بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گرایش نظری

عنوان

بررسی ناسازگاری کوانتومی در سامانه‌های دو کیوبیتی

استاد راهنما

دکتر شهریار سلیمی

استاد مشاور

دکتر محمود مهدیان

نگارش

طیبه مکارمی

اسفند ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

مقدس ترین آیات الهی زندگی ام

خانواده ی عزیزم

با بوسه بر دستان پر مهر

پدر و مادرم

خدایا مرا به سوی تو حاجتیست که برای رسیدن به آن[1]

طاقتم طاق شده و رشته چاره جویی هایم در برابر آن گسسته

نفس من بردن آن را پیش کسی که حاجتش را نزد تو می آورد

و در مطالب خود از تو بی نیاز نیست در نظرم بیاراست

پس به سبب یادآوری تو از غفلت خود متنبه شدم، به پا خاستم

از درافتادن برگشتم، باز پس رفتم و گفتم منزه است پروردگار من

آن گاه از روی رغبت ای خدای من

آهنگ تو کردم و امیدم را از روی اعتماد به سوی تو آوردم

چرا که مسئلت های بسیار من در جنب توانگری تو کمست

و خواهش های من در برابر وسعت رحمت تو کوچکست

دایره کرم تو از مسئلت احدی تنگ نمی گردد

و دست تو در بخشش به من از هر دستی بالاتر است.

[1] مناجاتی از صحیفه سجادیه

سپاس گزاری...

حکیمی فرزندش را گفت: «ای فرزندم! دانش را از دهان مردان علم بگیر! همانان که بهترین شنیده های خود را می نویسند، بهترین نوشته هایشان را به خاطر می سپارند و بهترین محفوظات خود را بیان می دارند.»

من نیز از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر شهریار سلیمی که نقش به سزایی در راهنمایی من در این پایان نامه به عهده داشته اند، کمال تشکر را دارم.

از استاد مشاور گرامی جناب آقای دکتر محمود مهدیان که از راه دور و از طریق پست الکترونیکی در راهنمایی من کوشیده اند، سپاس گزارم.

از زحمات بی دریغ استاد گرامی جناب آقای دکتر حمیدرضا محمدی خشوئی که در طول این مدّت از هیچ راهنمایی ای فروگزار ننموده اند، کمال تشکر را دارم.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر سیّدجواد اخترشناس و جناب آقای دکتر فردین خیراندیش که در راهنمایی من چه در دوره ی کارشناسی و چه در دوره ی کارشناسی ارشد، سهم به سزایی داشته اند، متشکرم.

از جناب آقای دکتر شبیر برزنجه و دوست خوبم خانم سیّده سحر سیّد حجازی که در تهیه ی مقالات و راهنمایی من از هیچ کوششی فروگزار نکرده اند، ممنونم.

از جناب آقای دکتر آرش سروری و جناب آقای دکتر مسعود قطبی که زحمت مطالعه و داوری را تقبل فرمودند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و دو برادر مهربانم که در زندگی یار و یاور بی چشم داشت من بوده اند، سپاسگزارم و این پایان نامه را بر دستان پر مهر پدر و مادرم تقدیم می کنم.

در پایان از دوستان و هم دوره ای های خوبم که رقم زنندگان خاطرات خوش دوره ی تحصیلم هستند و هریک به نحوی مرایاری کردند، تشکر می کنم.

اسفند ماه ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه، به مطالعه‌ی ناسازگاری کوانتومی سامانه‌های دوکیوبیتی می‌پردازیم. یکی ازبهترین علائم غیرکلاسیکی بودن یک سامانه‌ی کوانتومی، وجود هم‌بستگی‌هایی است که مشابه کلاسیکی ندارد. ابتدایی‌ترین نوع این هم‌بستگی‌ها، درهم‌تنیدگی است اما ازآن‌جا که در بسیاری حالت‌های غیردرهم‌تنیده نیز رفتارهای غیرکلاسیک نشان‌داده‌شده‌است، هم‌بستگی‌های کوانتومی متمایز از درهم‌تنیدگی، ممیز بهتری بین دو دنیای کلاسیکی و کوانتومی به‌ویژه برای حالت‌های آمیخته‌ی غیردرهم‌تنیده خواهندبود. یکی از این هم‌بستگی‌ها که به‌صورت اختلاف بین دو بیان متفاوت اطلاعات متقابل تعریف‌می‌شود، ناسازگاری کوانتومی نام دارد. در این پایان‌نامه، ازیک سو با منحصر کردن دیدگاه خود به سامانه‌های دوکیوبیتی، یک بیان تحلیلی از درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی برای رده‌ی خاصی از این حالت‌ها ارائه‌می‌دهیم. ازسوی‌دیگر، تحلیل می‌کنیم که پیچیدگی محاسبه‌ی ناسازگاری کوانتومی، منجر به معرفی مقیاس غیرکلاسیکی دیگری به نام ناسازگاری هندسی می‌شود. در این زمینه به مطالعه‌ی شرایط تقارن ناسازگاری هندسی در رده‌ی خاصی از سامانه‌های دوکیوبیتی می‌پردازیم. از آن‌جاکه در سامانه‌های باز کوانتومی با وجود مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی، ناسازگاری کوانتومی فقط به‌صورت مجانبی به‌صفر میل می‌کند، از یک‌سو به پژوهشی درباره‌ی مقایسه‌ی دینامیک ناسازگاری کوانتومی و ناسازگاری هندسی و درهم‌تنیدگی در دو ذره‌ی نسبیتی پرداختیم و تأثیر کانال‌های پائولی را بر هم‌بستگی‌های کوانتومی آن‌ها بررسی کردیم. از سوی دیگر، به مقایسه‌ی اثر ناهمگنی میدان مغناطیسی روی هم‌بستگی‌های حرارتی در یک سامانه‌ی دو اسپینی پرداخته و دریافتیم که علی‌رغم مرگ درهم‌تنیدگی، ناسازگاری کوانتومی و ناسازگاری هندسی در مقابل مرگ ناگهانی مقاومت می‌کند و ناهمگنی میدان مغناطیسی منجر به به‌هم خوردن تقارن در ناسازگاری هندسی و کوانتومی سامانه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: درهم‌تنیدگی، ناسازگاری کوانتومی، ناسازگاری کوانتومی هندسی، ناهمدوسی.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

هرگونه ذخیره‌سازی، انتقال و پردازش اطلاعات به یک حامل فیزیکی نیاز دارد [۲، ۱]. نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی بر پایه‌ی این ایده استوار است که سامانه‌های منفرد کوانتومی مانند اتم‌ها، فوتون‌ها، الکترون‌ها و... را می‌توان به عنوان حامل‌های اولیه‌ی اطلاعات به‌کار برد. دو دلیل عمده جهت لزوم بررسی و تحقیق در زمینه‌ی نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی وجود دارد. از یک طرف، واحدهای معمولی ذخیره‌سازی و پردازش اطلاعات در رایانه‌های کلاسیک روز به روز کوچکتر می‌شوند (طبق قانون مور، تعداد ترانزیستورهایی که می‌توان در یک سانتی متر مربع جای داد، هر هجده ماه دو برابر می‌شوند، به‌طوری‌که در آینده‌ی بسیار نزدیک ابعاد و مقیاس ترانزیستورها به مرز مقیاس نانو می‌رسد یعنی جایی که قوانین مکانیک کوانتومی حاکم هستند.) [۱، ۳، ۴]. از طرف دیگر، امروزه امکان ذخیره‌سازی و دستکاری حالات منفرد کوانتومی توسط روش‌های پیچیده‌ی اپتیک کوانتومی و فیزیک حالت جامد فراهم شده‌است. همان‌گونه که در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیک هر واحد اطلاعاتی، یک بیت [۲] نامیده می‌شود، در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی هر واحد اطلاعات، یک بیت کوانتومی یا به اختصار، کیوبیت [۳] نامیده می‌شود. یک کیوبیت، یک سامانه‌ی دو حالته‌ی کوانتومی است [۱، ۵]. مزیت و برتری سامانه‌های کوانتومی در انجام محاسبات و کاربردهای مخابراتی پردازش اطلاعات در یک خاصیت کوانتومی محض به نام درهم‌تنیدگی [۴] نهفته است. درهم‌تنیدگی، نوعی همبستگی کوانتومی است که مشابه کلاسیکی ندارد. درهم‌تنیدگی، ایجاب می‌کند که شناخت کامل حالت یک سامانه‌ی مرکب کوانتومی برای شناخت حالت‌های هریک از زیربخش‌های آن کافی نباشد. در حقیقت، اینشتین [۵] ، پادولسکی [۶] و روزن [۷] با به کارگیری پارادوکس مشهور خود (پارادوکس EPR) نشان دادند که حالت‌های دو سامانه درحالت کلی از یکدیگر جداپذیر نیستند حتی اگر از یکدیگر دور باشند و ادعا نمودند که این موضوع با حقیقت فیزیکی‌ای به نام موضعیت [۸] در تناقض است و در نتیجه، مکانیک کوانتومی نمی‌تواند یک نظریه‌ی کامل برای توصیف طبیعت باشد [۱، ۶]. شرودینگر [۹] این خاصیت ناب کوانتومی را درهم‌تنیدگی نامید [۱، ۷]. امروزه، کاربرد روزافزون درهم‌تنیدگی به‌عنوان منبع (کانال کوانتومی) در انجام فرآیندهای نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی و همچنین تسریع الگوریتم‌های کوانتومی در رایانه‌های کوانتومی و انجام پروتکل‌های مخابرات، دوربری و رمزگذاری کوانتومی، مطالعات و تحقیقات بسیاری را در خصوص اندازه‌گیری و تولید در سامانه‌های کوانتومی مختلف، به خود معطوف داشته است [۱]. همه‌ی دستاوردهایی که تا آن زمان بیانگر این مطلب بود که درهم‌تنیدگی، تنها خاصیت ویژه‌ی فیزیک کوانتومی است، تحت تأثیر مقاله‌ی

[۲] bit
[۳] qubit
[۴] entanglement
[۵] Albert Einstain
[۶] Paudolski
[۷] Rosen
[۸] locality
[۹] Schrodinger

«گربه‌ی شرودینگر» بود. به‌هرحال، این دیدگاه درباره‌ی اثر فرآیند اطلاعات کوانتومی در طول ده سال اخیر به‌طور کلی تغییر کرد و پیشرفت‌های دیگری جایگزین آن شد. در سال ۱۹۹۸ میلادی، نیل [۱۰] و لافلامه [۱۱] نشان دادند که محاسبات کوانتومی در مورد یک کیوبیت، فقط در یک حالت بیشینه آمیخته نیست بلکه می‌تواند برای سایر موارد، اثری نمایی روی محدوده‌ای از وظایف رایانه‌های کلاسیک داشته باشد [۸]. این آغازی برای تردید بود زیرا یک کیوبیت غیر بیشینه آمیخته نمی‌تواند درهم‌تنیده باشد تا اینکه در سال ۲۰۰۱ میلادی، اندازه‌گیری تحلیلی اطلاعات مختلف در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی مطرح شد و هندرسن [۱۲] و ودرال [۱۳] و به طور مستقل اولیویر [۱۴] و زورک [۱۵] به این نتیجه رسیدند که وقتی درهم‌تنیدگی از همبستگی‌های کوانتومی [۱۶] حاصل جمع کاسته می‌شود، همبستگی دیگری باقی می‌ماند که اساساً ریشه‌ی کلاسیکی ندارد و این همبستگی را ناسازگاری کوانتومی [۱۷] نامیدند [۹، ۱۰، ۱۱]. سپس، داتا [۱۸] و همکارانش، ناسازگاری کوانتومی را در الگوریتم نیل-لافلامه محاسبه کردند و نشان دادند که این کمیت با اثری کوانتومی سنجیده می‌شود که نامشابه با درهم‌تنیدگی در محاسبات برای حالت‌های جداپذیر لزوماً صفر نمی‌شود. این رویکرد ناگهانی در کاربرد ناسازگاری کوانتومی در مقوله‌های مختلف، چشم‌انداز جدیدی پیش‌روی محققین اطلاعات کوانتومی گشود [۱۲] و محققین را برآن داشت که به مطالعات بیشتری در زمینه‌ی ویژگی‌های ناسازگاری کوانتومی و ارائه‌ی شیوه‌هایی برای محاسبه‌ی این کمیت بپردازند [۲۱]-[۹]. از آن‌جا که محاسبه‌ی مقدار ناسازگاری کوانتومی به لحاظ بهینه‌سازی آنتروپی شرطی فون نیومن برای اکثر سامانه‌های کوانتومی کار بسیار مشکلی است و اغلب تحقیقات صورت گرفته به صورت عددی یا بر روی حالت‌های خاص موسوم به حالت X انجام شده است [۱۳، ۱۴، ۳۰] ، معیار کوانتومی دیگری به نام ناسازگاری کوانتومی هندسی [۱۹] توسط ودرال و همکارانش معرفی شد [۱۶] و گیرولامی [۲۰] و ادسو [۲۱] تحلیل کردند که ضریبی از این معیار می‌تواند کران بالای ناسازگاری کوانتومی سامانه‌های دو کیوبیتی را به‌دست دهد [۱۷]. به همین منظور، ما این معیار را نیز در این رساله به تفصیل، بررسی‌خواهیم کرد. محققین دیگری نیز به بررسی اثرات ناهمدوسی بر روی الگوریتم‌های مبتنی بر درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی و پیش‌بینی زمان مرگ این کمیت‌ها در این شرایط پرداخته‌اند [۲۹]-[۱۸]. در همین راستا، ما نیز دو پژوهش یکی درباره‌ی مقایسه‌ی دینامیک ناسازگاری کوانتومی و ناسازگاری هندسی و درهم‌تنیدگی در دو ذره‌ی نسبیتی و دیگری درباره‌ی اثر ناهمگنی میدان مغناطیسی روی این هم‌بستگی‌ها در یک سامانه‌ی دو اسپینی را در فصل آخر این پایان‌نامه مطرح و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

---

[۱۰] Knill
[۱۱] Laflamme
[۱۲] Henderson
[۱۳] Vedral
[۱۴] Ollivier
[۱۵] Zurek
[۱۶] Quantum Correlation
[۱۷] Quantum Discord
[۱۸] A.Datta
[۱۹] Geometric Discord
[۲۰] Girolami
[۲۱] Addesso

فصل ۱

مفاهیم اساسی مکانیک کوانتومی

در این بخش بر تعداد کمی از مفاهیم مکانیک کوانتومی که در فصل‌های بعدی با آن‌ها روبه‌رو خواهیم شد، اشاره خواهیم کرد. امید است اشاره بر این مفاهیم به درک بهتر فصل‌های آتی کمک کند.

۱.۱ فضای برداری

مجموعه‌ی V را یک فضای برداری روی میدان F می‌گویند، هرگاه دو عمل جمع و ضرب با خاصیت‌های زیر در آن قابل تعریف باشند:

$$
\begin{aligned}
+ \ : \quad \forall \ \ x\ ,y\ ,z\ \in V\,; & \\
x+y &\in V \\
x+y &= y+x \\
(x+y)+z &= x+(y+z) \\
\exists\ \circ \in V \quad &: \quad \circ + x = x \\
\exists\ -x \in V \quad &: \quad (-x)+x = \circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\times \ : \quad \forall \ \ a\ ,b\ \in F\,; & \\
a(x+y) &= ax+ay \\
(a+b)x &= ax+bx \\
a(bx) &= (ab)x = abx \\
\exists\ ۱ \in F \quad &: \quad ۱x = x.
\end{aligned}
\tag{۱.۱}
$$

بسته به این‌که F میدان اعداد حقیقی (R) یا میدان اعداد مختلط (C) باشد، فضای برداری V را فضای برداری حقیقی یا مختلط می‌نامند [۳۱].

۲.۱ ضرب داخلی و اندازه

در فضای برداری V عمل دوتایی $\langle , \rangle : V \times V \to C$ را تحت شرایط زیر، یک ضرب داخلی می‌نامیم.

$$\begin{aligned} \langle x, y+az\rangle &= \langle x,y\rangle + a\langle x,z\rangle \\ \langle x,y\rangle &= \langle y,x\rangle^* \\ \langle x,x\rangle &\geq 0 \\ \langle x,x\rangle = 0 &\Rightarrow x = 0. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

یک فضای برداری مجهز به یک ضرب داخلی را فضای برداری ضرب داخلی [1] گوییم [۳۱].

اندازه‌ی یک بردار: در هر فضای برداری ضرب داخلی، اندازه‌ی بردار به صورت $|\vec{x}| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ می‌باشد [۳۱].

قضیه‌ی کوشی - شوارتز: در یک فضای برداری ضرب داخلی داریم که

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle, \quad or \quad |\langle x,y\rangle| \leq |x||y|. \tag{۳.۱}$$

اثبات این قضیه، بسیار سر راست است. از این نامساوی، دو نتیجه‌ی مهم استنباط می‌شود [۳۲]:

۱. زاویه‌ی بین دو بردار

$$\cos\phi = \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}. \tag{۴.۱}$$

۲. نامساوی مثلث

$$|x+y| < |x| + |y|. \tag{۵.۱}$$

فضای اندازه‌دار [2]: فضای برداری V که در آن نگاشت $|||| : V \to R$ تعریف شده باشد را فضای اندازه‌دار می‌گویند، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \\ \|x\| = 0 &\Rightarrow x = 0, \\ \|ax\| &= |a|\,\|x\|, \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

هر فضای برداری ضرب داخلی، یک فضای اندازه‌دار است ولی یک فضای اندازه‌دار الزاماً یک فضای برداری ضرب داخلی نیست. به عبارت دیگر، یک اندازه لزوماً از روی یک ضرب داخلی تعریف نشده است [۳۱].

[1] Inner Space Product
[2] Normed Space

بردار پایه: حداقل تعداد بردارهای مستقل خطی که می‌توانند فضای برداری V را پوشش دهند را بردارهای پایه‌ی فضای $V = \{e_i, i = ۱, ..., N\}$ گوییم. هر بردار $x \in V$ را می‌توان برحسب پایه‌های فضا به‌صورت $x = \sum_{i=۱}^{N} x_i e_i$ بسط داد [۳۱].

۳.۱ فضای برداری کامل، باناخ و هیلبرت

دنباله کوشی: در یک فضای برداری دنباله‌ای از بردارها، مانند $\{x_۱, x_۲, ..., x_n, ...\}$ یک دنباله‌ی کوشی نامیده می‌شود، هرگاه فاصله‌ی بین بردارها به تدریج کم شود. به عبارت دقیق‌تر، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مثل N یافت شود، به قسمی که رابطه‌ی $\forall \ m, n > N \rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$ برقرار باشد. در یک فضای برداری حد یک دنباله‌ی کوشی، لزوماً در خود فضا قرار ندارد. به عنوان مثال، هرگاه میدان اعداد گویا را به عنوان یک فضای C روی خودش در نظر بگیریم، دنباله‌ی $\{(۱ + \frac{۱}{n})^n\}$ اگرچه یک دنباله‌ی کوشی است ولی حد آن در میدان اعداد گویا قرار ندارد. با افزودن اعداد گُنگ به اعداد گویا میدان اعداد حقیقی بدست می‌آید که کامل است، یعنی حد دنباله‌ی کوشی را در خود دارد [۱۹].

فضای برداری کامل: فضای برداریی که حد دنباله‌های کوشی را در خود داشته باشد را فضای برداری کامل گویند [۳۳].

فضای برداری باناخ: یک فضای برداری نُرم‌دار و کامل را فضای برداری باناخ [۳] می‌نامند [۳۳].

فضای برداری هیلبرت: یک فضای برداری ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت [۴] می‌نامند. از آنجا که میدان اعداد حقیقی و مختلط کامل هستند، هر فضای محدود بعدی که روی این میدان‌ها ساخته شود نیز یک فضای برداری کامل بوده و بنابراین، یک فضای هیلبرت است [۳۳].

عملگر خطی: در فضای برداری V نگاشت $\hat{T} : V \rightarrow V$ را یک عملگر خطی [۵] یا تبدیل خطی می‌گویند، هرگاه دارای خاصیت زیر باشد:

$$\hat{T}(x + ay) = \hat{T}(x) + a\hat{T}(y) \quad \forall a \in F, \ \ x, y \in V. \tag{۷.۱}$$

یک عملگر خطی تنها با اثرش روی بردارهای پایه، به‌صورت $\hat{T}e_i = \sum_{j=۱}^{N} T_{ji} e_j$ مشخص می‌شود. ماتریس T با درایه‌های T_{ji} را ماتریس مربوط به تبدیل خطی $\hat{T}$ در پایه‌ی $\{e_i\}$ می‌نامند و هرگاه پایه بهنجار باشد، می‌توان رابطه‌ی $T_{ji} = \langle e_j, \hat{T}e_i \rangle$ را نوشت. اثر تبدیل خطی $\hat{T}$ روی برداری مانند x عبارت خواهد بود از:

$$\hat{T}x = \hat{T} \sum_{i=1}^{N} x_i e_i = \sum_{i=1}^{N} x_i (\hat{T}e_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} T_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{N} (Tx)_j e_j.$$

بنابراین، اثر عملگر خطی $\hat{T}$ روی بردار x آن است که ماتریس این تبدیل خطی از سمت چپ در ماتریس ستونی بردار، ضرب شود [۳۲].

مسئله‌ی ویژه مقداری

برای هر عملگری مانند $\hat{T} : V \rightarrow V$ مسئله‌ی ویژه مقداری، عبارت است از یافتن بردارهای غیر صفری که تحت اثر این عملگر به مضربی از خود تبدیل شوند. به‌عبارتی، معادله‌ی $\hat{T}x = \lambda x$. برقرارباشد. هرگاه ماتریس $\hat{T} - \lambda\hat{I}$ وارون‌پذیر نباشد، بردار x غیرصفر خواهد بود. بنابراین، لازم است که معادله‌ی $det(\hat{T} - \lambda\hat{I}) = ۰$. برقرار باشد. این معادله، یک معادله‌ی درجه‌ی N

[۳] Banach
[۴] Hilbert
[۵] Linear Operator

است که در حوزه‌ی اعداد مختلط، حتماً N جواب دارد که آن‌ها را با $\{\lambda_i \,;\, i = ۱, ..., N\}$ نشان می‌دهیم. همه‌ی ویژه مقادیر یک عملگر، الزماً از هم متفاوت نیستند، به این مسئله تبهگنی [۶] گفته می‌شود. هرگاه یک ویژه مقدار، مانند λ_i ، g_i بار تکرار شود، گوییم درجه‌ی واگنی آن g_i است. بردار مربوط به λ_i را که در معادله‌ی $\hat{T}x_i = \lambda_i x_i$ صدق می‌کند، ویژه بردار مربوط به آن ویژه مقدار می‌گویند.

هرگاه x و y ویژه بردار λ باشند، هر ترکیب خطی آن‌ها نیز ویژه بردار مربوط به λ است. لذا، مجموعه بردارهای متعلق به یک ویژه مقدار، تشکیل زیر فضایی می‌دهند که آن را ویژه فضای مربوط به آن ویژه مقدار گویند [۳۲].

۴.۱ عملگرهای هرمیتی، مثبت، یکانی و بهنجار

در یک فضای برداری ضرب داخلی، الحاقی [۷] یک عملگر مانند عملگر $\hat{T}$ که به‌صورت $\hat{T}^\dagger$ نشان داده می‌شود، در شرط زیر صادق است:

$$\langle x, \hat{T}y\rangle = \langle \hat{T}^\dagger x, y\rangle \quad \forall \;\; x, y \in V. \tag{۸.۱}$$

با استفاده از این تعریف، می‌توان خواص زیر را به راحتی اثبات کرد [۳۲]:

۱. الحاقی یک عملگر خطی، خود یک عملگر خطی است.

۲.

$$\begin{aligned} \forall \;\; a \in C \quad (a\hat{A} + \hat{B})^\dagger &= a^* \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger, \\ (\hat{A}\hat{B})^\dagger &= \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger, \\ (\hat{A}^\dagger)^\dagger &= \hat{A}. \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

عملگر هرمیتی: در یک فضای برداری ضرب داخلی، اگر عملگری در شرط $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ صدق کند، عملگر هرمیتی [۸] و درصورتی‌که شرط $\hat{T}^\dagger = -\hat{T}$ را ارضا کند، عملگر پادهرمیتی نام دارد [۳۲].

عملگر مثبت: در یک فضای برداری ضرب داخلی، اگر مقدار چشم داشتی عملگری روی هر بردار حالت دلخواهی مثبت باشد، چنین عملگری را عملگر مثبت [۹] می‌نامیم. بدیهی است که تمامی ویژه مقادیر چنین عملگری، مثبت هستند [۳۲].

عملگر یکانی: در یک فضای برداری ضرب داخلی [۱۰] به عملگری که ضرب داخلی بردارها و اندازه‌ی آن‌ها را حفظ کند، یعنی $\langle \hat{U}x, \hat{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$ ، عملگر یکانی گوییم. چنین عملگری در شرط $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ صدق می‌کند [۳۲].

عملگر بهنجار یا نرمال: عملگر نرمال، عملگری است که با الحاقی خود جابه‌جا شود. طبیعی است که عملگرهای هرمیتی و یکانی نرمال هستند [۳۲].

قضیه: عملگر $\hat{T}$ بهنجار است اگر و فقط اگر به ازای هر بردار x داشته باشیم [۳۲]:

$$\|\hat{T}x\| = \|\hat{T}^\dagger x\|, \tag{۱۰.۱}$$

[۶] Degenerate
[۷] Adjoint
[۸] Hermitian Operator
[۹] Positive Operator
[۱۰] Unitary Operator

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم که $\hat{T}$ بهنجار باشد، آن‌گاه:

$$\hat{T}\hat{T}^\dagger=\hat{T}^\dagger\hat{T}\Longrightarrow\langle\hat{T}x,\hat{T}x\rangle=\langle\hat{T}^\dagger\hat{T}x,x\rangle=\langle\hat{T}\hat{T}^\dagger x,x\rangle=\langle\hat{T}^\dagger x,\hat{T}^\dagger x\rangle. \qquad (۱۱.۱)$$

از سوی دیگر، با استفاده از قضیه‌ی پارسوال [۱۱] رابطه‌ی $\langle y|y\rangle=\langle x|x\rangle$ را برای دو بردار دلخواه x و y داریم [۱۲] . بنابراین طبق رابطه‌ی (۱۰.۱) داریم:

$$\langle\hat{T}x,\hat{T}y\rangle=\langle\hat{T}^\dagger x,\hat{T}^\dagger y\rangle\Longrightarrow\langle\hat{T}^\dagger\hat{T}x,y\rangle=\langle\hat{T}\hat{T}^\dagger x,y\rangle\Rightarrow\langle(\hat{T}^\dagger\hat{T}-\hat{T}\hat{T}^\dagger)x,y\rangle=0, \qquad (۱۲.۱)$$

و چون x و y بردارهای دلخواهی هستند، $\hat{T}\hat{T}^\dagger=\hat{T}^\dagger\hat{T}$ است. بنابراین، $\hat{T}$ یک عملگر بهنجار است [۳۲].

قضیه: فرض کنید که $\hat{T}$ یک عملگر بهنجار است. دراین‌صورت، اگر $\hat{T}x=\lambda x$ ، آنگاه $\hat{T}^\dagger x=\lambda^* x$ [۳۲].

اثبات: اگر $\hat{T}$ بهنجار باشد، آنگاه $\hat{T}-\lambda\hat{I}$ نیز یک عملگر بهنجار است. با استفاده از قضیه‌ی قبل، داریم که

$$\|(\hat{T}-\lambda\hat{I})x\|=0 \;\Rightarrow\; \|(\hat{T}-\lambda\hat{I})^\dagger x\|=0 \;\Rightarrow\; \|(\hat{T}^\dagger-\lambda^*\hat{I})x\|=0 \;\Rightarrow\; \hat{T}^\dagger x=\lambda^* x.$$

از این قضیه، دو نتیجه‌ی مهم استنباط می‌شود:

۱. ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی، حقیقی هستند.

۲. ویژه مقادیر یک عملگر یکانی، فاز خالص هستند [۳۲].

قضیه: ویژه بردارهای یک عملگر نرمال، که متناظر با ویژه مقادیر متمایز هستند، برهم عمودند [۳۲].

اثبات: فرض کنید که $\hat{T}x=\lambda x$ و $\hat{T}y=\mu y$ ، دراین‌صورت [۳۲]:

$$\langle x,\mu y\rangle=\langle x,\hat{T}y\rangle=\langle\hat{T}^\dagger x,y\rangle=\langle\lambda^* x,y\rangle\Longrightarrow(\mu-\lambda^*)\langle x,y\rangle=0\Longrightarrow\langle x,y\rangle=0. \qquad (۱۳.۱)$$

قضیه تجزیه طیفی

در یک فضای برداری با بعد محدود، ویژه بردارهای یک عملگر بهنجار، یک پایه برای فضا تشکیل می‌دهند [۳۴].

اثبات: عملگر نرمال A را روی فضای V در نظر می‌گیریم . می‌دانیم که هر عملگر، حتماً یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار دارد که به ترتیب آنها را با λ_1 و e_1 نمایش می‌دهیم. بنابراین رابطه‌ی $Ae_1=\lambda_1 e_1$ را داریم. پایه‌ای برای فضا انتخاب می‌کنیم که e_1 اولین عضو آن باشد. دراین‌صورت، ماتریس عملگر A به شکل زیر در می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & b_{n-1}\\ 0 & A_{n-1}\end{bmatrix},$$

که در آن A_{n-1} یک ماتریس $n-1$ بعدی و b_{n-1} یک بردار سطری $n-1$ بعدی است. اما طبق قضیه‌ی قبل، با استفاده از بهنجار بودن A داریم:

$$Ae_1=\lambda_1 e_1\Longrightarrow A^\dagger e_1=\lambda_1^* e_1.$$

بنابراین، ماتریس $A^\dagger$ بالا مثلثی است و باید $b_{n-1}=0$ باشد و A بلوکی قطری خواهد شد:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & A_{n-1}\end{bmatrix}.$$

[۱۱] Parsoal Theorem

[۱۲] جهت اطلاعات بیشتر به [۱۹] مراجعه فرمایید.

$A_{n-۱}$ به نوبه‌ی خود یک عملگر نرمال است و حداقل یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار دارد. با همین استدلال، می‌بینیم که در پایه ای که اولین و دومین عنصر آن $e_۱$ و $e_۲$ هستند، ماتریس عملگر A به شکل زیر در می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & A_{n-۲} \end{bmatrix}.$$

با تکرار این عمل، می‌بینیم که در پایه ویژه بردارهای A یعنی پایه‌های $\{e_۱, e_۲, ..., e_n\}$، A به طور کامل قطری می‌شود. البته، این موضوع برای عملگرها یا ماتریس‌های نابهنجار، صادق نیست [۳۴].

عملگر تصویر: فضای برداری V و یکی از زیر فضاهای آن مانند W را در نظر می‌گیریم. چنانچه پایه‌های این زیر فضا را با $\{|i\rangle; i = ۱, .., m\}$ نشان دهیم، آنگاه عملگر $P_W := \sum_{i=۱}^{m} |i\rangle\langle i|$ ، عملگر تصویر روی فضای V نامیده می‌شود. این عملگر، یک عملگر هرمیتی است و در شرط $P^۲ = P$ صدق می‌کند و بردارهای فضای برداری V را بر روی زیر فضای W تصویر می‌کند [۳۵].

تجزیه قطبی

اگر A یک عملگر دلخواه روی یک فضای برداری V باشد، آن‌گاه داریم:

$$A = UJ = KU, \tag{۱۴.۱}$$

که در آن $J := \sqrt{A^\dagger A}$ و $K := \sqrt{AA^\dagger}$ عملگرهای مثبت و U یک عملگر یکانی است. چنانچه عملگر A ویژه مقدار صفر نداشته باشد، عملگر U یکتا خواهد بود [۱۳] [۳۷].

اثبات: از آن جا که عملگر J مثبت و بهنجار است، بنابراین می‌توان آن را قطری کرد:

$$J|i\rangle = \lambda_i|i\rangle \quad \lambda_i \geq 0,$$

برای ویژه بردارهایی که ویژه مقدار $\lambda_i \neq ۰$ دارد، رابطه‌ی $|e_i\rangle := \frac{A|i\rangle}{\lambda_i}$ را قرار می‌دهیم. این بردارها، یک مجموعه بردار متعامد یکه تشکیل می‌دهند، زیرا:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\langle i|A^\dagger A|j\rangle = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\langle i|J^2|j\rangle = \delta_{ij}.$$

از سوی دیگر، این بردارها به بردارهای متناظر با ویژه مقادیر صفر، عمود هستند. از آن بردارها، با فرآیند گرام اشمیت، یک مجموعه بردار متعامد یکّه می‌سازیم و به بردارهای بالا اضافه می‌کنیم تا یک پایه برای فضا به دست آید. عناصر این پایه را همگی با $|e_i\rangle$ نشان می‌دهیم. حال، عملگر یکانی $U := |e_i\rangle\langle i|$ را می‌سازیم. اکنون، نشان می‌دهیم که اثر عملگر UJ و A روی پایه $\{|i\rangle\}$ یکسان است. اگر $\lambda_i = ۰$ باشد، دو رابطه‌ی $UJ|i\rangle = ۰$ و $A|i\rangle = ۰$ را خواهیم داشت که این امر ناشی از آن است که اندازه‌ی بردار یعنی $\langle i|A^\dagger A|i\rangle$ برابر صفر است. اگر هم $\lambda_i \neq ۰$ باشد، دو رابطه‌ی $UJ|i\rangle = U\lambda_i|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$ و $A|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$ را داریم. بنابراین، این دو عملگر با هم مساویند و $A = UJ$. نایکتا بودن U برای وقتی که A ویژه مقدار صفر دارد، از آزادی عمل ما برای انتخاب یک دسته بردار متعامد از ویژه فضای $\lambda = ۰$ از عملگر J با فرآیند گرام-اشمیت ناشی می‌شود. از طرف دیگر، داریم [۳۷]:

$$A = UJ = UJ(U^\dagger U) = (UJU^\dagger)U = KU.$$

[۱۳] Polar Decomposition