دانشگاه اراك

دانشکده علوم پایه

کارشناسي ارشد ریاضی محض (گرایش جبر)

گراف هم ماکسیمال حلقه های جابه جایی

پژوهشگر

نجمه فخاری

استاد راهنما

دکتر محرم آقاپورنهر

استاد مشاور

دکتر عزیزا... آزاد

زمستان ۱۳۹۰

بسم ا... الرحمن الرحیم

گراف هم ماکسیمال حلقه های جابه جایی

توسط:

نجمه فخاری

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی (جبر جا به جایی)

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: ...عالی... و نمره: ...۱۹/۲۵

دکتر محرم آقاپور نهر(استاد راهنما و رئیس کمیته)...............استادیار

دکتر عزیزا... آزاد(استاد مشاور) ....استادیار

دکتر سیروس مرادی(دانشگاه اراک) ....استادیار

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که زیباترین مظهر محبت و فرزانگی اند

و

خواهران مهربانم،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان.

سپاسگزاری ...

سپاس بیکران پروردگار را که هستی مان بخشید و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگار سپاسگزار تمام عزیزانی هستم که مرا در این مهم یاری نموده اند.

در آغاز وظیفه خود می دانم از جناب آقای دکتر محرم آقاپور نهر، استاد راهنمای بزرگوار، که طی این مسیر و انجام این رساله جز با راهنمایی و دقت نظر ایشان میسر نمی شد، تشکر و قدردانی کنم.

از جناب آقای دکتر عزیزا... آزاد استاد مشاور محترم که راهنمایی هایشان باعث منسجم تر شدن این رساله شد متشکر و سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر سیروس مرادی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و نکات ظریفی را برای تنظیم نهایی این رساله مطرح کردند، کمال تشکر و سپاس را دارم. از کلیه اساتید گروه ریاضی که از محضرشان بهره برده ام، تشکر و قدردانی می نمایم. هم چنین از دوستان عزیزم که حضورشان همواره مایه دلگرمی و امیدواری بود، نهایت تشکر را دارم.

در پایان از تنها سرمایه زندگی ام، پدر و مادر عزیز و فرزانه و خواهران مهربانم که هرچه امروز دارم از دعای خیر ایشان است و همواره قوت قلبی برای ادامه راهم بوده اند سپاسگزارم. امیدوارم خداوند توفیق جبران قطره ای هر چند اندک از مهربانی هایشان را به من عطا فرماید.

نجمه فخاری - بهمن ماه ۱۳۹۰

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد. هم‌چنین $\Gamma(R)$ یک گراف با رئوسی به صورت عناصر R باشد که رئوس a و b مجاورند اگر و تنها اگر $Ra + Rb = R$. $\Gamma_2(R)$ را زیرگرافی از $\Gamma(R)$ تولید شده توسط اعضای نایکال حلقه‌ی R معرفی می‌کنیم. ابتدا زیرگراف $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ را در نظر می‌گیریم. همبندی و قطر این گراف را بررسی کرده و در مورد $n-$بخشی بودن آن بحث می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم برای دو حلقه‌ی نیم‌موضعی متناهی R و S، اگر R تقلیل یافته باشد، آن‌گاه

$$\Gamma(R) \cong \Gamma(S) \Leftrightarrow R \cong S.$$

علاوه بر این، حلقه‌ی تمیز را معرفی کرده، به بیان نمونه‌هایی از آن می‌پردازیم و کاربرد گراف $\Gamma(R)$ را برای مشخص کردن حلقه‌های تمیز بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی

گراف هم‌ماکسیمال، گراف همبند، قطر، گراف کامل، حلقه‌ی تمیز، حلقه‌ی منظم فون نویمان، $\mathrm{pm}-$حلقه.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

در سال ۱۹۸۸، بک[۱]، $\Gamma(R)$ را یک گراف با رئوس اعضای حلقه R در نظر گرفت، به طوری که دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $ab = 0$. او با در نظر گرفتن این گراف، حلقه‌های رنگ پذیر متناهی را بررسی کرد و نشان داد برای برخی از حلقه‌ها، بخصوص برای حلقه‌ی تقلیل یافته، عدد رنگی و عدد خوشه مساوی است ([۴]). در سال ۱۹۹۳، نصیر[۲] و اندرسون[۳]، مطالعه‌ی بیشتری روی حلقه‌های رنگ پذیر متناهی انجام دادند و مثالی از حلقه‌ی موضعی متناهی زدند که در آن $\text{clique}(\Gamma(R)) < \chi(\Gamma(R))$ ([۲]).

در سال ۱۹۹۵، شارما[۴] و بتوادکار[۵]، گراف دیگری را روی R تعریف کردند. گراف $\Gamma(R)$ با رئوس اعضای حلقه‌ی R، به طوری که دو رأس متمایز a و b مجاورند اگر و تنها اگر $Ra + Rb = R$. آن‌ها نشان دادند که $\chi(\Gamma(R))$ متناهی است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی متناهی باشد. در این حالت، $\chi(\Gamma(R)) = \text{clique}(\Gamma(R)) = t + l$ که t و l به ترتیب تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال و تعداد یکال‌های حلقه R را نشان می‌دهند ([۱۵]). در این رساله، ساختار گراف معرفی شده توسط شارما و بتوادکار را مطالعه می‌کنیم. این رساله، مشتمل بر سه فصل است. فصل اول به مطالب مقدماتی اختصاص داده شده که در فصل‌های بعد مورد نیاز است. در فصل دوم، ابتدا حلقه‌ی تمیز را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم حلقه‌های موضعی، حلقه‌های منظم فون نویمان (حلقه‌های بولی) و هر حلقه با بعد صفر تمیز هستند. علاوه بر این، بیان می‌کنیم که مجموعه‌ی حلقه‌های تمیز تحت تأثیر همریختی، حاصل‌ضرب مستقیم (متناهی یا نامتناهی) و سری‌های توانی بسته هستند. هم‌چنین موضعی سازی یک حلقه‌ی تمیز لزوماً حلقه‌ی تمیز نیست و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها تحت هیچ شرایطی نمی‌تواند حلقه‌ی تمیز باشد. هم‌چنین تأثیر تعویض $+$ با $\cup$ و یا $-$ را در تعریف حلقه‌ی تمیز بررسی می‌کنیم. مطالب این

---

[۱] Beck

[۲] Naseer

[۳] Anderson

[۴] Sharma

[۵] Bhatwadekar

فصل برای تکمیل مباحث فصل سوم مورد نیاز است. در فصل سوم، $\Gamma_{۲}(R)$ را زیرگرافی از $\Gamma(R)$ تولید شده توسط اعضای غیریکال R معرفی می‌کنیم. این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول، در مورد $n-$بخشی بودن $\Gamma_{۲}(R) \setminus J(R)$ بحث می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R حاصل‌ضربی متناهی از حلقه‌های موضعی است اگر و تنها اگر R تمیز و $\mathrm{clique}(\Gamma_{۲}(R) \setminus J(R))$ متناهی باشد. در واقع کاربرد گراف $\Gamma(R)$ را برای مشخص کردن حلقه‌های تمیز بیان می‌کنیم. در بخش دوم، نشان می‌دهیم که $\Gamma_{۲}(R) \setminus J(R)$ گرافی همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma_{۲}(R) \setminus J(R)) \leq ۳$. علاوه بر این قطر این گراف را به طور کامل مشخص می‌کنیم. در بخش سوم، نشان می‌دهیم که برای دو حلقه‌ی نیم‌موضعی R و S، اگر R تقلیل یافته باشد، آن‌گاه

$$\Gamma(R) \cong \Gamma(S) \Leftrightarrow R \cong S.$$

در سراسر این رساله، R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار است. فصل دوم این رساله بر اساس [۱] و هم‌چنین فصل سوم آن بر اساس [۱۰] تدوین گردیده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل که شامل سه بخش است، مطالبی که در فصل‌های بعد مورد نیازند را عنوان می‌کنیم. بخش اول، یادآوری کوتاهی از مفاهیم مقدماتی و نظریه‌ی گروههاست. بخش دوم را به بیان تعاریف و قضایای اولیه از نظریه‌ی حلقه‌ها اختصاص می‌دهیم و در بخش سوم، به بیان تعاریف اولیه از نظریه‌ی گراف می‌پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از [۳]، [۵]، [۹]، [۱۲]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] است.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی و نظریه‌ی گروهها

قضیه ۱.۱.۱ **(قضیه بزو)** فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}$ به طوری که هیچ کدام صفر نباشند. در این صورت $(a, b) = 1$ اگر و تنها اگر اعداد صحیح x و y موجود باشند به طوری که $ax + by = 1$.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۵.۶ از [۹] رجوع شود. □

اصل لانه کبوتری (اصل حجره‌ها): اگر n کبوتر در m لانه ساکن باشند $(n > m)$ آن‌گاه دست کم یک لانه وجود دارد که در آن ۲ و یا بیشتر از ۲ کبوتر ساکن باشند.

تعریف ۲.۱.۱ گروه G را یک گروه دوری نامیم هرگاه G توسط یکی از اعضای خود تولید شود، یعنی $a \in G$ موجود باشد به طوری که $G =< a >$ و در این صورت a را یک مولد G می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد و $a \in G$. کوچکترین عدد صحیح مثبت n که برای آن داشته باشیم $a^n = ۱$ را مرتبه a نامیم و می‌نویسیم $|a| = n$.

گزاره ۴.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $|G| = n$. در این صورت G دوری است اگر و تنها اگر عضوی چون $a \in G$ موجود باشد به طوری که $|a| = n$.

برهان. به برهان گزاره‌ی ۱۱.۲.۳ از [۱۹] رجوع شود. □

گزاره ۵.۱.۱ عبارت‌های زیر برقرارند:

۱) گروه جمعی $\mathbb{Z}_n$ یک گروه دوری با مرتبه n است.

۲) فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه $\bar{k}$ یک مولد $\mathbb{Z}_n$ است اگر و تنها اگر $(k, n) = ۱$.

برهان. به برهان گزاره‌ی ۱۴.۲.۳ از [۱۹] رجوع شود. □

تذکر ۶.۱.۱ تعداد گروههای آبلی غیریکریخت از مرتبه p^n، (p یک عدد اول است) برابر با تعداد افرازهای n است.

مثال ۷.۱.۱ فهرست تمام گروههای آبلی غیریکریخت از مرتبه ۲^۴ عبارت است از:

$$\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲,$$

$$\mathbb{Z}_{۲^۲} \times \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲,$$
$$\mathbb{Z}_{۲^۲} \times \mathbb{Z}_{۲^۲},$$
$$\mathbb{Z}_{۲^۳} \times \mathbb{Z}_۲.$$

قضیه ۸.۱.۱ **(قضیه لاگرانژ)** فرض کنیم G یک گروه متناهی و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت $|H|\,\big|\,|G|$.

برهان. به برهان قضیه‌ی ٦.۴ از [۹] رجوع شود. □

تذکر ۹.۱.۱ از قضیه لاگرانژ به دست می‌آید که تعداد هم‌دسته‌های زیرگروه H در گروه متناهی G برابر با $\frac{|G|}{|H|}$ است، لذا برای گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$، داریم $|\frac{G}{H}| = \frac{|G|}{|H|}$.

۲.۱ نظریه‌ی حلقه‌ها

تعریف ۱.۲.۱ اگر R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار و I و J نیز ایده‌آل‌های R باشند به طوری که $R = I + J$، آن‌گاه گوییم I و J نسبت به هم اولند یا I و J هم‌ماکسیمال هستند. طبق تعریف ایده‌آل‌های ماکسیمال، هر دو ایده‌آل ماکسیمال نسبت به هم اول هستند.

تذکر ۲.۲.۱ چون $۱ \in R$، $I + J = R$ معادل است با این که $a \in I$ و $b \in J$ وجود دارند به طوری که $a + b = ۱$.

گزاره ۳.۲.۱ اگر I و J ایده‌آل‌های هم‌ماکسیمال از یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشند آن‌گاه $IJ = I \cap J$.

برهان. به برهان گزاره‌ی ۵۸.۳ از [١٦] رجوع شود. □

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. در این صورت تابع $f : R \longrightarrow S$ را یک همریختی حلقه‌ای نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم

۱) $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

۲) $f(ab) = f(a)f(b)$.

۳) $f(1_R) = 1_S$.

هر همریختی یک‌به‌یک و پوشا را یک یکریختی نامیم.

قضیه ۵.۲.۱ (قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی) فرض کنیم $I_1, ..., I_n$ ایده‌آل‌های حلقه‌ی R باشند به طوری که به ازای هر i، $R^2 + I_i = R$ و به ازای هر $i \neq j$، $I_i + I_j = R$. هرگاه $b_1, ..., b_n \in R$ آن‌گاه $b \in R$ی وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، داریم (به پیمانه I_i) $b \equiv b_i$. به علاوه b با تقریب همنهشتی به پیمانه‌ی ایده‌آل $I_1 \cap ... \cap I_n$ به طور منحصربه‌فرد معین می‌شود.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۲۵.۲ از [۹] رجوع شود. □

قضیه ۶.۲.۱ (نتیجه‌ی قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی) هرگاه $I_1, ..., I_n$ ایده‌آل‌های حلقه‌ی R باشند آن‌گاه یک همریختی یک‌به‌یک از حلقه‌ها مانند $\theta : \frac{R}{(I_1 \cap ... \cap I_n)} \longrightarrow \frac{R}{I_1} \times ... \times \frac{R}{I_n}$ وجود دارد. به علاوه اگر به ازای هر i، $R^2 + i = R$ و به ازای هر $i \neq j$، $I_i + I_j = R$، آن‌گاه θ یک یکریختی حلقه‌ای است.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۲۷.۲ از [۹] رجوع شود. □

قضیه ۷.۲.۱ (قضیه تناظر) هرگاه I ایده‌آلی در حلقه‌ی R باشد آن‌گاه تناظری یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های R که شامل I هستند و مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های $\frac{R}{I}$ موجود

می‌باشد. از این رو، هر ایده‌آل در $\frac{R}{I}$ به شکل $\frac{J}{I}$ است که در آن J ایده‌آلی از R است که شامل I می‌باشد.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۱۳.۲ از [۹] رجوع شود. □

لم ۸.۲.۱ ۱) هرگاه I ایده‌آلی در حلقه‌ی R باشد آن‌گاه هر ایده‌آل اول در $\frac{R}{I}$ به شکل $\frac{\mathfrak{p}}{I}$ است که در آن $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی در R شامل I است.

۲) فرض کنیم که $\mathfrak{m}$ و I ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی جابه‌جایی R باشند که $I \subseteq \mathfrak{m}$. در این صورت $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال R است اگر و تنها اگر $\frac{\mathfrak{m}}{I}$ ایده‌آل ماکسیمال $\frac{R}{I}$ باشد.

برهان. برای (۱)، به برهان لم ۲۸.۳ و برای (۲)، به برهان لم ۴.۳ از [۱۶] رجوع شود. □

مثال ۹.۲.۱ حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{۶\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_۶$ را در نظر می‌گیریم. تنها ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbb{Z}_۶$، متناظر با ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbb{Z}$ که شامل $۶\mathbb{Z}$ هستند و عبارتند از $۲\mathbb{Z}$ و $۳\mathbb{Z}$ (توجه کنیم که $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ اگر و تنها اگر $m|n$). پس ایده‌آل‌های ماکسیمال $\mathbb{Z}_۶$ عبارتند از:

$$\frac{۲\mathbb{Z}}{۶\mathbb{Z}} = ۲\frac{\mathbb{Z}}{۶\mathbb{Z}} = ۲\mathbb{Z}_۶ = \{\bar{۰}, \bar{۲}, \bar{۴}\} \quad , \quad \frac{۳\mathbb{Z}}{۶\mathbb{Z}} = ۳\mathbb{Z}_۶ = \{\bar{۰}, \bar{۳}\}.$$

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد. $x \in R$ را یکال نامیم در صورتی که به ازای آن عضوی مانند $y \in R$ موجود باشد به طوری که $xy = ۱_R$. مجموعه‌ی همه‌ی یکال‌های حلقه‌ی R را با نماد $U(R)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $U(R) \neq \emptyset$ (زیرا $۱ \in U(R)$).

مثال ۱۱.۲.۱ $U(\mathbb{Z}_n) = \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (a,n) = ۱\}$.

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی باشد و $a \in R$. در این صورت a یکال است اگر و تنها اگر $Ra = R$.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۱۶.۲ از [۱۶] رجوع شود. □

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد و $a \in R$. در این صورت a یک عضو یکال است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ در R داشته باشیم $a \notin \mathfrak{m}$.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۱۱.۳ از [۱۶] رجوع شود. □

تعریف ۱۴.۲.۱ حلقه جابه‌جایی و یکدار R را یک میدان نامیم در صورتی که نابدیهی بوده و هر عضو ناصفر آن یکال باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. عضو $x \in R$ را پوچ‌توان گوییم هرگاه $n \in \mathbb{N}$ای موجود باشد به طوری که $x^n = 0$. کلیه‌ی عنصرهای پوچ‌توان R را با علامت $\mathfrak{n}_R$ نمایش داده و آن را رادیکال پوچ R می‌نامیم. $\mathfrak{n}_R \neq \emptyset$ (زیرا $0 \in \mathfrak{n}_R$).

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. $R[x]$ را حلقه متشکل از چند جمله‌ای‌ها از مجهول x با ضرایب متعلق به R و $R[[x]]$ را حلقه متشکل از سری‌های توانی از x با ضرایب متعلق به R گوییم .

قضیه ۱۷.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد. در این صورت

۱) $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$ یکال است اگر و تنها اگر a_0 یکال و $a_1, \ldots, a_n$ پوچ‌توان باشند.

۲) $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ یکال است اگر و تنها اگر جمله‌ی ثابت آن، a_0 یک یکال در R

باشد.

برهان. برای (۱)، به برهان قضیه‌ی ۳٦.۱ و برای (۲)، به برهان قضیه‌ی ۴۳.۱ از [۱٦] رجوع شود. □

قضیه **۱۸.۲.۱** فرض کنیم R یک حلقه و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل محض آن باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند:

۱) $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۲) حلقه $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ ایده‌آل نابدیهی ندارد.

۳) به ازای هر $x \in R$، اگر $x \notin \mathfrak{m}$ آن‌گاه $\mathfrak{m} + Rx = R$.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۱۸.۱.۵ از [۱۸] رجوع شود. □

قضیه **۱۹.۲.۱** فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد. در این صورت $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال R است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ میدان باشد.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۲۰.۲ از [۹] رجوع شود. □

نتیجه **۲۰.۲.۱** برای حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار R، عبارت‌های زیر معادلند:

۱)R یک میدان است.

۲) R دارای ایده‌آل نابدیهی نیست.

۳) $<0>$ یک ایده‌آل ماکسیمال در R است.

۴) هر همریختی حلقه‌ای ناصفر از R به هر حلقه‌ای، یک‌به‌یک است.

برهان. به برهان نتیجه‌ی ۲۱.۲ از [۹] رجوع شود. □

گزاره **۲۱.۲.۱** حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار $R = C[0,1]$ را در نظر می‌گیریم. اگر $0 \leq r \leq 1$ و قرار دهیم $M_r = \{f \in C[0,1] \mid f(r) = 0\}$، در این صورت M_r یک ایده‌آل

ماکسیمال $C[\circ,1]$ است. هم‌چنین هر ایده‌آل ماکسیمال $C[\circ,1]$ به همین صورت است.

برهان. فرض کنیم $r \in [\circ,1]$ باشد. تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\phi : C[\circ,1] &\longrightarrow \mathbb{R},\\ f &\longmapsto f(r).\end{aligned}$$

در این صورت

$$\phi(f+g) = (f+g)(r) = f(r) + g(r) = \phi(f) + \phi(g),$$

$$\phi(fg) = (fg)(r) = f(r)g(r) = \phi(f)\phi(g).$$

لذا ϕ همریختی حلقه‌ای است.

نگاشت ϕ پوشا نیز می‌باشد زیرا اگر $a \in \mathbb{R}$ و f را برابر با تابع ثابتی که هر عضو $[\circ,1]$ را به a می‌نگارد، انتخاب کنیم، در این صورت $f \in C[\circ,1]$ و $\phi(f) = f(r) = a$. هم‌چنین

$$\ker\phi = \{f \in C[\circ,1] \mid f(r) = \circ\} = M_r.$$

لذا M_r یک ایده‌آل است و بنابر قضیه‌ی اول یکریختی، داریم $\frac{C[\circ,1]}{M_r} \cong \mathbb{R}$. پس $\frac{C[\circ,1]}{M_r}$ که یکریخت با میدان اعداد حقیقی است، خود یک میدان و بنابراین M_r ایده‌آل ماکسیمال است.

برعکس، فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد، نشان می‌دهیم یک عدد حقیقی $\circ \le r \le 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $M = \{f \in C[\circ,1] \mid f(r) = \circ\}$.

ادعا می‌کنیم که یک عدد حقیقی $\circ \le r \le 1$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $f \in M$، $f(r) = \circ$ زیرا در غیر این صورت به ازای هر $\circ \le x \le 1$ تابع $g_x \in M$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_x(x) \neq \circ$. چون g_x یک تابع پیوسته است، فاصله‌ی باز I_x وجود دارد به طوری که برای هر $a \in I_x$، $g_x(a) \neq \circ$.

$[\circ,1] = \cup_{x\in[\circ,1]} I_x$، پس بنابر قضیه‌ی هاین–بورل[1] یک خانواده‌ی متناهی از فاصله‌های باز مانند $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$ وجود دارد به طوری که $[\circ,1] = \cup_{i=1}^n I_{x_i}$. قرار می‌دهیم $f = \sum_{i=1}^n g_{x_i}^2$ ادعا می‌کنیم که به ازای هر $\circ \le b \le 1$، $f(b) \neq \circ$. زیرا اگر یک عدد $\circ \le b_\circ \le 1$ موجود باشد به طوری که $f(b_\circ) \neq \circ$ آن‌گاه چون $b_\circ \in \cup_{i=1}^n I_{x_i}$، یک عدد صحیح $\circ \le k \le n$ وجود دارد به طوری که $b_\circ \in I_{x_k}$. بنابراین $g_{x_k}(b_\circ) \neq \circ$. اما از این که $f(b_\circ) = \circ$، نتیجه می‌شود

[1] قضیه هاین–بورل (قضیه ۴.۲ از [۲۰]): زیرمجموعه‌های فشرده‌ی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، دقیقاً آن‌هایی هستند که بسته و کراندارند.

$g_{x_k}(b_\circ)=\circ$. بدین ترتیب یک تناقض حاصل می‌شود. چون به ازای هر $\circ \le b \le ۱$، $f(b) \neq \circ$. پس $\frac{۱}{f(b)}$ با معنی است. از آن جا که $f \in M$، پس $۱ = f(b)\cdot\frac{۱}{f(b)} \in M$ و در نتیجه $M = R$، که با توجه به ماکسیمال بودن M، یک تناقض است. □

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد. رادیکال جیکوبسن R را اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم و آن را با $J(R)$ نشان می‌دهیم. $J(R)$ برای حلقه‌های جابه‌جایی و یکدار همواره وجود دارد. زیرا چنین حلقه‌هایی حداقل شامل یک ایده‌آل ماکسیمال هستند.

قضیه‌ی زیر $J(R)$ را برحسب اعضای R توصیف می‌کند.

قضیه ۲۳.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد و $x \in R$. در این صورت $x \in J(R)$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $r \in R$، $(۱ - rx)$ در R یکال باشد.

برهان. به برهان قضیه‌ی ۱۷.۳ از [۱٦] رجوع شود. □

تعریف ۲۴.۲.۱ حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار R را موضعی نامیم هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. اگر $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال منحصربه‌فرد R باشد اغلب می‌نویسیم $(R,\mathfrak{m})$.

تعریف ۲۵.۲.۱ حلقه‌ی نیم‌موضعی، حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است که تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

همه‌ی میدان‌ها، موضعی (و نیز نیم موضعی) هستند.

قضیه ۲٦.۲.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار باشد و $x \in R$. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند: