بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

حل مسائل هدایت گرمایی معکوس به روشهای تحلیلی و عددی

رضا پورقلی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی کاربردی

استاد راهنما

پروفسور عبدا... شیدفر

پائیز ۱۳۸۰

تقدیم به:

پدر بزرگوار

مادر مهربان

برادران گرانقدرم

چکیده

در این پایانامه روشهای بهینه سازی، آدمیان و تفاضلات متناهی برای حل مسائل هدایت گرمای معکوس تک بعدی در نظر گرفته شده است. اساس حل روش بهینه سازی بر حوزهٔ فرکانسی و مشاهده گر پایه ریزی شده است. مشاهده گر بهترین وضعیت را بین دو منبع خطا مشخص می کندکه منبع اول خطا حساسیت تخمینها به نویز می باشد و منبع دوم خطا انحراف قطعی است. روش دیگر روش تجز یهٔ آدمیان می باشد که این روش برای بحث در مورد داده های ورودی نویزی و بدست آوردن یک تقریب پایدار از آنها بکار می رود. در این پایان نامه روش جدیدی برای حل عددی مسائل هدایت گرمایی معکوس ارائه می شود که این روش، روش تفاضلات متناهی با توابع پایهٔ چبیشف می باشد. در نهایت نتایج عددی این روش با جواب تحلیلی آدمیان مقایسه خواهد شد.

به نام خدا

سپاس بیکران بر ایزد یکتا، آن یگانه مطلق هستی که حدی را بر لطف بیکرانش نتوان یافت.

بی شک مدیون زحمات عزیزان و معلمین بسیاری هستم که هر یک در رشـد و تعـالی ایـن حقـیر تلاشها نموده‌اند که بردن نام آنها در این مقوله کوتاه کاری نشدنی ا ست. بـرای همـه آنـها عـزت و سربلندی پایدار خواستارم.

در ابتدا از استاد ارجمند و دانشمندم جناب آقای دکتر عبدا ...شیدفـر، کـه امـر هدایـت ایـن پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند و با عنایت و توجه همیشگی و راهنماییهای خـود مـرا در انجـام ایـن مهم یاری نمودند و با قبول مسـئولیت راهنمـایی ایـن پایان‌نامـه، افتخـار بـزرگی نصیـب اینجـانب نموده‌اند، بی نهایت سپاسگزارم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا مختارزاده که نقش ارزنده ای درهر چه بهتر بـه ثمـر رسیدن این پروژه، داشته و همواره همه گونه محبت وراهنمایی را در انجام ایـن پـروژه نمـوده انـد بسیار تشکر و قدردانی می کنم.

همینطور از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر کریم ایواز که به عنوان استاد مشاور مرا یاری نمودند و همیشه از راهنماییهای ایشان سود جسته‌ام سپاس بی پایان دارم.

همچنین از اساتید محترم ،جناب آقای دکتر مالک نژاد ، جناب آقای دکتر امام زاده وجنـاب آقـای دکتر رشیدی نیا که در جلسه دفاعیه اینجانب تشریف داشتند و مسئولیت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می‌کنم.

از همه اساتید محترم دانشکده ریاضی علی الخصوص خانم دکتر جذبـی ریاسـت محـترم دانشـکده ریاضی که همواره مشوق دانشجویان در امور آموزش و پژوهش هستند قدردانی می نمایم.

ازسرکار خانم یوسفی کارشناس محترم تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی به خاطر زحمات و بـذل توجه بی‌نهایت ایشان و سرکار خانم کردبچه مسئول محـترم کتابخانـه دانشـکده ریـاضی بی‌نـهایت سپاسگزارم.

و در آخر از تمامی دوستان بویژه حمیدی زارع، هدایی پور، نوروزشناس،خدادادی، ولـــــیپور، ذاکری فر، آذرگشایش، امینی، ابراهیمـی، امـام جمعـه، عسـگری و محمدیـان و همچنیـن اعضـای خانواده و اعضای فامیل بویژه حسنی وکفاشی که با حضورشـان در جلسـه دفاعیـه مایـه دلگرمـی اینجانب شدند و اینجانب را سر افراز نمودند، نهایت امتنان را دارم.

من ا... توفیق

فهرست مطالب

فصل چهارم : روش تجزیه *Adomian*

فصل پنجم : روش تفاضلات متناهی

فصـــــــــــل اول

« بررسی مسائل هدایت گرمایی معکوس »

۱-۱- مقدمـــــــــه

- یکی از زمینه های مطرح و پرطرفدار برای مسائل معکوس موضوع انتقال گرما می باشد. در حوزهٔ بحث انتقال گرما استفاده از تحلیل معکوس و به عبارت دیگر مدلسازی ریاضی مکـانیزم انتقـال گرما به صورت یک مسئله معکوس، برای تخمین شرایط سطح نظیر دما و شار گرمایی یا برای تعییـن ویژگیهای گرمایی (مانند ضریب هدایت گرمایی و ظرفیت ویژهٔ گرمایی) با استفاده از انـدازه گیریـهای دماهای گذرای (*temperature transeint*) درون جسم دارای کاربردهای عملی متعددی می باشد. در این راستا مسائل معکوس انتقال گرما را به سه نوع کلی زیر می توان دسته بندی کرد.

(i) مسائل معکوس هدایت گرمایی (*I.H. conduction P's.*)

(ii) مسائل معکوس همرفتی گرمایی (*I.H. Convection P's.*)

(iii) مسائل معکوس تابشی گرمایی (*I.H. Radiation P's*)

عمده تحقیقات در این زمینه بر روی *I.H.C.P's* می باشد. و در واقـع بیشـترین کاربردهـای صنعتـی، مدلسـازی هـای مسـائل طبیعـی در ارتبـاط بـا مکـانیزم انتقـال گرمـا مربـوط بـا همیـــن IHCP's می باشد.

در این پایان نامه نیز توجه خود را بر روی این دسته از مسائل متمرکز می کنیم.

۱-۲- تعریف و توصیف مسائل هدایت گرمایی معکوس (IHCP's)

مسائل هدایت گرمـایی اسـتاندارد (مسـتقیم یـا DHCP's) مربـوط بـه تعییـن توزیـع دمـا (*temperature-distribution*) در داخل اجسام است وقتیکه شرایط اولیه و مرزی و نرخ تولید انرژی و خواص ترموفـیزیکی محیـط مشـخص شـده باشـند و حـال آنکـه مسـائل هدایـت گرمـایی معکـوس (IHCP's) مربوط به تعیین شرط مرزی، نرخ تولید انرژی و خـواص ترموفـیزیکی از تاریخچـه دمـای اندازه گیری شده در یک یا چند نقطه داخلی (غیر مرزی) جامد، می باشد. بیشترین و معمولـی تریـن

کاربرد IHCP's مربوط به تعیین شار حرارتی سطح با استفاده از اندازه گیری دما در یک نقطه داخلی در لحظات متفاوت، می باشد. به عنوان نمونه بک (V.BECK) [۱] تعریف زیر را برای IHCP در نظر می گیرد :

" IHCP تخمین تاریخچه شار حرارتی است از تاریخچه دمای اندازه گیری شده در یک یا چند نقطهٔ داخلی جسمی که به شیوه هدایت گرما را عبور می دهد." برای نشان دادن این مسأله هدایت گرمایی یک بعدی حالت گذرای زیر را در یک تیغه یا صفحهٔ فلزی در نظر می گیریم :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &&; \quad 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ &-K\frac{\partial T}{\partial x} = f(t) &&; \quad x = 0 \ , \ t > 0 \\ &T = T_L &&; \quad x = L \ , \ t > 0 \\ &T = F(x) &&; \quad t = 0 \ , \ 0 \le x < L \end{aligned} \qquad (1)$$

وقتی که $f(t)$، T_L ، $F(x)$ ، ρc_p و k همگی معلوم در نظر گرفته شده باشند، آنگاه این مسأله مربوط به تعیین توزیع دمای $T(x,t)$ در ناحیه داخلی جامد به صورت تابعی از زمان و مکان می باشد. ما چنین مسائلی را به عنوان مسائل هدایت گرمایی مستقیم می شناسیم و با آنها سر و کار داریم.

اکنون مسأله ای مشابه مسأله (۱) را با این تفاوت که تابع شرط کرانه ای $f(t)$ در یکی از کرانه های سطح نامعلوم است در نظر می گیریم. برای جبران کمبود اطلاعات در شرط کرانه ای، دماهای اندازه گیری شده $T(x_1,t_j)=y_j$ که در یک نقطه داخلی x_1 و در زمانهای متفاوت t_j ($j = 1,2, \ldots, N$) بر بازه زمانی تعیین شدهٔ $0 \le t \le t_f$ (وقتی که t_f زمان نهایی در اندازه گیری دماها باشد) داده شده است را در نظر می گیریم. با این تفاسیر مسئله اخیر یک

IHCP است. زیرا مربوط به تخمین شرط سطحی $f(t)$ می باشد فرمول و مدل ریاضی این مسـئله بـه صورت زیر است :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad ; \qquad 0<x<L \ , \ 0<t\le t_f$$

$$-K\frac{\partial T}{\partial x}=f(t)=? \qquad ; \qquad x=0 \ , \ 0<t\le t_f$$

$$T=T_L \qquad ; \qquad x=L \ , \ 0<t\le t_f \qquad (2)$$

$$T=F(x) \qquad ; \qquad t=0 \ , \ 0\le x\le L$$

$$T(x_1,t_j)=y_j \qquad ; \qquad 0\le t_j\le t_f \ , \ j=1,2,....,N$$

در نهایت ما به این نتیجه می رسیم که مسائل معکوس هدایت گرما علاوه بـر تعییـن توزیـع دما شامل مجهول و یا مجهولات دیگری نیز است.

۱-۳- دسته بندی مسائل هدایت گرمایی معکوس

مسائل معکوس به دو دسته تقسیم می شوند :

(i) مسائل معکوس هدایت گرمایی خطی

(ii) مسائل معکوس هدایت گرمایی غیر خطی

- مسائل معکوس هدایت گرمایی خطی از نوع مسایلی هستند که در بخش قبل مطرح شد.
- مسائل غیر خطی در واقع می تواند شامل حالتهای زیر باشد :

(i) معادله غیر خطی و شرایط غیر خطی

(ii) معادله خطی و شرایط غیر خطی

(iii) معادله غیر خطی و شرایط خطی

در اینگونه مسائل ما با بیش از دو مجهول روبرو هستیم :

- مسئلۀ زیر مسأله ای با معادلۀ غیر خطی و شرایط غیر خطی است

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(u).\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ t>0$$

$$u(x,\circ)=f(x) \quad ; \quad 0<x\leq 1 \ , \ t=\circ \qquad (3)$$

$$-a\left(u(\circ,t)\right)\frac{\partial u}{\partial x}(\circ,t)=J(t) \quad ; \quad x=\circ \ , \ t>\circ$$

$$u(1,t)=h(t) \quad ; \quad x=1 \ , \ t>\circ$$

که در آن توابع *f(x)*، *g(t)*، *h(t)* معلوم و a و u مجهول هستند برای حل چنین مسئله ای نیاز به یک شرط اضافی داریم که این شرط اضافی را به صورت $u(\circ,t)=\phi(t)$ در نظر می گیریم که بـه سـادگی درجه حرارت را می توان در $x=\circ$ با استفاده از *Sensor* به دست آورد و بعد مسأله را حل کرد.

- به عنوان مثال دوم مسأله زیر را در نظر می گیریم :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ 0<t<T$$

$$u(x,\circ)=f(x) \quad ; \quad 0\leq x\leq 1 \ , \ t=\circ$$

$$u(\circ,t)=\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\circ,t)\right)+g_\circ(t) \quad ; \quad \circ<t<T \ , \ x=\circ \qquad (4)$$

$$u(1,t)=\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)\right)+h_\circ(t) \quad ; \quad \circ<t<T \ , \ x=1$$

این مسأله ای با معادله خطی و شرایط غیر خطی است. در ایـن مسـأله توابـع *f(x)*، $g_\circ(t)$ ، $h_\circ(t)$ معلوم و U و ϕ و ψ مجهول هستند. برای حل چنیـن مسـأله ای نیـازمند شـناخت شـار در دو انتهای میله هستیم، که این شرایط اضافی را به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g_1(t) \qquad ; \qquad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = h_1(t) \qquad ; \qquad t > 0$$

در نظر می گیریم.

- به عنوان مثال سوم مسأله زیر را در نظر می گیریم :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u(x,t)) \qquad ; \qquad 0 < x < 1 \;,\; t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad ; \qquad 0 \le x \le 1 \tag{5}$$

$$u(x,t) = g(t) \qquad ; \qquad t \ge 0$$

$$u(1,t) = h(t) \qquad ; \qquad t \ge 0$$

که در آن توابع $f(x)$ ، $g(t)$ ، $h(t)$ معلوم و F و u مجهول هستند برای حل چنین مسأله ای نیاز به یک شرط اضافی داریم که این شرط اضافی را به صورت $U_x(0,t) = \phi(t)$ در نظر می گیریم.

۱-۴- کاربـــــردهای $IHCP'S$

مسائل معکوس در بسیاری از شاخه های مهندسی و علوم طبیعی ظاهر می شوند. این بدیـــن دلیل است که چنین مسائلی مستقیماً در ارتباط با داده های تجربی هستند.

از جمله کاربردهای مسائل معکوس می توان به موارد زیر اشاره کرد :

۱- کنترل فرآیندهای صنعتی

۲- طراحی و کنترل نازلها (قسمت انتهای لوله موتور موشک که به آن سر لوله شعله پخـش کـن نـیز گفته می شود)

۳- تکنولوژی هسته ای

۴- فرآیندهای فرسایش (*adlation*) ، فرآیندهای ذوب یا گدازش (*melting*) و فرآیندهای سرمایش (*freezing*)

حل چنین مسائلی بسیار مشکلتر از حل مستقیم آنهاست زیرا مسائل معکوس معمولاً بدخیم هستند. از طرف دیگر روشهای حل مسائل معکوس بسیار پیچیده می باشند چرا که بسیاری از مسائل معکوس را با استفاده از روشهای ساده و معمول نمی توان حل نمود لذا روشهای متعددی و نیز الگوریتمهای کارآمدی جهت حل اینگونه مسائل در مقالات و برخی کتب آمده است. از روشهای معروف برای حل آنها می توان الگوریتمهای بهینه سازی، روشهای منظم سازی روشهای تعیین تابع، روشهای برنامه ریزی پویا روشهای فیلتر و غیره را نام برد.

در این پایان نامامه ما به کاربرد روشهای بهینه سازی و روش فیلتر برای حل چنین مسائلی می پردازیم.