دانشگاه یزد
دانشکده ریاضی

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

متمم‌پذیری و متمم‌ناپذیری فضاهایی از عملگرها

استاد راهنما: دکتر سیدمحمد مشتاقیون

استاد مشاور: دکتر سید محمدصادق مدرس مصدق

پژوهش و نگارش: زهرا محمدی هفتادر

دی‌ماه ۱۳۸۸

تقدیم به تمام ستارگان آسمان زندگی‌ام

به ویژه آن دو خورشید درخشان

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان‌نامه متمم‌پذیری و متمم‌ناپذیری رده‌هایی از عملگرها در فضای همه‌ی عملگرهای خطی کران‌دار بررسی می‌شود.

این پایان‌نامه با تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، شروع می‌شود. فصل دوم به بررسی متمم‌ناپذیری فضای عملگرهای خطی فشرده پرداخته است. در فصل سوم به متمم‌پذیری فضاهای عملگرهای فشرده ضعیف و عملگرهای همگرای نامشروط توجه شده است و در آخرین فصل برخی از نتایج به دست آمده در فصل‌های قبل را به ایده‌الهای عملگری توسیع می‌دهیم.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای پایه ای مورد استفاده در فصل های بعد را بیان خواهیم کرد. البته فرض می کنیم که خواننده با مفاهیم مقدماتی آنالیز تابعی مانند فضاهای نرم‌دار و باناخ، عملگرهای خطی، دوگان فضای باناخ و ... آشنا است. این فصل مشتمل بر چهار بخش می‌باشد. در بخش اول، به معرفی دنباله های همگرای ضعیف، سریهای همگرای مطلق، همگرای نامشروط و سریهای کوشی نامشروط ضعیف در فضاهای باناخ می‌پردازیم. همچنین برخی از قضایای مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش دوم به معرفی عملگرهای فشرده و فشرده ضعیف پرداخته شده است. بخش سوم به تعاریف و خواص مقدماتی فضاهای متمم‌پذیر اختصاص داده شده است. در بخش آخر، ایده‌ال‌های عملگری را معرفی می‌کنیم.
در طول این پایان نامه X، Y و ... نشان دهنده‌ی فضاهای باناخ، X^* نمایش‌گر فضای دوگان X و B_X نماد گوی یکه بسته‌ی فضای باناخ X است. اگر $A \subseteq X$ باشد، آنگاه $[A]$ نشان دهنده‌ی فضای خطی بسته‌ی تولید شده توسط A است. پایه‌ی برداری واحد c_0 و ℓ^1 به ترتیب با (e_n) و (e_n^*) نمایش داده می‌شوند. تابع مختص n - ام $\xi \longrightarrow \xi_n$ در ℓ^∞ را با $\pi_n(\xi) \longrightarrow \xi$ نمایش می‌دهیم. برای هر $M \subseteq \mathbb{N}$، $\ell^\infty(M)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی همه‌ی $(\xi_k) \in \ell^\infty$ است که به ازای $k \notin M$، $\xi_k = 0$. اگر T نمایش یک عملگر باشد، الحاقی آن را با نماد T^* و دوگانگی بین $x \in X$ و $x^* \in X^*$ را با $\langle x^*, x\rangle$ و یا $\langle x, x^*\rangle$ نشان می‌دهیم.

۱.۱ دنباله‌ها و سری‌ها در فضاهای باناخ

۱.۱.۱ تعریف

فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع $f : X \longrightarrow Y_f$ باشد که در آن هر (Y_f, τ_f) یک فضای توپولوژیک است. گردایه‌ی تمام مجموعه‌های به فرم $\{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{F}, U \in \tau_f\}$ تشکیل یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهد. این توپولوژی را توپولوژی ضعیف روی X تولیدشده توسط $\mathcal{F}$ می‌نامیم. به سادگی دیده می‌شود که این توپولوژی کوچکترین توپولوژی روی X است به طوری که هر $f \in \mathcal{F}$ نسبت به آن پیوسته است.

اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، توپولوژی ضعیف روی X تولید شده توسط مجموعه‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته‌ی $x^* \in X^*$ را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و معمولاً با نماد w و یا $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

به همین ترتیب اگر Q نگاشت طبیعی از X به X^{**} باشد، توپولوژی ضعیف روی X^* تولیدشده توسط خانواده‌ی تابعک‌های $\{Q(x) : x \in X\}$ را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌نامیم و معمولأ با نماد w^* و یا $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

به عبارت دیگر، توپولوژی ضعیف ستاره ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* است که برای هر $x \in X$ تابعک خطی $x^* \longmapsto \langle x^*, x\rangle$ تحت آن پیوسته است.

یک ویژگی مهم از توپولوژی ضعیف ستاره در قضیه‌ی زیر بیان می‌شود.

۲.۱.۱ قضیه باناخ-آلاقلو

اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه B_{X^*}، w^* - فشرده است.

اثبات: برای اثبات به بخش II از مرجع [۶] مراجعه شود. □

۳.۱.۱ قضیه

دنباله‌ی (x_n) در فضای نرم‌دار X به x همگرای ضعیف است، و می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{w} x$، اگر و فقط اگر برای هر $x^* \in X^*$ داشته باشیم $\langle x^*, x_n\rangle \longrightarrow \langle x^*, x\rangle$. همچنین، دنباله‌ی (x_n^*) در X^* به x^* همگرای ضعیف ستاره است، و می‌نویسیم $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$، اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\langle x_n^*, x\rangle \longrightarrow \langle x^*, x\rangle$.

اثبات: برای اثبات به قضیه‌ی V.۱.۱، از مرجع [۴] مراجعه شود. □

۴.۱.۱ تعریف

۱) فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و (x_n) دنباله ای در X باشد به‌طوری‌که $x_n \xrightarrow{w} 0$ ، آنگاه (x_n) را دنباله‌ی پوچ ضعیف می‌نامیم. همچنین دنباله‌ی (x_n^*) در X^* را پوچ ضعیف ستاره می‌نامیم هرگاه $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.

۲) دنباله‌ی (x_n) در فضای باناخ X کوشی ضعیف نامیده می‌شود، هر گاه برای هر $x^* \in X^*$ دنباله ی $x^*(x_n)$ کوشی باشد.

با توجه به قضیه ۳.۱.۱، به آسانی دیده می‌شود که هر دنباله‌ی همگرای ضعیف، کوشی ضعیف نیز می‌باشد. همچنین به سادگی می‌توان دید که هر دنباله‌ی همگرای نرمی، همگرای ضعیف است. اما عکس این مطلب همیشه برقرار نیست.

۵.۱.۱ تعریف

فضای باناخ X را دارای خاصیت شور گوییم، هرگاه هر دنباله‌ی همگرای ضعیف در آن همگرای نرمی باشد.

۶.۱.۱ مثال

۱) فضای ℓ_1 متشکل از همه دنباله‌های مطلقاً همگرا از اسکالرها، دارای خاصیت شور است.

۲) فضای c_0 متشکل از همه دنباله‌های همگرا به صفر از اسکالرها، دارای خاصیت شور نیست.

اثبات: برای اثبات به بخش ۵.۲ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

قضیه زیر که رابطه‌ی بین فضاهای با خاصیت شور و مجموعه‌های فشرده نسبی را بیان می‌کند، در فصل دوم مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۷.۱.۱ قضیه

فضای باناخ X دارای خاصیت شور است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعه‌ی فشرده ضعیف نسبی X، فشرده نسبی نیز باشد.

اثبات: فرض کنیم X فضای باناخ با خاصیت شور و A یک مجموعه‌ی فشرده ضعیف نسبی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم A فشرده نسبی است. برای این منظور فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای در A باشد. از این‌که A فشرده ضعیف است، (x_n) زیردنباله‌ی همگرای ضعیف دارد که به عنصر $x \in A$ همگرا است. با توجه به این‌که X دارای خاصیت شور است، این زیردنباله همگرای نرمی نیز هست. بنابراین دنباله‌ی دلخواه (x_n) در A دارای زیردنباله‌ای است که به عنصری از X همگرای نرمی است و این معادل با فشرده نسبی بودن مجموعه‌ی A است.

برعکس، فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای همگرای ضعیف به $x \in X$ باشد. آنگاه مجموعه $A = \{x, x_1 x_2, ...\}$ فشرده ضعیف نسبی و با توجه به فرض فشرده‌ی نسبی نیز است. بنابراین هر زیردنباله از (x_n) حاوی زیردنباله‌ای است که همگرا به x می‌باشد و لذا $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. در نتیجه هر دنباله‌ی همگرای ضعیف در X، همگرای نرمی نیز است و این یعنی فضای باناخ X خاصیت شور دارد. □

۸.۱.۱ تعریف

دنباله‌ی (x_n) در فضای باناخ X پایه‌ی شودر (یا پایه) برای X نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، دنباله ی یکتای (α_n) از اسکالرها موجود باشد به طوری که $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.

همچنین دنباله‌ی (x_n) یک دنباله‌ی پایه‌ای در فضای باناخ X است، هرگاه (x_n) یک پایه

شودر برای $[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]$ باشد.

۹.۱.۱ مثال

۱) دنباله بردارهای یکه متعارف (e_n) در فضای $c_\circ$، متشکل از همه‌ی دنباله‌های همگرا به صفر از اسکالرها، یک پایه‌ی شودر برای این فضا است. همین دنباله، پایه‌ای برای فضاهای ℓ^p با $1 \leqslant p < \infty$ است.

۲) فضای ℓ^∞ پایه‌ی شودر ندارد. چون جدائی‌پذیر نیست، در حالی‌که هر فضای باناخ با پایه‌ی شودر باید جدائی‌پذیر باشد.

اثبات: برا ی اثبات به بخش ۱.۴ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

در ادامه به‌ترتیب به معرفی سریهای همگرای نامشروط، کوشی نامشروط ضعیف و زیرسری همگرای ضعیف و بیان برخی از خواص مربوط به هر کدام می‌پردازیم.

۱۰.۱.۱ تعریف

سری $\sum_n x_n$ در فضای باناخ X همگرای مطلق نامیده می‌شود، هرگاه $\sum_n \| x_n \|$ همگرا باشد و سری $\sum_n x_n$ همگرای نامشروط نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر جایگشت π از اعداد طبیعی، $\sum_n x_{\pi(n)}$ همگرا باشد.

۱۱.۱.۱ قضیه

هر سری همگرای مطلق در فضای باناخ X همگرای نامشروط نیز می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم سری $\sum_n x_n$ همگرای مطلق و π جایگشتی دلخواه از اعداد طبیعی باشد. در این صورت $\sum_k \| x_{\pi(k)} \|$ همگرا است و داریم:

$$\| \sum_{k=n}^{m} x_{\pi(k)} \| \leq \sum_{k=n}^{m} \| x_{\pi(k)} \| \longrightarrow \circ \ \ , \ n,m \longrightarrow \infty$$

لذا دنباله‌ی مجموع جزئی سری $\sum_k x_{\pi(k)}$ کوشی و از این‌که X فضای باناخ است همگرا می‌باشد. □

قضیه ۱۲.۱.۱

سری $\sum_n x_n$ در فضای باناخ X همگرای نامشروط است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله کران‌دار از اسکالرهای $(t_n) \in \ell^\infty$ سری $\sum_n t_n x_n$ همگرا باشد.

اثبات: برای اثبات به قضیه‌ی ۸.۲.۴ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

۱۳.۱.۱ تعریف

۱) سری $\sum_n x_n$ در فضای باناخ X کوشی نامشروط ضعیف (به اختصار $w.u.C$) نامیده

می‌شود هرگاه برای هر جایگشت π از اعداد طبیعی، $(\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)})$ یک دنباله‌ی کوشی ضعیف باشد. به طور معادل $\sum_n x_n$ کوشی نامشروط ضعیف است اگر و تنها اگر به ازای هر $x^* \in X^*$ سری $\sum_n \mid x^*(x_n) \mid$ همگرا باشد.

۲) سری $\sum_n x_n^*$ در فضای باناخ X^* کوشی نامشروط ضعیف ستاره (به اختصار $w^*.u.C$) نامیده می‌شود هرگاه برای هر جایگشت π از اعداد طبیعی، $(\sum_{k=1}^{n} x_{\pi(k)})$ یک دنباله‌ی کوشی ضعیف ستاره باشد. به طور معادل $\sum_n x_n$ کوشی نامشروط ضعیف است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ سری $\sum_n \mid x_n^*(x) \mid$ همگرا باشد.

دو قضیه زیر برای اثبات برخی قضایا در فصل‌های بعد مفید خواهند بود.

۱۴.۱.۱ قضیه

فرض کنیم (x_n) یک دنباله‌ی پایه‌ای در فضای باناخ X باشد. آنگاه (x_n) با پایه بردارهای یکه(e_n) از c_0 معادل است اگر و تنها اگر $\inf_n \parallel x_n \parallel > 0$ و سری $\sum_n x_n$ کوشی نامشروط ضعیف باشد.

اثبات: برا ی اثبات به بخش V از مرجع [۶] مراجعه شود. $\square$

۱۵.۱.۱ قضیه

فرض کنیم (T_n) دنباله‌ای از عملگرها متعلق به $K(X,Y)$ باشد. اگر $\sum T_n$ در $K(X,Y)$، $(w.u.C)$ باشد آنگاه برای هر $x \in X$ سری $\sum_n T_n(x)$ در Y، $(w.u.C)$ است.

اثبات: از این‌که $\sum_n T_n$ در $K(X,Y)$، $(w.u.C)$ است به ازای هر $\varphi \in K(X,Y)^*$، $\sum_n \mid \varphi(T_n) \mid$ همگرا می‌باشد. به سادگی دیده می‌شود که عملگرهای به‌فرم $\varphi_0 = x \otimes y^*$ متعلق به $K(X,Y)^*$ است که به ازای هر $T \in K(X,Y)$، $(x \otimes y^*)(T) = y^*(Tx)$. در نتیجه به ازای هر $y^* \in Y^*$ و هر $x \in X$،

$$\sum_n \mid (x \otimes y^*)(T_n) \mid = \sum_n \mid y^*(T_n x) \mid < \infty$$

و این یعنی $\sum_n T_n(x)$ در Y، $(w.u.C)$ است. $\square$

۱۶.۱.۱ تعریف

سری $\sum_n x_n$ در فضای باناخ X زیرسری همگرای ضعیف است، هرگاه هر زیرسری آن همگرای ضعیف باشد.

قضایای زیر در فصل دوم برای اثبات برخی قضایا مورد نیاز خواهند بود.

۱۷.۱.۱ قضیه

یک سری در فضای باناخ X زیرسری همگرای ضعیف است اگر و تنها اگر همگرای نامشروط باشد.

اثبات: برای اثبات به قضیه ۱۴.۳.۴ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

۱۸.۱.۱ قضیه (اورلیسز - پتیس[۱])

فرض کنیم $\sum_n x_n$ یک زیرسری همگرای ضعیف در فضای باناخ X باشد. آنگاه $\sum_n x_n$ زیرسری همگرای نرمی است. یعنی به ازای هر دنباله (k_n) از اعداد طبیعی، $\sum_j x_{k_j}$ همگرای نرمی باشد.

اثبات: برای اثبات به بخش IV از مرجع [۶] مراجعه شود. □

۲.۱ عملگرهای فشرده و فشرده‌ی ضعیف

در این بخش مروری بر تعاریف و قضایای مربوط به عملگرهای فشرده و فشرده‌ی ضعیف که در فصل‌های بعد به کار می‌روند، خواهیم داشت.

۱.۲.۱ تعریف

فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. به نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر کران‌دار گوییم، هرگاه T یک تبدیل خطی پیوسته باشد. گردایه‌ی تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم که خود نیز با نرم زیر تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد:

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leqslant ۱\}.$$

می‌دانیم متناظر به هر عملگر $T \in L(X,Y)$ یک عملگر کران‌دار یکتای $T^* \in L(Y^*,X^*)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$،

$$\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle.$$

[۱] orlicz - pettis

به عملگر T^* الحاقی عملگر T گوییم و ثابت می‌شود که $\|T\| = \|T^*\|$. (برای اثبات به قضیه ۲.۱.۳ از مرجع [۲۴] مراجعه شود.)

در طول این پایان‌نامه دو توپولوژی روی $L(X,Y)$ در نظر خواهیم گرفت. توپولوژی عملگری ضعیف (به اختصار (WOT)) که برای هر $x \in X$ و $y^* \in Y^*$، به وسیله تابعک‌های خطی $T \longrightarrow \langle y^*, Tx\rangle$ تعریف می‌شود، در حالیکه دوگان آن (به اختصار $(WOT)^*$) به وسیله تابعک‌های خطی $T \longrightarrow \langle x^{**}, T^*y^*\rangle$ که $y^* \in Y^*$ و $x^{**} \in X^{**}$، تعریف می‌شود.

همچنین اگر به ازای هر $x \in X$، $T_\alpha(x) \longrightarrow T(x)$ آنگاه می‌گوییم که $T_\alpha \longrightarrow T$ در توپولوژی عملگری قوی، (به اختصار (SOT)).

عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را با رتبه‌ی متناهی نامیم، هرگاه برد T در Y با بعد متناهی باشد. در اینجا خاصیتی از عملگرهای با رتبه‌ی متناهی را بیان می‌کنیم که در این فصل و فصل‌های بعد به آن نیاز داریم، اما برای اثبات آن قضیه زیر لازم است.

۲.۲.۱ قضیه

فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ دلخواهی باشند. آنگاه به ازای هر $x^* \in X^*$ و هر $y \in Y$، $\| x^* \otimes y \| = \| x^* \| . \| y \|$ که در آن $x^* \otimes y$ عملگرهایی از X به Y می‌باشند که به ازای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$x^* \otimes y(x) = x^*(x)y.$$

اثبات: با توجه به تعریف $x^* \otimes y$ داریم:

$$\begin{aligned} \| x^* \otimes y \| &= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| x^*(x)y \| \\ &\leqslant \| x^* \| . \| x \| . \| y \| \\ &\leqslant \| x^* \| . \| y \| . \qquad (1) \end{aligned}$$

از طرف دیگر با توجه به این‌که به ازای هر $x^* \in X^*$،

$$\| x^* \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} | x^*(x) |$$

نتیجه می‌شود که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in B_X$ موجود است که $| x^*(x_n) | \longrightarrow \| x^* \|$ و لذا

$$\| x^* \otimes y(x_n) \| = | x^*(x_n) | \| y \| \longrightarrow \| x^* \| . \| y \| . \qquad (2)$$

حال با استفاده از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\| x^* \| . \| y \| = \| x^* \otimes y \|$.

۳.۲.۱ قضیه

اگر X و Y دو فضای باناخ باشند، آنگاه هر عملگر با رتبه‌ی متناهی $T : X \longrightarrow Y$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i \ , \quad x_i^* \in X^* \ , y_i \in Y.$$

اثبات: فرض کنیم $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ یک پایه برای $T(X)$ باشد. آنگاه به ازای هر $x \in X$، اسکالرهای یکتای $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ متعلق به میدان اسکالر $\mathbb{C}$ وجود دارند که

$$Tx = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n.$$

به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $x_i^* : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌صورت $x_i^*(x) = \alpha_i$ تعریف می‌کنیم. آنگاه $x_i^* \in X^*$ و به ازای هر $x \in X$:

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i(x).$$

در نتیجه $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i$. □

حال به معرفی عملگرهای فشرده و فشرده‌ی ضعیف می‌پردازیم.

۴.۲.۱ تعریف

عملگر $T : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای باناخ X و Y را فشرده گوییم، هرگاه تصویر گوی یکه‌ی بسته‌ی B_X از X، تحت T در Y فشرده‌ی نسبی باشد، و اگر تصویر گوی یکه‌ی بسته‌ی B_X تحت T فشرده‌ی ضعیف نسبی باشد به عملگر T فشرده‌ی ضعیف گفته می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای فشرده از X به Y را با نماد $K(X,Y)$ و مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده‌ی ضعیف از X به Y را با نماد $W(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

همچنین به سادگی می‌توان دید که هر عملگر فشرده، فشرده‌ی ضعیف نیز می‌باشد. اما عکس آن درست نیست.

۵.۲.۱ قضیه

هر عملگر با رتبه‌ی متناهی، یک عملگر فشرده است.

اثبات: برای اثبات به بخش VI مرجع [۴] مراجعه شود. □

۶.۲.۱ قضیه

فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. در این صورت عملگر کران‌دار $T : X \longrightarrow Y$ فشرده (متناظراً فشرده ضعیف) است اگر و فقط اگر $T^* \ : \ Y^* \longrightarrow X^*$ فشرده (متناظراً فشرده ضعیف) باشد.

اثبات: برای اثبات به قضیه ۱۵.۴.۳ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

دو قضیه بعد که اثبات آن‌ها در مرجع [۲۰] ارجاع می‌دهیم، برای اثبات برخی قضایا در فصل‌های بعد مفید است.

۷.۲.۱ قضیه

فرض کنیم Y یک فضای باناخ و $T : \ell^\infty \longrightarrow Y$ فشرده ضعیف باشد. آنگاه برای هر $\xi = (\xi_n) \in \ell^\infty$، سری $\sum_n \xi_n T e_n$ همگرا خواهد بود.

۸.۲.۱ قضیه

فرض کنیم (T_n) دنباله‌ای از عملگرهای فشرده باشد و $T_n \longrightarrow T$ در $(WOT)^*$، بعلاوه T فشرده می‌باشد. آنگاه $T_n \xrightarrow{w} T$.

یادآور می‌شویم که فضای باناخ X بازتابی است هرگاه نگاشت طبیعی $Q_X : X \longrightarrow X^{**}$ پوشا باشد و فضای متری X جدائی‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه دارای زیرمجموعه‌ی چگال و شمارا باشد.

۹.۲.۱ قضیه

(۱) فرض کنیم W و Z دو فضای باناخ، $T : X \longrightarrow Y$ عملگر فشرده (متناظراً فشرده‌ی ضعیف) ، $R \in L(Y,Z)$ و $S \in L(W,X)$ باشد، آنگاه $RT : X \longrightarrow Z$ و $TS : W \longrightarrow Y$ فشرده (متناظراً فشرده‌ی ضعیف) هستند.

(۲) اگر X یا Y فضای باناخ بازتابی باشد، آنگاه هر عمگر دلخواه $T : X \longrightarrow Y$ فشرده‌ی ضعیف است.

اثبات: برای اثبات به گزاره‌های ۳.۵ و ۲.۵ در فصل VI از مرجع [۴] مراجعه شود. □

۱۰.۲.۱ قضیه

فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ دلخواهی باشند. عملگر $T : X \longrightarrow Y$ فشرده (فشرده‌ی ضعیف) است اگر و تنها اگر تحدید آن به هر زیرفضای جدائی‌پذیر X فشرده (فشرده‌ی ضعیف) باشد.

اثبات: برای اثبات به مرجع [۶] مراجعه شود. □

۱۱.۲.۱ قضیه

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد.

الف) اگر X شامل هیچ نسخه‌ای از ℓ^∞ نباشد، آنگاه هر عملگر خطی و کران‌دار $T : \ell^\infty \longrightarrow X$ فشرده ضعیف است.

ب) اگر عملگر $T : \ell^\infty \longrightarrow X$ فشرده‌ی ضعیف باشد، آنگاه T دنباله‌های همگرای ضعیف را به توی دنباله‌های نرم همگرا تصویر می‌کند.

اثبات: برای اثبات به فصل ۶ از مرجع [۷] مراجعه شود. □

حال مفهوم فضای گروتندیک را معرفی کرده و ارتباط آن‌را با عملگرهای فشرده‌ی ضعیف روی اینچنین فضاهای باناخ مورد بررسی قرار می‌دهیم. از این نتایج در فصل‌های بعد استفاده خواهیم کرد.

۱۲.۲.۱ تعریف

فضای باناخ X یک فضای گروتندیک است هرگاه هر دنباله‌ی همگرای ضعیف ستاره در X^*، همگرای ضعیف باشد.

۱۳.۲.۱ مثال

ℓ^∞ فضای گروتندیک است، اما c_0 و ℓ^1 فضاهای گروتندیک نیستند. همچنین همه‌ی فضاهای باناخ انعکاسی، گروتندیک هستند. اما عکس آن همیشه برقرار نیست، ولی اگر شرط جدائی‌پذیری را نیز اضافه کنیم عکس آن درست است.

۱۴.۲.۱ قضیه

فضای باناخ جدائی‌پذیر X، گروتندیک است اگر و فقط اگر انعکاسی باشد.

اثبات: برای اثبات به مرجع [۷] مراجعه شود. □

۱۵.۲.۱ قضیه

فضای باناخ X گروتندیک است اگر وتنها اگر هر عملگر از X به یک فضای باناخ جدائی پذیر فشرده‌ی ضعیف باشد.

اثبات: برای اثبات به صفحه‌ی ۱۷۹ از مرجع [۷] مراجعه شود. □

۳.۱ زیر فضاهای متمم‌پذیر

در این بخش ابتدا فضای باناخی که شامل نسخه‌ای از فضای باناخ دیگر است را معرفی کرده و بعضی از قضایا و خواص مربوط به آن‌را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم، بعد از آن به معرفی زیرفضاهای متمم‌پذیر از فضاهای باناخ، که نقشی اساسی را در این متن ایفا می‌کند و نیز فضاهای باناخ شامل یک نسخه متمم‌پذیر از فضای باناخ دیگر پرداخته و بعضی از خواص آن‌ها را مطرح می‌کنیم.

۱.۳.۱ تعریف

فضای باناخ X را شامل نسخه‌ای از فضای باناخ Y گوییم هرگاه X شامل زیرفضایی یکریخت با فضای باناخ Y باشد .

به‌عنوان مثال این‌که فضای باناخ X شامل نسخه‌ای از $c_\circ$ باشد، به‌این معنی است که X شامل زیرفضایی یکریخت با $c_\circ$ باشد. قضیه‌ی زیر که در فصل‌های بعد نیز استفاده می‌شود، برای اثبات وجود یک شرط لازم و کافی مفید در این زمینه لازم است.

۲.۳.۱ قضیه

فرض کنیم T یک عملگر خطی از فضای نرم‌دار X به توی فضای نرم‌دار Y باشد. آنگاه T یک یکریختی است اگر و تنها اگر ثابتهای مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم

$$A \ \| x \| \leqslant \| Tx \| \leqslant B \ \| x \| .$$

اثبات: برای اثبات به حکم ۱۴.۴.۱ از مرجع [۲۴] مراجعه شود. □

۳.۳.۱ قضیه

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این‌صورت X شامل نسخه‌ای از $c_\circ$ است اگر و تنها اگر ثابتهای مثبت A و B و دنباله‌ی (x_n) در X چنان وجود داشته باشد که برای هر دنباله‌ی (a_n) در $c_\circ$ رابطه‌ی

$$A \sup_n \mid a_n \mid \leqslant \| \sum_{n=۱}^{\infty} a_n x_n \| \leqslant B \sup_n \mid a_n \mid$$

برقرار باشد.

اثبات: با توجه به قضیه قبلی و تعریف ۱.۳.۱ بدیهی است. □

۴.۳.۱ قضیه

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. آنگاه

۱) X شامل هیچ نسخه‌ای از $c_\circ$ نیست اگر و تنها اگر هر سری $(w.u.C)$ در X همگرای نامشروط باشد.

۲) فضای باناخ X^* شامل هیچ نسخه‌ای از ℓ^∞ نیست اگر و تنها اگر هر سری $(w^*.u.C)$ در X^* همگرای نامشروط باشد.

اثبات: برای اثبات به قضیه ۸ و نتیجه ۱۱ از بخش V مرجع [۶] مراجعه شود. $\square$

۵.۳.۱ تعریف

فرض کنیم M و N زیرفضاهای بسته از فضای نرم‌دار X باشند به‌طوری‌که $M+N=X$ و $M\cap N=\{\circ\}$ باشد. آنگاه فضای نرم‌دار X جمع مستقیم M و N نامیده می‌شود.

حال مفهوم متمم‌پذیری را معرفی می‌کنیم.

۶.۳.۱ تعریف

زیرفضای بسته‌ی M از فضای نرم‌دار X در X متمم‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه زیرفضای بسته‌ی N از X موجود باشد به‌طوری‌که X را بتوان به‌صورت جمع مستقیم M و N نوشت.

واضح است که در تعریف بالا N نیز متمم‌پذیر خواهد بود و M و N را نسبت به هم متمم‌پذیر گوییم.

۷.۳.۱ تعریف

فضای باناخ X را شامل یک نسخه متمم‌پذیر از فضای باناخ Y گوییم هرگاه X شامل زیرفضایی متمم‌پذیر و یکریخت با Y باشد.

۸.۳.۱ قضیه

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. آنگاه X^* شامل نسخه‌ی $c_\circ$ است اگر و فقط اگر X شامل یک نسخه‌ی متمم‌پذیر ℓ^1 باشد، اگر و فقط اگر X^* شامل ℓ^∞ باشد.

اثبات: برای اثبات به فصل V از مرجع [۶] مراجعه شود. $\square$

۹.۳.۱ تعریف

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. به عملگر خطی $P: X \longrightarrow X$ یک عملگر تصویری گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $P\left(P(x)\right)=P(x)$.