دانشکده علوم ریاضی
ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض

عنوان

مروری بر تبدیل موجک پیوسته دو بعدی و کاربرد آن در پردازش تصاویر ماموگرافی

استاد راهنما
دکتر ریحانه رئیسی طوسی
استاد مشاور
دکتر قوشه عابد هدتنی
نگارنده
فاطمه گلی

اسفند ۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

فردوسی مشهد

عنوان: مروری بر تبدیل موجک پیوسته دو بعدی و کاربرد آن در پردازش تصاویر ماموگرافی

نام نویسنده: فاطمه گلی

استاد راهنما: دکتر ریحانه رئیسی طوسی

استاد مشاور: دکتر قوشه عابد هدتنی

دانشکده: دانشکده علوم ریاضی گروه: ریاضی محض رشته تحصیلی: ریاضی محض

تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۲/۳۱ تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۱۲/۲۳

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۱۱۶

چکیده پایان‌نامه : در این پایان نامه به معرفی یکی از زمینه های کاربردی موجک در پردازش تصاویر پزشکی می پردازیم. هدف اصلی در این پایان نامه افزایش وضوح تصاویر ماموگرافی برای تشخیص بهتر توده ها در این تصاویر به وسیله موجک ها می باشد. برای این منظور ابتدا مفاهیم موجک های دو بعدی و تبدیل پیوسته آن ها را بیان می کنیم و سپس به معرفی انواع موجک های دو بعدی و ارزیابی عملکرد تبدیل موجک پیوسته آن ها می پردازیم. در ادامه الگوریتمی را بیان می کنیم که در آن با استفاده از موجک ها به تشخیص بهتر توده ها در این تصاویر می پردازیم.

واژگان کلیدی: موجک های جهت دار، موجک های ایزوتروپیک، تبدیل موجک های دو بعدی، پردازش تصاویر ماموگرافی

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : مروری بر تبدیل موجک پیوسته دو بعدی و کاربرد آن در پردازش تصاویر ماموگرافی

اینجانب فاطمه گلی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده دانشکده علوم ریاضی فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر ریحانه رئیسی طوسیمتعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه فردوسی مشهد'' و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. درکلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دستریسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

تقدیم به

آن‌ها که بی دریغ کوشیدند

تا امروز سر بر اوج سایبدن را تجربه کنم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها ۳

پیش‌گفتار ۴

۱ مفاهیم و پیش نیازها ۱۲
۱.۱ پیش نیازهای آنالیز هارمونیک ۱۲
۱.۱.۱ اصل عدم قطعیت ۱۵
۲.۱ پیش نیاز های پردازش تصویر ۱۶
۱.۲.۱ فیلترهای شکل شناسی ۱۸
۳.۱ آنالیز چندریزگی و موجک های یک بعدی ۲۱
۱.۳.۱ موجک هار ۲۶
۲.۳.۱ موجک شانون ۲۷
۳.۳.۱ موجک های دوبشی ۲۸
۴.۱ تبدیل موجک گسسته ۳۲

۲ تبدیل موجک پیوسته دو بعدی ۳۷
۱.۲ تصاویر و اعمال مقدماتی برروی آن ها ۳۷
۲.۲ موجک و تبدیل موجک پیوسته ۳۹
۱.۲.۲ گروه تشابهی ۴۱
۲.۲.۲ تبدیل موجک پیوسته دو بعدی و ویژگی های آن ۴۶
۳.۲ تفسیر و اجرای تبدیل موجک پیوسته دو بعدی ۵۰
۱.۳.۲ تفسیر تبدیل موجک پیوسته ۵۰

۲.۳.۲ اجرای تبدیل موجک پیوسته دو بعدی: دو شیوه ی اساسی نمایش . . ۵۳

۳ موجک های دو بعدی و ارزیابی آن ها ۵۶

۱.۳ انواع موجک های دو بعدی ۵۶

۱.۱.۳ موجک های ایزوتروپیک ۵۸

۲.۱.۳ موجک های جهت دار ۶۲

۲.۳ ارزیابی موجک های دو بعدی ۷۰

۱.۲.۳ توان تشخیص زاویه و مقیاس ۷۲

۲.۲.۳ هسته بازیابی و توان تشخیص موجک ها ۷۴

۳.۲.۳ درجه بندی موجک ها به وسیله سیگنال های شاخص ۷۶

۴ پردازش تصاویر ماموگرافی با استفاده از موجک ها ۸۰

۱.۴ تشخیص ضایعات مشکوک در تصاویر ماموگرافی ۸۱

۱.۱.۴ روش آستانه گذاری سازگار برمبنای هیستوگرام ۸۱

۲.۱.۴ روش آستانه گذاری سازگاربر مبنای پنجره ۸۴

۳.۱.۴ الگوریتم تشخیص ضایعات مشکوک در ماموگرام ها به وسیله آستانه گذاری سازگار براساس آنالیز چند ریزگی ۸۶

۴.۱.۴ افزایش وضوح تصاویر و تشخیص ضایعات مشکوک در تصاویر ماموگرافی با استفاده از موجک های دو بعدی ۸۹

آ گروه و مفاهیم مربوط به آن ۹۰

ب اندازه و مفاهیم مربوط به آن ۹۴

پ برخی مفاهیم پر کاربرد ۹۸

مراجع ۱۰۰

نمایه ۱۰۴

فهرست شکل‌ها

۱.۲ ویژگی های تکیه گاه تحت اعمال مقدماتی صفحه در دامنه زمان: (a) سیگنال اولیه $\psi(\vec{x})$، (b) سیگنال تبدیل شده $\psi_{\vec{b},a,\theta}(\vec{x})$ با $\vec{b} = (۲/۴, ۱/۲)$، $\theta = ۴۵^\circ$ ، $a = ۱/۵$ و در دامنه فرکانس: (c) سیگنال اولیه $\widehat{\psi}(\vec{k})$ ، (d) سیگنال تبدیل شده $\widehat{\psi}_{\vec{b},a,\theta}(\vec{k})$. ۵۲

۱.۳ موجک کلاه مکزیکی دو بعدی در دامنه زمان: (a) موجک ایزوتروپیک، (b) موجک غیر ایزوتروپیک. ۶۰

۲.۳ موجک کلاه مکزیکی دو بعدی در فضای فرکانسی: (a) موجک ایزوتروپیک، (b) موجک غیر ایزوتروپیک. ۶۱

۳.۳ موجک مورلت دو بعدی در دامنه زمان با $\epsilon = ۱$ و $\vec{k_\circ} = (۰, ۶)$، (a) قسمت حقیقی؛(b) قسمت موهومی. ۶۵

۴.۳ موجک کوشی $\psi_۴^{(۱۰)}$ در فضای مکانی، (a) قسمت حقیقی (b) قسمت موهومی. . . ۶۸

۵.۳ موجک مخروطی گوسی در فضای فرکانسی ۷۰

۶.۳ ارزیابی توان تشخیص زاویه ای از موجک ψ با $APR = ۲\gamma$. ۷۳

۷.۳ محمل موثر موجک ψ در فضای فرکانسی ۷۴

۸.۳ توان تشخیص زاویه ای موجک مورلت برای مقادیر مختلف زاویه جهت ۷۷

۹.۳ توان تشخیص زاویه ای موجک کوشی برای مقادیر مختلف زاویه جهت ۷۸

۱۰.۳ توان تشخیص زاویه ای موجک کلاه مکزیکی غیر ایزوتروپیک با: (a) فاکتور غیرایزوتروپیک $\epsilon = ۵$ و برای مقادیر مختلف زاویه جهت؛(b) برای یک جهت ثابت در نظر گرفته شده $(\theta = ۰)$ اما فاکتورهای غیر ایزوتروپیک مختلف $\epsilon = ۱, ۲/۵, ۵$. ۷۹

۱.۴ رابطه میان $p_I(x)$، $p_b(x)$ و $p_t(x)$. ۸۲
۲.۴ آستانه بیز λ_1 و آستانه پیشنهاد شدهλ_3. . . . . ۸۳
۳.۴ .بخش بندی تصاویر ماموگرافی به وسیله روش آستانه گذاری سازگار مبتنی بر هیستوگرام ۸۴
۴.۴ پنجره ها برای آستانه گذاری سازگار ۸۵
۵.۴ بخش بندی تصاویر ماموگرافی به وسیله روش آستانه گذاری سازگار مبتنی بر پنجره ۸۶

پیشگفتار

به طور کلی سیگنال های موجود در محیط پیرامون ما، دارای ویژگی های متفاوتی در دامنه های زمان و فرکانس می باشند. سیگنال متغیری مانند x را عضوی از فضای هیلبرت $L^{۲}(\mathbb{R})$ یا دارای انرژی متناهی می نامند هرگاه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^{۲} dt < \infty.$$

با استفاده از تبدیل فوریه می توان در بازه زمانی که x بر روی آن تعریف شده است، نمایشی از محتویات فرکانسی این سیگنال را به دست آورد. تبدیل فوریه بر روی فضای $L^{۲}(\mathbb{R})$ نگاشتی از $L^{۲}(\mathbb{R})$ بروی $L^{۲}(\mathbb{R})$ می باشد که برای هر عضو x در فضای $L^{۱}(\mathbb{R}) \cap L^{۲}(\mathbb{R})$ دارای ضابطه ای به صورت $\hat{x}(w) \equiv \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} x(t) dt$ می باشد [۱۶]. گاهی اوقات در پردازش سیگنال ها به نمایش همزمان محتویات آن ها در دامنه های زمان و فرکانس نیازمند هستیم. از آن جایی که تبدیل فوریه تنها نمایشی از سیگنال را در حوزه فرکانس ارائه می دهد، در این موارد به صورت یک ابزار کارآمد عمل نکرده و برای پردازش سیگنال ها به اندازه کافی مناسب نمی باشد. برای به دست آوردن نمایش همزمان محتویات سیگنال در دامنه های زمان و فرکانس، سیگنال ها را به وسیله تبدیلات زمان فرکانس مانند تبدیل فوریه پنجره دار شده و تبدیل موجک، از دامنه زمان به دامنه زمان-فرکانس منتقل می کنند. در میان تبدیلات زمان-فرکانس تبدیل موجک به دلیل داشتن خاصیت مقیاس[۱] در مقایسه با دیگر تبدیلات ابزار مفیدتری در پردازش سیگنال ها محسوب می شود [۱۶]. نظریه موجک ها برای اولین بار در دهه ۸۰ میلادی مطرح شد و به دلیل کاربرد فراوان در زمینه های مختلف علمی مانند پزشکی،زمین شناسی, زیست شناسی، فیزیک و شیمی به سرعت گسترش پیدا کرد. موجک ها در واقع نوعی از سیگنال ها با انرژی متناهی هستند. یک سیگنال غیر صفر ψ عضوی از فضای هیلبرت $L^{۲}(\mathbb{R})$ را

[1] Scaling property

یک تابع پذیرفتنی[1] یا یک موجک مادر یک بعدی می نامیم هرگاه $c_\psi = ۲\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(w)|^۲}{|w|} dw < \infty$. برای سیگنال ψ عضوی از $L^۱(\mathbb{R}) \cap L^۲(\mathbb{R})$ شرط پذیرفتنی بودن ψ معادل با این است که ψ دارای میانگین صفر باشد. به عبارت دیگر $\hat{\psi}(۰) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = ۰$ [۴]. از جمله موجک های مادر می توان به موجک های هار، کلاه مکزیکی، شانون و مورلت اشاره کرد. تبدیل موجک دارای دو شکل متمایز و گسسته و پیوسته می باشد. تبدیل موجک پیوسته مشابه تبدیل فوریه پیوسته عمل می کند و بیشتر برای آنالیز کردن و تشخیص ویژگی های سیگنال ها مورد استفاده قرار می گیرد در حالی که تبدیل موجک گسسته مشابه تبدیل فوریه گسسته عمل کرده و به طور کلی برای بازسازی و فشرده سازی سیگنال ها مورد استفاده قرار می گیرد [۴]. تبدیل موجک پیوسته $W_\psi(s)$ از یک سیگنال $s \in L^۲(\mathbb{R})$ نسبت به موجک ψ نگاشتی از فضای هیلبرت $L^۲(\mathbb{R})$ به فضای هیلبرت $L^۲(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$ و دارای ضابطه به صورت $W_\psi s(b,a) = \langle s, T_b D_a \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) \frac{۱}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi(\frac{t-b}{a})} dt$ می باشد. این نگاشت، خطی و طولپا است. بنابراین بر روی برد خود معکوس پذیر می باشد. به عبارت دیگر با داشتن تبدیل موجک پیوسته یک سیگنال، می توان آن سیگنال را به طور کامل بازسازی کرد. فرمول بازسازی سیگنال $s \in L^۲(\mathbb{R})$ با داشتن تبدیل موجک پیوسته آن به صورت زیر می باشد [۲]

$$s(t) = \frac{۱}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} W_\psi s(b,a)(T_b D_a \psi) \frac{dadb}{a^۲}.$$

از آن جایی که ضابطه تبدیل موجک پیوسته W_ψ از سیگنال $s \in L^۲(\mathbb{R})$ به صورت پیچشی از سیگنال s و موجک بیان می شود، تبدیل موجک پیوسته یک سیگنال به عنوان یک فیلتر با یک تابع از میانگین صفر عمل می کند. بنابراین با انتخاب موجکی که دارای بیشترین مطابقت با ویژگی های سیگنال مورد نظر باشد، می توان یک آنالیز مناسب از سیگنال به دست آورد [۴]. موجک های مختلف به دلیل داشتن خصوصیات متفاوت، دارای توانایی هایی متفاوتی در تشخیص ویژگی های خاص از یک سیگنال می باشند. برای نمونه انواع موجک ها به دلیل داشتن گشتاورهای میرای غیر یکسان دارای توانایی های متفاوتی در آشکارسازی نقاط تکین[2] می باشند [۲]. موجک ψ دارای گشتاورهای میرا از مرتبه N می باشد اگر $\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t)dt = ۰ \ , \quad n = ۰, ۱, ..., N$. تبدیل موجک پیوسته به وسیله اعمال انتقال و اتساع روی محور اعداد حقیقی تعیین می گردد. به عبارت دیگر ضابطه تبدیل موجک پیوسته به وسیله اعضای گروه آفین از $\mathbb{R}$ مشخص می شود. عمل انتقال به وسیله پارامترهای $b \in \mathbb{R}$ و اتساع به وسیله پارامترهای مخالف صفر $a \in \mathbb{R}$ گروه آفین را مشخص می کند. اعضای این گروه مجموعه تمامی

[1] Admissible function

[2] Singularities

$(b,a) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{0\})$ می باشند و عمل این گروه روی عناصر $\mathbb{R}$ به صورت $x=(b,a)y=ay+b$ و یا در حالت معکوس به صورت $y=(b,a)^{-1}x=\dfrac{x-b}{a}$ می باشد. به وسیله ترکیب متوالی تبدیلات یک بعدی به دست آمده از اعمال انتقال و اتساع روی خط حقیقی، می توان ترکیب بین عناصر دلخواه (b,a) و (b',a') از گروه آفین را به صورت زیر محاسبه کرد. ابتدا فرض می کنیم

$$\psi(x)\mapsto\psi_{b,a}(x)=|a|^{-1/2}\psi(\frac{x-b}{a})=|a|^{-1/2}\psi((b,a)^{-1}x)\ ,\ b\in\mathbb{R},a\neq 0.$$

حال اگر قرار دهیم $\varphi=\psi_{b,a}$ و اثر تبدیل یک بعدی بالا را برای انتقالات به اندازه b' و اتساعات به اندازه a' روی φ به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\varphi(x)\mapsto\varphi_{b',a'}(x)&=|a'|^{-1/2}\varphi((b',a')^{-1}x)\\&=|aa'|^{-1/2}\psi((b',a')^{-1}(b,a)^{-1}x)\\&=|aa'|^{-1/2}\psi(\frac{x-(b+ab')}{aa'}).\end{aligned}$$

بنابراین از ترکیب به دست آمده برای تبدیلات ψ,φ به وسیله زوج های (b',a') و (b,a) که همان عضوهای گروه آفین می باشند، می توان ترکیب بین عناصر و در واقع عمل گروه آفین از خط را به صورت زیر به دست آورد.

$$(b,a)(b',a')=(b+ab',aa')$$

با توجه به عمل به دست آمده برای گروه آفین، این گروه دارای عضو همانی $(0,1)$ و برای هر عضو دلخواه (b,a) دارای معکوس $(-a^{-1}b,a^{-1})$ می باشد. هم چنین این گروه دارای نمایش یکانی تحویل ناپذیر $U(b,a)=T_bD_a$ است که روی عضوهای ψ از فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ به صورت زیر عمل می کند.

$$(U(b,a)\psi)(x)=|a|^{-1/2}\psi(\frac{x-b}{a}).$$

این نمایش مربع انتگرال پذیر است و مربع انتگرال پذیری آن معادل با شرط پذیرفتنی بودن تابع ψ می باشد [۴]. می توان بین اعضای گروه آفین و ماتریس های 2×2 به شکل زیر یک تناظر یک به یک برقرار کرد و هم چنین با استفاده از این تناظر، عمل گروه آفین و عضوهای معکوس و همانی این گروه را با استفاده از عمل ضرب ماتریس ها به دست آورد

$$(b,a)\equiv\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

مفاهیم موجک و تبدیل موجک پیوسته به طورکامل قابل تعمیم به فضاهای با ابعاد بالاتر می باشد [۲،۴]. برای تعمیم تبدیل موجک پیوسته یک بعدی به ابعاد بالاتر و دیگر منیفلد ها، ابتدا باید تعمیمی مناسب از گروه آفین در آن فضا بیابیم. برای مثال برای به دست آوردن تبدیل موجک پیوسته دو بعدی ابتدا تعمیم گروه آفین را در صفحه $\mathbb{R}^2$ به دست می آوریم. این گروه که گروه تشابهی[1] نام دارد و به طور مختصر به صورت $SIM(2)$ نمایش داده می شود در فصل ۲ به طورکامل بیان می شود. تبدیل موجک پیوسته دو بعدی همانند حالت یک بعدی، مشابه تبدیل فوریه پیوسته عمل کرده و برای آنالیز کردن و تشخیص ویژگی های سیگنال های دو بعدی مورد استفاده قرار می گیرد. تبدیل موجک پیوسته دو بعدی با استفاده از پارامترهای انتقال، اتساع و دوران در صفحه $\mathbb{R}^2$ تعیین می شود. به وسیله پارامتر دوران تبدیل موجک پیوسته دو بعدی از یک موجک جهت دار قادر به آشکارسازی ویژگی های جهت دار در تصاویر و فیلترکردن جهت دار آن ها می باشد [۲].

پردازش تصویر رقمی[2] دانش جدیدی است که سابقه آن به پیش از اختراع رایانه های رقمی باز می گردد. با این حال این علم نوپا در چند دهه اخیر از هر دو جنبه نظری و عملی پیشرفت های چشم گیری داشته است. سرعت این پیشرفت ها به اندازه ای بوده است که هم اکنون و پس از مدت نسبتاً کوتاه، به راحتی می توان ردپای پردازش تصویر رقمی را در بسیاری از علوم و صنایع مختلف مشاهده نمود. بعضی از این کاربردها آن چنان به پردازش تصویر وابسته هستند که بدون آن اساساً قابل استفاده نمی باشند. یک نمونه از چنین کاربردهایی تشخیص تومور با استفاده از تصاویر سیتی اسکن[3] (تومور نگاری) می باشد. چند دسته مهم از کاربردهای پردازش تصویر به شرح زیر می باشند [۱۷].

الف) کاربردهای عکاسی مانند ارتقا و بازسازی تصاویر قدیمی، بازسازی تصاویر خراب شده با نویز و بهبود ظاهر تصاویر معمولی.

ب) کاربردهای پزشکی مانند ارتقا ویژگی های تصاویر اشعه ایکس، تولید تصاویر ماموگرافی، ام آر آی و سی تی اسکن.

ج) کاربرهای امنیتی مانند تشخیص حرکت (در دزدگیرها)، تشخیص اثر انگشت، تشخیص چهره و تشخیص امضاء.

د) کاربردهای نظامی مانند تشخیص و رهگیری خودکار اهداف متحرک یا ثابت از هوا یا زمین.

ه) کاربردهای سنجش از راه دور مانند ارتقاء و تحلیل تصاویر هوایی و ماهواره ای (برداشته شده

[1] Similiuted group

[2] Digital image processing

[3] CT-scan images

از مناطق مختلف جغرافیایی) که در کاربرهای نقشه برداری، کشاورزی، هواشناسی و موارد دیگر مفید هستند.

و) کاربردهای فشرده سازی تصویر مانند ذخیره سازی، ارسال تصاویر تلویزیون با کیفیت بالا و ارسال تصاویر متحرک و زنده از روی شبکه اینترنت و یا خط تلفن.

ز) کاربردهای صنعتی مرتبط با خودکار سازی صنایع مانند تفکیک محصولات مختلف براساس شکل یا اندازه، آشکارسازی نواقص و شکستگی های موجود در محصولات، تعیین محل اشیاء و اجرای فرایند تولید با استفاده از روبات ها و بینایی ماشین. هم چنین بسیاری از فعالیت های صنعتی و آزمایش های شیمیایی و اتمی را که برای انسان مضر و در مواردی غیر ممکن است می توان با استفاده از دانش بینایی ماشین که مبتنی بر پردازش تصویر است، انجام داد. علاقه به روش های پردازش تصویر رقمی از دو محدوده کاربردی اصلی نشأت می گیرد که آن دو محدوده عبارتند از: بهبود اطلاعات تصویری به منظور تعبیر انسانی و پردازش داده های صحنه برای ادارک ماشینی مستقل. یکی از اولین کاربردهای فنون پردازش تصویر در دسته اول، بهبود عکس های رقمی روزنامه بود که از طریق کابل زیر دریایی بین لندن و نیویورک منتقل می شد. استفاده از سامانه کابلی انتقال عکس بارتلن[۱] در ابتدای دهه ۱۹۲۰، زمان مورد نیاز برای انتقال یک عکس از عرض دریای آتلانتیک را از بیشتر از یک هفته به کمتر از سه ساعت کاهش داد. با استفاده از تجهیزات مخصوصی عکس ها را برای انتقال کابلی به صورت رمز درآورده و سپس این رمزها در محل دریافت به عکس تبدیل می شدند . در سال ۱۹۶۴ در آزمایشگاه نیروی محرکه جت[۲] ،کار روی استفاده از فنون رایانه ای برای بهبود تصاویر ارسالی کاوشگر فضایی شروع شد. از سال ۱۹۶۴ تاکنون موضوع پردازش تصویر رشد فراوانی کرده است. علاوه بر تحقیقات فضایی، اکنون از فنون پردازش تصویر در موارد متعددی استفاده می شود. گرچه اغلب این مسائل با هم مرتبط نیستند اما عموماً نیازمند روش هایی هستند که قادر به ارتقای اطلاعات تصویری برای تعبیر و تحلیل انسان باشد. برای نمونه در پزشکی شیوه های رایانه ای تمایز[۳] تصویر را ارتقا می دهند یا این که برای تعبیر آسان تر تصاویر اشعه ایکس یا سایر تصاویر پزشکی سطوح شدت روشنایی را با رنگ رمز می کنند. متخصصان جغرافی نیز از این روش ها یا روش های مشابه برای مطالعه الگوهای آلودگی هوا که با تصویر برداری هوایی و ماهواره ای به دست آمده است، استفاده می کنند. از موارد مهم دیگر در کاربرد فنون پردازش رقمی، حل مسائل مربوط به درک ماشینی است. در این موارد، شیوه

[1] Bartlane

[2] Jet propulsion laboratory

[3] Contrast

های استخراج اطلاعات از تصویر به طوری که برای پردازش رایانه ای مناسب باشد، مورد توجه قرار می گیرد. غالباً این اطلاعات به ویژگی های دیداری که انسان ها برای تعبیر محتوای تصویر استفاده می کنند، شباهت بسیار کمی دارند. مثال هایی از نوع اطلاعات مورد استفاده در ادراک ماشینی عبارتند از: گشتاورهای آماری، ضرایب تبدیل فوریه و سنجه های فاصله چند بعدی. مسائل نوعی در ادراک ماشینی که به طور مکرر از فنون پردازش تصویر بهره می گیرند عبارتند از: بینایی ماشینی برای ساخت و وارسی تولیدات صنعتی، تشخیص نظامی، پردازش خودکار اثر انگشت ها، نمایش تصاویر اشعه ایکس و نمونه های خونی و پردازش ماشینی تصاویر هوایی و ماهواره ای برای پیش بینی های هواشناسی و ارزیابی محصولات کشاورزی [۱۷].

سرطان پستان یکی از شایع ترین انواع سرطان ها در میان زنان آمریکایی است و دومین عامل اصلی مرگ و میر آن ها محسوب می شود [۲۵]. یک گزارش منتشر شده تخمین می زند که در آمریکا از میان هر هشت زن یک نفر و در استرالیا از میان هر سیزده زن یک نفر، در طول حیات خود دچار سرطان پستان می شوند [۸]. برای کاهش خطر شیوع و مرگ و میر ناشی از سرطان پستان، تشخیص زود هنگام این بیماری بسیار موثر می باشد. تحقیقات نشان می دهد که تشخیص دقیق این بیماری در مراحل اولیه به طور موثری خطر مرگ و میر ناشی از آن را کاهش می دهد. در حال حاضر ماموگرافی بهترین تکنیک برای تشخیص مطمئن سرطان پستان درمان پذیر و غیر قابل تشخیص به وسیله لمس کردن در مراحل اولیه می باشد. به دلیل ناپایدار بودن نشانه های ظاهری سرطان پستان در مراحل اولیه، اگر پزشک و رادیولوژیست تنها با استفاده از شواهد موجود و مسائل تجربی بیماری را تشخیص بدهد احتمال این وجود دارد که به آسانی توده های غیر نرمال و مشکوک را تشخیص ندهند. تکنولوژی تشخیص کامپیوتری به عنوان بررسی کننده دوم داده های ماموگرافی، با بررسی تصاویر ماموگرافی می تواند به پزشک و رادیولوژیست در رسیدن به یک تشخیص موثر و قابل اعتماد کمک کند [۲۰]. هدف ما در این رساله ارائه الگوریتمی برای افزایش دادن وضوح تصاویر ماموگرافی و تشخیص توده ها و ضایعات در این تصاویر، با استفاده از موجک ها می باشد. این الگوریتم ترکیبی از دو الگوریتم بخش بندی تصاویر ماموگرافی می باشد. این بخش بندی ها، بخش بندی موضعی تصاویر با استفاده از روش آستانه گیری براساس هیستوگرام و بخش بندی کلی تصاویر به وسیله روش آستانه گیری براساس پنجره، می باشند. بخش بندی یک تصویر به معنای تجزیه آن تصویر به اجزای تشکیل دهنده اش می باشد و این بخش بندی تا مرحله رسیدن به اجزای مورد نظر ادامه پیدا می کند.

در فصل اوّل این رساله به بیان مفاهیم اساسی، مقدمات و پیش نیازهایی در زمینه آنالیز هارمونیک و هم چنین پردازش تصویر که مورد نیاز در فصل های آینده خواهد بود، می پردازیم. تعاریف و قضایای

مقدماتی آنالیز حقیقی مورد نیاز در این رساله در ضمیمه آورده شده است. در فصل دوّم به بیان مفهوم تبدیل موجک پیوسته دو بعدی و مهمترین ویژگی ها و تفسیر آن می پردازیم. در فصل سوم در بخش اوّل آن به بیان انواع موجک های دو بعدی و مهمترین ویژگی های آن ها و در بخش دوم به ارزیابی رایج ترین موجک های دو بعدی در پردازش تصاویر می پردازیم. در فصل چهارم کاربردی از موجک های دو بعدی را در پردازش تصاویر پزشکی بیان می کنیم. در واقع با استفاده از موجک های یک و دو بعدی به بیان الگوریتمی برای افزایش دادن وضوح تصاویر ماموگرافی و تشخیص ضایعات در ماموگرام ها، می پردازیم.

مراجع اصلی این رساله به شرح زیر می باشند.

(1) J-P. Antoine and R. Murenzi, Two-dimensional directional wavelets and the scale-angle representation, Signal Processing, 1996, 259-281.

(2) J-P. Antoine, R. Murenzi and P. Vandergheynst, Directional wavelets revisited: Cauchy wavelets and symmetry detection in patterns, Applied Comput. Harmon. Anal. 6, 1999, 314-345.

(3) P. Braulta1 and J-P. Antoine, A spatio-temporal Gaussian-Conical wavelet with high aperture selectivity for motion and speed analysis, Applied Comput. Harmon. Anal. , Vol. 34, Iss. 1, 2013, 148–161.

(4) C. Gargour, M. Gabrea, V. Ramachandran and J.M Lina, A short introduction to wavelets and their applications, IEEE Circuits and Systems Magazine, Vol. 9, No. 2, 2009, 57-68.

(5) K. Hu, X. Gao and F. Li, Detection of Suspicious lesions by adaptive thresholding based on multiresolution analysis in mammograms, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 60, no. 2 , 2011 , 462-472.

(6) R. Raisi Tousi and F. Goli, Two-dimensional wavelets and applications in image analysis, in Proc. 1th Seminar on Harmonic Analysis and Applications, Isfahan University of Technology, Iran, 2013.

(۷) فاطمه گلی و ریحانه رئیسی طوسی، تبدیل موجک پیوسته دو بعدی و کاربردهای آن، پنجمین همایش ملّی-تخصصی ریاضیات، دانشگاه پیام نور شیراز، ۲۰۱۲، صفحات ۵۴۳-۵۳۹.

فصل ۱

مفاهیم و پیش نیازها

در بخش اول این فصل پیش نیازهای آنالیز هارمونیک و در بخش دوم مقدمات پردازش تصویر مورد نیاز در این رساله را بیان می کنیم. در بخش سوم به بیان مفهوم پایه ای آنالیز چندریزگی یک بعدی و نحوه به دست آوردن چند نمونه از موجک های یک بعدی به وسیله این مفهوم می پردازیم. در بخش پایانی با استفاده از ایده های مطرح شده در بخش سوم، به طور مختصر به بیان تبدیل موجک گسسته می پردازیم [۴، ۱۰، ۳۱].

۱.۱ پیش نیازهای آنالیز هارمونیک

در این بخش به بیان مهمترین تعاریف و قضایای آنالیز هارمونیک که در دیگر فصل ها مورد نیاز می باشند، می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. ضرب مستقیم[1] دو گروه G و G' که با نماد $G \times G'$ نمایش داده می شود، مجموعه ای از زوج های مرتب $(g, g') \in G \times G'$ همراه با عمل دوتایی زیر می باشد. برای هر $g_1, g_2 \in G$ و برای هر $g_1', g_2' \in G'$

[1] Direct product

$$(g_۱, {g_۱}')({g_۲}, {g_۲}') = (g_۱ g_۲, {g_۱}' {g_۲}').$$

به سادگی می توان نشان داد این مجموعه همراه با عمل دوتایی تعریف شده در بالا یک گروه می باشد و گروه های G و G' که در این مجموعه از زوج ها به ترتیب با مجموعه های $\{(g, e')|g \in G\}$ و $\{(e, g')|g' \in G'\}$ معادل می باشند، زیر گروه های نرمال از ضرب مستقیم $G \times G'$ هستند. فرض کنید K همراه با عمل دوتایی که با نماد جمع نشان داده می شود، یک گروه آبلی و G یک گروه دلخواه باشد. هم چنین فرض کنید σ یک همریختی از گروه G بتوی برونریختی های K باشد (بنابراین برای هر $g \in G$، $\sigma(g) : K \to K$ یک برونریختی می باشد). ضرب نیم مستقیم[۱] از K با G (نسبت به σ) را با نماد $K \rtimes G$ نمایش داده و به صورت مجموعه ای از زوج های (k, g) با عمل ضرب $(k, g)(k', g') = (k + \sigma(g)k', gg')$ تعریف می کنند. در این صورت K یک زیر گروه نرمال از $K \rtimes G$ است و G زمانی که برای هر $g \in G$، $\sigma(g)$ همانی باشد یک زیر گروه پایا از $K \rtimes G$ می باشد. عکس این عبارت نیز برقرار است. به عبارت دیگر مادامی که G یک زیر گروه پایا از $K \rtimes G$ باشد، ضرب نیم مستقیم و ضرب مستقیم از G و K با هم یکسان هستند.

مثال ۲.۱.۱. گروه آفین یا $ax + b$ به وسیله اعمال انتقال و اتساع روی $\mathbb{R}$ تعیین می شود و ضرب نیم مستقیم $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{R}^*, .)$ می باشد. برای این گروه همریختی σ از $(\mathbb{R}, +)$ بتوی $Aut(\mathbb{R}^*, .)$ برای هر $b \in (\mathbb{R}, +)$, $a \in (\mathbb{R}^*, .)$ به وسیله $\sigma_b(a) = ba$ تعریف می شود. تعمیم گروه آفین به فضای $\mathbb{R}^۲$ گروه تشابهی می باشد. این گروه که به وسیله اعمال انتقال، اتساع و دوران در صفحه $\mathbb{R}^۲$ تعیین می شود، ضرب نیم مستقیم $\mathbb{R}^۲$ و $(\mathbb{R}_*{}^+ \times SO(۲))$ می باشد. در فصل دوّم به طور مفصّل به معرفی این گروه می پردازیم.

تعریف ۳.۱.۱. اعمال انتقال، اتساع و دوران، تبدیلات مقدماتی در صفحه $\mathbb{R}^۲$ هستند و روی اعضای این فضا به صورت زیر عمل می کنند [۴].

۱. انتقال به وسیله پارامتر $\vec{b} \in \mathbb{R}^۲$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x'} = \vec{x} + \vec{b}$$

[1] Semidirect product

۲. اتساع به وسیله پارامتر $a > ۰$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x'} = a\vec{x}$$

۳. دوران به وسیله زاویه θ

$$\vec{x} \mapsto \vec{x'} = r_\theta(\vec{x})$$

که r_θ عضوی از گروه $SO(۲)$ می باشد و روی عضوهای $\vec{x} = (x, y)$ از صفحه $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر عمل می کند.

$$r_\theta(\vec{x}) = (xcos\theta - ysin\theta \ , \ xsin\theta + ycos\theta) \quad , \quad ۰ \leq \theta < ۲\pi \qquad (۱.۱)$$

گروه $SO(۲)$ مجموعه ای از تمامی دوران ها حول مبدأ مختصات در صفحه $\mathbb{R}^۲$ می باشد. اعضای این گروه به وسیله ماتریس های دوران ۲×۲ زیر، نمایش داده می شوند.

$$r_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad ۰ \leq \theta < ۲\pi. \qquad (۲.۱)$$

عمل دوتایی بین اعضای این گروه به صورت زیر می باشد.

$$r_{\theta_۱} r_{\theta_۲} = r_{\theta_۲} r_{\theta_۱} = r_{\theta_۱ + \theta_۲} \qquad \forall r_{\theta_۱}, r_{\theta_۲} \in SO(۲)$$

عضو همانی در این گروه $r_۰ = I$ می باشد و برای هر عضو دلخواه r_θ عضو معکوس آن به صورت $r_\theta^{-۱} = r_{-\theta}$ به دست می آید. با توجه به عمل دوتایی بین اعضای این گروه، $SO(۲)$ یک گروه آبلی می باشد. هم چنین این گروه یک گروه یک-پارامتر است (برای مطالعه بیشتر در رابطه با گروهای r-پارامتر می توانید به پیوست آ مراجعه کنید.)