

چندجمله ای های لژاندر ۵۰

چندجمله ای های چبیشف ۵۰

چندجمله ای های ژاکوبی ۵۲

چندجمله ای های لاگور ۵۳

چندجمله ای های هرمیت ۵۳

۲.۴.۲ چندجمله ای های متعامد کلاسیک با متغییر گسسته ۵۶

چندجمله ای های چبیشف گسسته ۵۶

چندجمله ای های $Krawtchouk$ با پارامتر P ۵۶
چندجمله ای های $Charlier$ با پارامترهای a ۵۷
چندجمله ای های $Meixner$با پارامتر های C، β ۵۷
چندجمله ای های $Hahn$ با پارامترهای α، β ۵۸

۳ انتگرال گیری $Gauss-Turan$ **۶۰**
مقدمه ۶۰
۳.۰.۳ چندجمله ای درونیاب هرمیت ۶۰
۱.۳ معرفی انتگرال گیری $Gauss-Turan$ ۶۴
۱.۱.۳ ساختار چندجمله ای های s - متعامد ۶۷
۲.۱.۳ محاسبه ضرایب ۷۱
روش اول ۷۳
روش دوم ۷۶
۲.۳ انتگرال گیری $Turan$ با وزن $Chebyshev$ ۷۹
۳.۳ محاسبه ی ضرایب چندجمله ای های s - متعامد ۸۲
۱.۳.۳ مقدمه ۸۲
۲.۳.۳ شرح روش ۸۳
۳.۳.۳ نتایج عددی ۸۷
۴.۳.۳ پیوست ۱۰۲

فصل ۱

مقدمه ای بر روش های انتگرال گیری عددی

۱.۱ انتگرال گیری عددی

محاسبه ی انتگرال های معین به شکل $\int_a^b f(x)dx$ که در آن a و b متناهی و $f(x)$ بر $[a,b]$ معین باشد، با روش های تحلیلی، یعنی با استفاده از تابع اولیه $f(x)$، غالباً مشکل یا غیر ممکن است. بنابراین حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای $f(x)$ انتگرال گیری عددی استفاده می شود. واضح است که انتگرال معین را می توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ که محصور محور x وخطوط $x=a$، $x=b$ است، تعبیر کرد و با تقسیم بازه $[a,b]$ به زیر بازه ها و جمع کردن مساحت های مربوط به این زیر بازه ها آن را محاسبه کرد. با استفاده از این خاصیت و چند جمله ای درونیاب می توان تقریب های مناسبی برای $\int_a^b f(x)dx$ به دست آورد. ابتدا بازه ی $[a,b]$ رابه n قسمت مساوی تقسیم می کنیم، یعنی $[a,b]$ به زیر بازه های:

$$[x_i, x_{i+۱}], i = ۰, ۱, ..., n-۱$$

تقسیم می شود که در آن

$$x_{i+۱} - x_i = h, , i = ۰, ۱, ..., n-۱$$

و در نتیجه

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

همان طوری که اشاره شد، یکی از روش های ساده، جایگزینی f توسط یک چند جمله ای تقریب و انتگرال گیری از آن است. در این راستا چند جمله ای تیلور را کنار می گذاریم زیرا احتیاج به محاسبه ئ مشتقات f دارد. در کل می توان گفت که انتگرال معین تابع f به عنوان یک تابع خطی است که از فضای تمامی توابع انتگرال پذیر روی $[a,b]$ به یک میدان تعریف می شود. حال هدف این است که این تابع خطی یعنی

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

با یک تابع خطی Q به صورت زیر تقریب زده شود.

$$Q(f)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}A_{ij}f^{(i)}(a_{ij})$$

بدیهی است که $Q(f)$ کووادراتور متشکل از ترکیبات خطی مشتقات تابع f به ازای نقاط انتگرال گیری موجود در افراز $[a,b]$ است. با توجه به این که QI ، I را تقریب می زند داریم:

$$I(f)=Q(f)+E$$

که در آن E به عنوان جمله ی باقیمانده (خطای)تقریب است. یعنی داریم:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}A_{ij}f^{(i)}+E$$

در این قسمت هدف به دست آوردن انواع مختلف کووادرتور ها برای تقریب I است. روش های موجود در این فصل را به دو دسته تقسیم می کنیم:

۱.فرمول انتگرالگیری نیوتن -کوتز

۲.فرمول انتگرال گیری گاوس

به ترتیب بررسی خواهیم کرد. قبل از آن که به بررسی این دو فرمول انتگرال گیری بپردازیم، قواعد انتگرال گیری درونیاب را یاد آوری می کنیم و سپس فرمول های نیوتن -کوتز و گاوس را بررسی می کنیم.

۱.۱.۱ قوانین انتگرال گیری عمومی

فرض می کنیم $p(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)$ باشد، بنابراین می توان تابع $f(x)$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x) = p(x) + r(x) \tag{۱.۱}$$

که $r(x)$ باقیمانده انتگرال گیری است و چندجمله ای درونیاب $p(x)$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=۱}^{n} \frac{\pi(x)}{(x-x_k)\pi'(x_k)} f(x_k), \\ \pi(x) &= (x-x_۱)(x-x_۲)...(x-x_k). \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

بنابراین برای محاسبه مقدار دقیق انتگرال تابع $f(x)$ طرفین رابطه (۲.۱) را در تابع $\omega(x)$ ضرب کرده و روی بازه $[a,b]$ انتگرال می گیریم:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = \int_a^b \omega(x) p(x) dx + \int_a^b \omega(x) r(x) dx. \tag{۳.۱}$$

مقدار باقیمانده $r(x)$ بستگی به دقت درونیابی چند جمله ای $p(x)$ دارد. بنابراین اگر $r(x)$ در سرتاسر بازه $[a,b]$ ناچیز باشد، آنگاه از جمله دوم در معادله (۳.۱) می توان صرف نظر کرد. در این حالت می توانیم مقدار انتگرال را از تقریب زیر به دست آورد.

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{k=۱}^{n} A_k f(x_k), \tag{۴.۱}$$

که در آ ن A_k به صورت زیر می باشند:

$$A_k = \int_a^b \omega(x) \frac{\pi(x)}{(x-x_k)\pi'(x_k)} dx. \tag{۵.۱}$$

فرمول های انتگرال گیری که از رابطه (۴.۱) بدست می آیند را **فرمول های انتگرال گیری درونیاب** نامیم.

باقیمانده $R(f)$ از فرمول (۴.۱) به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(f) \equiv \int_a^b \omega(x)f(x)dx = \int_a^b \omega(x)\pi(x)f(x, x_1, ..., x_k)dx. \qquad (۶.۱)$$

قضیه ۱.۱.۱. شرط لازم و کافی برای این که فرمول انتگرال گیری (۴.۱) یک فرمول درونیاب باشد این است، که برای تمام چندجمله ای های ممکن $p(x)$ حداکثر از درجه $n-1$ دقیق باشد.

اثبات. مراجعه شود به مرجع [۱۷]. □

قضیه ۲.۱.۱. اگر $f \in C^n[a, b]$، آنگاه باقیمانده $R(f)$ را به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$R(f) = \int_a^b \int_0^1 \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{n-1}} \omega(x)\pi(x)f^{(n)}\left(x + \sum_{k=0}^{n} t_k(x_k - x_{k-1})\right) dt_n....dt_1dx, \qquad (۷.۱)$$

که در آن $x = x_0$.

اثبات. [۱۷] □

حال اگر از فرمول های لاگرانژ برای نمایش $r(x)$ استفاده کنیم داریم:

$$r(x) = \frac{1}{n!}\pi(x)f^n(\xi), \quad a \leq \xi \leq b,$$

آنگاه تابع خطا انتگرال گیری به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b \omega(x)\pi(x)f^{(n)}(\xi)dx. \qquad (۸.۱)$$

این تعریف برای باقیمانده $R(f)$ کران دقیقی را نشان نمی دهد، زیرا نمی توان چگونگی وابستگی ξ به x را تعیین

کرد. اما اگر $| f^n(x) | \leq M_n$ برای تمام $x \in [a,b]$، آنگاه بر اساس فرمول (۸۰۱) داریم:

$$| R(f) | \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b | \omega(x)\pi(x) | dx. \tag{۹.۱}$$

اگر حاصل ضرب $\omega(x)\pi(x)$ روی بازه $[a,b]$ تغییر علامت ندهد، از اینرو کرانی که در (۸۰۱) بیان شده را نمی توان بهبود داد. اگر چه برای $\omega(x)$ دلخواه و دنباله دلخواه از n تا گره های، x_k داریم:

$$R(f) = \int_a^b K(t) f^{(n)}(t) dt, \tag{۱۰.۱}$$

که در آن هسته $K(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$K(t) = \int_a^b \omega(x)[U(x-t) - U(a-t)] \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \sum_{k=1}^{n} A_k [U(x_k - t) - U(a-t)] \frac{(x_k - t)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{۱۱.۱}$$

و اگر $t \neq a$ و $t \neq x_k$، برای هر $k = 1, ..., n$، آنگاه

$$K(t) = \begin{cases} -\int_a^t \omega(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dx + \sum_{x_k < t} A_k \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} & if \quad t < a \\ \int_a^t \omega(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \sum_{x_k > t} A_k \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} & if \quad t > a \end{cases} \tag{۱۲.۱}$$

در نتیجه، اگر $| f^{(n)}(x) | \leq M_n$ برای هر $x \in [a,b]$، داریم:

$$| R(f) | \leq M_n \int_a^b | K(t) | dt. \tag{۱۳.۱}$$

۲.۱.۱ فرمول لاگرانژ

فرمول لاگرانژ در بازه $[a,b]$ به شکل زیر بیان می کنیم:

$$I_a^b(f)=\sum_{k=0}^{n}(L_k^{(n)}(b)-L_k^{(n)}(a))f_k+R_n,$$

که در آن

$$L_k^{(n)}(x)=\frac{1}{\pi_n'(x_k)}\int_{x_0}^{x}\frac{\pi(t)}{t-x_k}dt=\int_{x_0}^{x}l_k(t)dt,$$

$$l_k(x)=\frac{\pi_n(x)}{(x-x_k)\pi_n'(x)}=\frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)},$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b\pi_n(x)f^{(n+1)}(\xi(x))dx.$$

برای نقاط متساوی الفاصله x_k فرمول لاگرانژ به صورت زیر به دست می آید:

$$\int_{x_0}^{x_n}f(x)dx=\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{n}f_i\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_{x_0}^{x_k}\frac{\pi_n(x)}{x-x_i}dx+R_n, \tag{۱۴.۱}$$

$$\int_{x_0}^{x_{m+1}}f(x)dx=h\sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]}A_i(m)f_i+R_n, \tag{۱۵.۱}$$

که $A_i(m)$ ضرایب انتگرال گیری لاگرانژ می باشند.

۳.۱.۱ فرمول های $Newton-Cotes$

انتگرال معین $I_a^b(f)=\int_a^b f(x)dx$ را در نظر می گیریم. بازه $[a,b]$ به n زیر بازه مساوی با طول $h=\frac{(b-a)}{n}$ در نقاط $a,a+h,a+2h,...,a+nh$ افراز می کنیم. فرمول های انتگرال گیری را در این نقاط که گره ها ی انتگرال گیری درونیاب هستند، را به دست می آوریم. مقادیر ضرایب A_K در فرمول (۴۰۱) به طور مستقل از بازه $[a,b]$

تعیین می شود. بنابراین فرمول (۱۰۴) را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=۰}^{n} C_k^n f(a+kh), \tag{۱۶.۱}$$

که به **فرمول های** $Newton-Cotes$ معروف است و در آن ضرایب C_k^n را به صورت زیر می باشند:

$$C_k^n = \frac{A_k}{(b-a)} = \frac{۱}{(b-a)}\int_a^b \frac{\pi(x)}{(x-a-kh)\pi'(a+kh)}dx, \tag{۱۷.۱}$$
$$\pi(x) = (x-a)(x-a-h)(x-a-۲h)....(x-a-nh).$$

اگر $x = a+th$ قرار دهیم، بنابراین

$$x-a-kh = h(t-k),$$
$$\pi(x) = h^{n+۱}t(t-۱)(t-۲)...(t-n),$$
$$\pi'(a+kh) = (-۱)^{n-k}h^n k!(n-k)!,$$

از اینرو به دست می آوریم:

$$C_k^n = \frac{(-۱)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_۰^n t(t-۱)(t-۲)...(t-k+۱)(t-k-۱)...(t-n)dt. \tag{۱۸.۱}$$

ضرایب C_k^n به **اعدادکوتز**[۱] معروف است.

در محاسبه اعداد کوتز برای $k \leq \frac{n}{۲}$ نتیجه می شود که $C_k^n = C_{n-k}^n$.

به منظور بررسی رفتار فرمول نیوتن کوتز (۱۰۶۱) برای n بزرگ که تعداد زیادی گره را شامل می شود، نمایش مجانبی C_k^n را به دست خواهیم آورد. ابتدا فرمول انتگرال گیری را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$I = \int_۰^n \frac{x(x-۱)(x-۲)...(x-n)}{x-k}dx. \tag{۱۹.۱}$$

---

[۱] $Cotesian\ number$

با توجه به روابط $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n)} = x(x-1)....(x-n)$ و $\frac{\Gamma(1-x)\sin(\pi x)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(x)}$ می توان نتیجه گرفت: $x(x-1)...(x-n) = \frac{(-1)^n}{\pi}\Gamma(x+1)\Gamma(n+1-x)sin(\pi x),$ بنابراین فرمول (۱۹.۱) به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \int_0^n \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-1+x)\sin(\pi x)}{\pi(x-k)} dx \\ &= (-1)^n \left(\int_0^3 + \int_3^{n-3} + \int_{n-3}^n \right) \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n+1-x)\sin(\pi x)}{\pi(x-k)} dx \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{۲۰.۱}$$

چون $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right)$ برای $z > 0$ یک تابع صعودی و یکنواست و با توجه به این که با استفاده ازبسط تیلور $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ (برای z های بزرگ)از مرتبه $\frac{1}{z}$ است. بنابراین

$$\ln\Gamma(n+1-x) = \ln\Gamma(n+1) - \frac{x\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

سپس با استفاده از تقریب $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z + O\left(\frac{1}{z}\right)$ برای z های بزرگ، نتیجه می گیریم که:

$$\Gamma(n+1-x) = \Gamma(n+1)\, e^{-x\ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

همچنین برای $0 \le x \le 3$:

$$\Gamma(x+1)\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)} = -\frac{x}{k} + O\left(\frac{x^2}{k}\right),$$

و

$$\int_0^3 x e^{-x\ln n} dx = \frac{1}{\ln^2 n} - \frac{1}{n^3}\left[\frac{3}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n}\right],$$

$$\int_0^3 x^2 e^{-x\ln n} dx = \frac{2}{\ln^3 n} - \frac{1}{n^3}\left[\frac{9}{\ln n} + \frac{6}{\ln^2 n} + \frac{2}{\ln^3 n}\right],$$