مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
قسمت میکروفیلم

بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۱/۰۴/۲۶

٤١١٣٣

۱۳۸۱ /۴/ ۲۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

۱۳۸۱ /۴/ ۲۶

بررسی هیدرودینامیکی جریان نوسانی حول استوانه

۱۳۸۱ /۴/ ۲۶

رساله دکترای مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی

محسن ثقفیان

استاد راهنما

دکتر محمد سعید سعیدی

۱۳۸۰

٤١١٤٤

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

رساله دکترای مهندسی مکانیک آقای محسن ثقفیان

تحت عنوان

بررسی هیدرودینامیکی جریان نوسانی حول استوانه

در تاریخ ۱۳۸۰/۱۰/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و صحت و اصالت رساله مورد تائید قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای رساله (رئیس هیئت داوران) دکتر محمد سعید سعیدی

۲- استاد مشاور دکتر ابراهیم شیرانی

۳- استاد مشاور دکتر احمد رضا پیشه ور

٤- استاد داور دکتر قاسم حیدری نژاد

٥- استاد داور دکتر سید محمد حسین کریمیان

٦- استاد داور دکتر مهرداد تقی زاده منظری

۷- استاد داور دکترا حمدرضا عظیمیان

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر احمد رضا عظیمیان

تشکر و قدردانی

با سپاس از خداوند بزرگ لازم میدانم امتنان خالصانه خود را حضور استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد سعید سعیدی که راهنمائیها و تشویق های مکرر ایشان فرا راه من در انجام این رساله بود تقدیم نمایم.

از آقایان دکتر ابراهیم شیرانی و دکتر احمد رضا پیشه ور که از راهنمایی های ایشان در رفع کاستی ها و پیشبرد کار بهره بردم و از آقای پرفسور Peter K. Stansby در دانشگاه UMIST انگلستان که در طول اقامتم در آن دانشگاه با راهنمایی ها و همکاری صمیمانه خود مرا در انجام این پژوهش یاری نمودند تشکر می نمایم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نو آوری های ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

با یاد پدرم که همیشه مشوق من در طول تحصیل بود و با سپاس از مادر، همسر و پدر و مادر همسرم که با همدلی خویش مرا در انجام این پژوهش یاری نمودند.

تقدیم به همسرم

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فهرست مطالب	شش
چکیده	۱
فصل اول : مقدمه	
۱-۱ مقدمه	۲
۱-۲ تاریخچه و مروری بر کارهای انجام شده	۵
۱-۳ کار حاضر	۱۷
فصل دوم : جریان نوسانی آرام حول استوانه	
۲-۱ مقدمه	۲۰
۲-۲ معادلات حاکم	۲۱
۲-۲-۱ معادلات جریان و روش حل	۲۱
۲-۲-۲ شرایط مرزی	۲٤
۲-۳ نتایج	۲۵
۲-۳-۱ جریان کامل نوسانی دو بعدی	۲۵
مطالعه شبکه	۲٦
بررسی سینماتیک جریان	۲۷
بررسی دینامیک جریان	۳۷
بررسی اثرات چرخش و گردابه ها	٤۷
۲-۳-۲ ناپایداری های سه بعدی	۵۲
جزئیات حل	۵۲
نتایج سه بعدی	۵۳
۲-٤ جمع بندی	۵۷
فصل سوم : جریان دائم مغشوش حول استوانه	
۳-۱ مقدمه	۵۸
۳-۲ معادلات ریاضی	٦٤
۳-۲-۱ معادلات جریان	٦٤
۳-۲-۲ مدل خطی	٦۵
شکل رینولدز بالا	٦۵

شکل رینولدز پائین ٦٧
٣-٢-٣ مدل غیر خطی ٦٧
٣-٣ حل عددی ٧٢
٣-٤ نتایج ٧٤
٣-٥ بحث و نتیجه گیری ٨٥
فصل چهارم : جریان نوسانی مغشوش حول استوانه
٤-١ مقدمه ٨٨
٤-٢ جزئیات حل ٨٩
٤-٣ نتایج ٩٠
٤-٤ بحث و نتیجه گیری ١١٠
فصل پنجم : نتیجه گیری
٥-١ جمع بندی ١١١
٥-٢ پیشنهادات ١١٤
مراجع ١١٥
چکیده انگلیسی ١٢٢

چکیده

در کار حاضر، جریان نوسانی آرام در $\beta = 35$ و $\beta = 196$ بصورت عددی با روش سیمپل سی و بکمک یک شبکه منطبق بر بدنه نوع O و هم مکان در محدوده $1 < KC < 30$ که رژیم های گوناگون جریان را می پوشاند حل شده است. نتایج بدست آمده از این شبیه سازی نشان دهنده قابلیت مدل دو بعدی در معرفی سینماتیک جریان و رژیم های مختلف و ریزش گردابه ها است. معادله موریسون در KCهای کوچک برازش خوبی را از نیروی طولی ارائه میدهد ولی در اعداد کیولگان- کارپنتر بزرگتر این انطباق ضعیفتر است. انطباق خوبی بین نتایج بدست آمده و نتایج تجربی موجود مشاهده شده و برخی از پدیده های جریان مانند تغییر مود و سه بعدی شدن جریان یا ناپایداری هونجی مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی تغییرات زمانی نیروی طولی وارد بر استوانه اطلاعات دقیقی در ارتباط با ریزش گردابه ها در هر سیکل و فرکانس ریزش آنها و نحوهٔ تغییر مود جریان ارائه می دهد. در عین حال نتایج بدست آمده به خوبی تغییرات زمانی نیروی طولی و عرضی یک مود خالص را در مقایسه با نتایج تجربی ارائه می دهد. همینطور نشان داده شده است که ضریب لیفت را می توان به شرط انتخاب مدار مناسب با تئوری کوتا بدست آورد که این نتیجه با ساختن جریان پتانسیل نظیر آن نیز تایید می شود. ناپایداری های سه بعدی هونجی نیز با یک تحلیل سه بعدی عددی برای $\beta = 200$ شبیه سازی شده است. بررسی این جریان نشان می دهد که در $KC = 1$ جریان دو بعدی و در $KC = 2$ سه بعدی است. بطور کلی نتایج بدست آمده با نتایج آزمایش توافق دارد.

در بخش دیگر جریان مغشوش دائم عبوری از روی استوانه دایره ای در اعداد رینولدز زیر بحرانی تا فوق بحرانی با بکارگیری مدلسازی غیر خطی بصورت دو بعدی شبیه سازی شده است. شبیه سازی عددی حاضر و مدل اغتشاش غیر خطی کرافت- لاندر- سوگا، با تنظیم محدود جمله های مرتبه سوم، توانسته است افت درگ را در عدد رینولدز حدود 2×10^5 بعلت وقوع اغتشاش در بالا دست نقطه جدایی پیش بینی کند. اندکی پس از این نقطه در اعداد رینولدز بحرانی، به علت عدم شبیه سازی حباب های چسبیده جدایی، درگ بیش از حد پیش بینی میشود ولی در ناحیه فوق بحرانی درگ را دوباره بهتر پیش بینی می کند. در جریان نوسانی مغشوش و برای $\beta = 1035$ و $\beta = 11240$ و در محدوده $1 < KC < 20$ ضرایب درگ و اینرسی توافق خوبی با نتایج آزمایش دارند. همینطور در $\beta = 1035$ ضریب لیفت با نتایج تجربی موجود سازگار است. برای $\beta = 11240$ پیش بینی شده است که جدائی جریان بعلت اثرات اغتشاش به تعویق میافتد که باعث کاهش ضرایب نیرو و تشکیل دنباله ای میشود که بیشتر در جهت جریان است تا جهت عرضی. با وجودی که این جریان ها بشدت پیچیده هستند ولی شکل گیری حبابهای چسبیده جدایی در آنها بسیار بعید است و ضعف عدم پیش بینی آنها در جریان دائم در بررسی جریان نوسانی اثر منفی نخواهد داشت. این پیش بینی ارضا کننده، از روش واقع بینانه بکار گرفته شده برای مدل کردن اغتشاش ناشی میشود که توانایی برآورد برخی اثرات فیزیکی مهم را دارد.

فصل یکم
مقدمه

۱-۱ مقدمه

استوانه ها عنصر اصلی در ساختار بسیاری از تجهیزات و دستگاه هایی هستند که با حرکت سیال سرو کار دارند. مقطع بال هواپیما و هلیکوپتر یک استوانه با مقطع ایر فویل است. بسیاری از ساختمانها و سازه ها استوانه هایی با مقطع مربع، بیضی و یا دایره هستند. پایه اسکله ها و سکوهای دریایی و دور از ساحل، پایه و مهار پلها، انواع برجها و دودکشها، لوله های مبدلهای حرارتی یا بویلرها، میله های سوخت هسته ای و تجهیزات اندازه گیری دارای مقاطع استوانه ای هستند. استوانه ها یک المان کلیدی از سازه های گوناگون آبی و دریایی (لوله ها، سکوها، اسکله ها، کابلها ،...) یعنی جایی که تحت جریان دائم و یا امواج و یا ترکیبی از آنها قرار میگیرند می باشند. لذا توانایی توصیف بارهای دینامیکی بر روی سازه های مهندسی از اهمیت زیادی در طراحی مهندسی تجهیزات آبی برخوردار است. جریان حول استوانه با مقطع دایره ای از ابتدای پرواز مورد توجه مهندسان هوا فضا نیز بوده است. کاربردهای زیادی برای آن از نیروهای وارده به کابلهای اتصالی و میله های رابط هواپیماهای دو باله اولیه گرفته تا نیروی باد وارد بر راکت فضایی بر روی

سکوی پرتاب وجود دارد. به همین دلایل است که جریان سیال اطراف استوانه از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بوده و یک مسئله کلاسیک در دانش مکانیک سیالات بشمار می رود.

اگر چه استوانه دایره ای هندسه ساده ای دارد ولی جریان حول آن بسیار پیچیده تر از سایر استوانه ها است. وجود لبه های تیز در استوانه مربعی یا مستطیلی و همینطور لبه فرار تیز ایرفویل ها جریان را از بعضی جنبه ها ساده تر میکند. در دهه های اخیر تمرکز زیادی برای کار عددی بر روی استوانه دایره ای شده بطوری که اغلب به عنوان یک نمونه تست روشهای عددی به کار میرود ولی با وجود آن هنوز جریان حول استوانه رازهای زیادی را با خود دارد. حل عددی جریان آرام دائم دو بعدی با وجودی که با توجه به عدد رینولدز ویژگیهای گوناگونی به خود می گیرد، اکنون یک امر عادی است ولی مدل کردن جریان مغشوش از رینولدز زیر بحرانی تا فوق بحرانی ($10^4 \leq Re \leq 10^7$) دارای پیچیدگی هایی است که به جرات میتوان گفت هنوز حل عددی جریان در آن محدوده نیاز به کار بسیاری دارد. در این راستا باید از مدلهایی برای اغتشاش استفاده شود که بتواند در دنباله گذار جریان را به مغشوش (در ناحیه زیر بحرانی) و مغشوش شدن جریان در لایه مرزی (بحرانی و فوق بحرانی) را به درستی پیش بینی کند.

مطالعه برروی جریان نوسانی حول اجسام، اهمیت زیادی در بسیاری از زمینه ها مانند تجهیزات حرارتی و اندازه گیری، مهندسی هوافضا، سازه های مهندسی و دریایی از قبیل سکوها و سازه های دور از ساحل، تجهیزات حفاری دریایی، پلهای معلق، برجها و دودکشها دارد. حضور چند برج در مجاورت یکدیگر و در معرض وزش باد می توانند جریانی همراه با نوسان را بر روی یکدیگر و یا سازه های کوچکتر القا کند. ارتعاش برجها و یا پلها در اثر جریان باد در واقع به نوعی به بررسی جریان نوسانی حول آنها منجر می شود. نوسان می تواند انتقال حرارت را در لوله های مبدل های حرارتی بطور قابل ملاحظه ای افزایش داده و همینطور بر سیستم های اندازه گیری نیز اثر گذارد. جریان نوسانی برروی ایرفویلها نیز در بسیاری موارد مورد توجه است. برای مثال در پرواز رو به جلوی هلیکوپتر در هرمقطع بال هم جریان نسبی هوا دارای نوسان است و هم زاویه حمله آن نوسانی است. سرعت هوا روی بالی که به سمت جلو حرکت میکند بیش از بالی است که به سمت عقب باز میگردد. بنا بر این سرعت نسبی هوا روی مقاطع بال آن با چرخش روتور نوسانی است. این اختلاف سرعت باعث عدم تعادل نیروهای بالی که به سمت جلو حرکت میکند و بالی که به سمت عقب باز می گردد میشود. برای برقراری تعادل باید زاویه حمله نیز در یک دور چرخش بال به گونه ای نوسان نماید که تعادل نیرویی حفظ شود. تحلیل این حرکت پیچیده به طراحی بهینه پروانه آن و مانورپذیری بیشتر و اجتناب از واماندگی رتورکمک میکند. پره های کمپرسورها و تجهیزات بالابرنده جنگنده های سریع

در حال مانور که در حوالی زاویه واماندگی با یک لیفت زیاد نوسانی مواجه هستند از جمله موارد دیگر مطالعه برروی جریان نوسانی حول ایرفویل هاست.

در تحلیل هیدرودینامیکی سازه های دریایی جریان القائی یک موج سطحی به صورت یک جریان نوسانی در زیر سطح خود را نشان داده و مسئله به تحلیل جریان نوسانی حول سازه منجر می شود. در بسیاری از سازه ها، ارتعاش آنها و مسئله میرایی هیدرودینامیکی اهمیت پیدا میکند.

توسعه روشهای جدید اندازه گیری که به جمع آوری اطلاعات در مورد تغییرات زمانی ویژگیهای جریان کمک میکند استفاده از روشهای تجربی را ممکن ساخته است. توسعه در روشهای عددی و افزایش عملکرد نرم افزارها در کامپیوترهای پیشرفته این امکان را نیز فراهم نموده است که بررسی های آزمایشگاهی با محاسبات کامپیوتری پشتیبانی شود.

نیروهای نوسانی وارد بر سازه ها باعث ارتعاشات و ناپایداری آنها میشوند. در نوسانات با فرکانس بالا، اعضا عمدتا تحت تاثیر نیروهای اینرسی هستند اما نیروی درگ در میرایی هیدرودینامیکی یک سازه موثر است. بنا بر این نیروی درگ حتی اگر بعنوان یک نیروی مستقیم وارد بر یک سازه ثابت ناچیز باشد، به علت کنترل دامنه ارتعاشات بسیار مهم است. به همین علت در سالهای اخیر مسئله میرایی هیدرودینامیکی در جریان مغشوش بشدت مورد توجه بوده است. در فرکانس های پائین تر به تدریج درگ بعنوان یک نیروی مستقیم نیز اهمیت خود را نشان میدهد. هدف از تحلیل جریان محاسبه این نیروها شامل نیروهای درگ، لیفت و نیروهای مجازی یا اینرسی است.

۱-۲ تاریخچه و مروری بر کارهای انجام شده

جریان حول استوانه معمولا به چند صورت مورد توجه قرار می گیرد.

۱ - جریان یکنواخت عبوری از روی یک استوانه در حال نوسان عرضی یا طولی. نوسان عرضی یعنی جهت نوسان عمود بر جهت جریان یکنواخت و نوسان طولی یعنی نوسان در جهت جریان یکنواخت است.

۲ - استوانه ثابت در جریان دارای نوسان طولی یا عرضی.

۳ - استوانه نوسانی در سیال ساکن.

٤ - جریان نوسانی حول استوانه ثابت.

حالت اول و دوم:

عدد رینولدز $Re = U_0 D/\nu$، عددی که معرف فرکانس بی بعد نوسان است $S_c = fD/U_0$ و با عدد استروهال که معرف فرکانس طبیعی گردابه هاست مقایسه میشود پارامترهای مشخص کننده جریان هستند. پارامتر سوم دامنه بی بعد نوسان (A/D یا U_a/U_0) است. در این روابط U_0 سرعت جریان، D قطر استوانه، f فرکانس نوسان و A دامنه نوسان استوانه و U_a دامنه نوسان سرعت است.

در این حالت ها میتوان به کارهای عددی انجام شده توسط چیلوکوری[1] [۱]، منگانی و بیر من[2] [۲]، لو و دالتون[3] [۳]، چنگ و هونگ[4] [٤]، آناگنوستوپولوس[5] [٥] و کارهای تجربی انجام شده توسط گریفین و هال[6] [٦]، چنگ و همکاران[7] [۷] و نگوین و کوکابیک[8] [۸] استناد کرد. ازپدیده های جالب ومهم که همه به آن اشاره کرده اند اثر lock-on میباشد. هنگامیکه استوانه نسبت به سیال شروع به حرکت میکند، به خصوص وقتی که فرکانس نوسان به فرکانس ریزش گردابه ها نزدیک میشود، یک تداخل غیر خطی به وجود می آید که به دوصورت خود را نشان می دهد. اول در دنباله[9]، فرکانس ریزش گردابه ها ناگهان از فرکانس طبیعی به سمت فرکانس نوسان استوانه شیفت پیدا میکند و نوعی پدیده تشدید بین ریزش گردابه ها و نوسان استوانه و یا جریان در محدوده ای از فرکانس ایجاد میشود. با افزایش فرکانس، دوباره فرکانس ریزش گردابه ها به سمت مقدار طبیعی آن میل پیدا میکند. دوم اینکه نیروی درگ به طور محسوسی یک قله در وسط محدوده تشدید دارد. این رژیم را رژیم lock-cn می گویند. در جابجایی اجباری همراه با نوسان، ضریب انتقال حرارت نیز افزایش می یابد و در حوالی منطقه lock-on این افزایش قابل توجه است.

حالت سوم و چهارم :

عدد رینولدز $Re = U_0 D/\nu$ و عدد کیولگان-کارپنتر $KC = U_0 T/D = U_0/fD$ و عدد موسوم به استوکس یا پارامتر فرکانس $\beta = Re/KC = D^2/\nu T$ بعنوان مشخص کننده جریان بکار می روند. واضح است که این سه پارامتر از هم جدا نیستند لذا معمولا عدد KC و β یا KC و Re برای مشخص کردن

---

[1] Chilukuri (1987)

[2] Meneghani & Bearman (1995)

[3] Lu & Dalton (1996)

[4] Cheng & Hong (1997)

[5] Anagnostopoulos (2000)

[6] Griffin & Hall (1991)

[7] Cheng , Chen & Aung (1997)

[8] Nguyen & Kocabiyik (1997)

[9] Wake

جریان بکار میروند. در مواردی که استوانه در سیال ساکن بصورت سینوسی نوسان دارد KC را میتوان به شکل $KC=2\pi A/D$ تبدیل کرد یعنی KC متناسب با دامنه نوسان معرفی میشود. در این روابط U_0 سرعت حداکثر، D قطر استوانه، f و T فرکانس و پریود نوسان هستند. نتایج بدست آمده به ازای βهای بزرگ برای برآورد بارهای وارده به سازه های دریایی در معرض موج بکار میروند. جریان نوسانی سینوسی حول یک استوانه و یا حرکت سینوسی یک استوانه در یک سیال لزج ساکن از مدتها قبل مورد توجه دانشمندان دینامیک سیالات ومهندسی سازه های دور از ساحل[1] بوده است. زیرا استوانه (شمع) بعنوان المان اصلی تشکیل دهنده پایه سازه های دور از ساحل محسوب میشود. نیروهای وارد بر استوانه (F_x,F_y) با $\frac{1}{2}\rho U_0^2$ بدون بعد (C_x,C_y) میشوند. برای سادگی اغلب فرض میشود که نیروی طولی F_x، جمع جبری نیروی درگ ونیروی مجازی (اینرسی) است.

$$F_x = \tfrac{1}{2}\rho U|U|C_D D + \tfrac{1}{4}\rho\pi D^2 C_M \frac{dU}{dt} \qquad ۱-۱$$

C_D و C_M به ترتیب ضرائب درگ و اینرسی هستند که با فرض ثابت بودن در طی هر سیکل با روش حداقل مربعات یا میانگیری فوریه یا روش حداکثر مقدار بدست می آیند. اگر $U=U_0 Sin(2\pi t/T)$ بوده و معادله را با $\tfrac{1}{2}\rho U_0^2 D$ بدون بعد کنیم داریم:

$$C_x = C_D \cdot Sin(\theta)\cdot|Sin(\theta)| + \left(\pi^2 C_M/KC\right)\cdot Cos(\theta) \qquad ۲-۱$$

در این رابطه $\theta=2\pi t/T$، ρ دانسیته یا چگالی، D قطر استوانه، U سرعت لحظه ای سیال یا استوانه، T پریود نوسان و t زمان است. این معادله معرف تمام جنبه های نیروی واقعی نیست ولی ما را در مقایسه نتایج با توجه به اینکه C_D و C_M فقط به KC و β بستگی دارند کمک می نماید.

معادله فوق که توسط موریسون و همکارانش[2] [۹] ارائه شد به معادله موریسون معروف است. این معادله به شرط تعیین C_D و C_M یک حل تقریبی از یک مسئله پیچیده است و صحت آن به نتایج آزمایش و یا محاسبات برمیگردد. روش میانگیری فوریه از این مسئله که میانگین $U(t)dU(t)/dt$ در طی یک موج صفر است استفاده کرده و ضرائب درگ و اینرسی را بصورت زیر ارائه میدهد:

$$C_D = \frac{2\overline{F_x(t)U(t)}}{\rho D\overline{|U(t)|^3}} \quad ، \quad C_M = \frac{2\overline{F_x(t)\dot{U}(t)}}{\rho\pi D^2\overline{|\dot{U}(t)|^2}} \qquad ۳-۱$$

---

[1] Offshore engineering

[2] Morison, O'Brien, Johnson & Schaaf (1950)

$$\overline{F_x(t)U(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T F_x(t)U(t)dt \quad ، \quad \overline{|U(t)|^n} = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)^n dt \qquad ۱-۴$$

اگر $U = U_0 Sin(2\pi t/T)$ باشد داریم:

$$C_D = \frac{2}{8}\int_0^{2\pi} C_x Cos(\theta)d\theta \quad ، \quad C_M = \frac{KC}{\pi^3}\int_0^{2\pi} C_x Cos(\theta)d\theta \qquad ۱-۵$$

بنابراین C_D و C_M با فرض ثابت بودن در طی هر سیکل بدست می آیند. این ضرائب با روش حداقل مربعات نیز بصورت یکسان قابل محاسبه هستند. با محاسبه C_D و C_M معادله موریسون یک برازش منطقی را از منحنی F_x ارائه میدهد.

اولین مطالعه نظری بر روی این جریان توسط استوکس[1] [۱۰] و برای KCهای بسیار کوچک انجام شد. سپس ونگ[2] [۱۱] با فرض جریان چسبیده[3] آنرا تکمیل نمود. نتایج این مطالعات برای جریان نوسانی حول استوانه که برای $\beta >> 1$ و $KC << 1$ معتبر است بصورت زیر است:

$$C_D = \frac{3\pi^2}{2KC}\left[(\pi\beta)^{-1/2} + (\pi\beta)^{-1} - \tfrac{1}{4}(\pi\beta)^{-3/2} + \ldots\right] \qquad ۱-۶$$

$$C_M = 2 + 4(\pi\beta)^{-1/2} + (\pi\beta)^{-3/2} + \ldots$$

در چند دهه اخیر در آزمایشگاههای هیدرودینامیک تلاش زیادی برای تعیین ضرائب درگ و اینرسی بخصوص بر روی استوانه مدور بر حسب اعداد کیولگان-کارپنتر، رینولدز یا β صورت گرفته است. کیولگان و کارپنتر[4] [۱۲] یک استوانه عمودی را در زیر امواج در یک تانک موج قرار دادند و دریافتند که مقادیر میانگین C_D و C_M تابعی از عدد کیولگان-کارپنتر(KC) هستند. با استفاده از لوله U شکل برای تولید جریان یک جهتی سینوسی حول جسم، سارپکایا[5] [۱۳] دریافت که C_D و C_M نه تنها به KC بستگی دارد بلکه به پارامتر β که متناسب با عدد رینولدز است ($\beta = Re/KC = D^2/\nu T$) نیز بستگی دارند. هونجی[6] [۱۴] پایداری جریان را برای یک استوانه نوسانی در سیال ساکن در محدوده $70 < \beta < 700$ و

---

[1] Stokes (1851)

[2] Wang (1968)

[3] Attached flow

[4] Keulegan & Carpenter (1958)

[5] Sarpkaya (1976)

[6] Honji (1981)