تقدیم به

خانواده ام

و

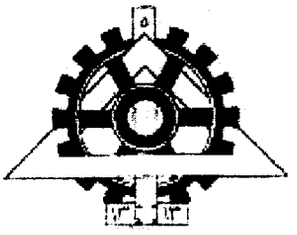
همه اقوام و خویشاوندانی

که دور از کاشانه ، تحمل رنج و مخاطره ها و مشقت ها

را بر اینجانب هموار ساختند

۳۰۰۶۹

۱۳۷۹ /۲/ ۳۰
مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تقدیم به کتابخانه



دانشگاه تهران

بررسی رفتار اجسام تغییر شکل پذیر در اثر اعمال جابجایی با فرض دورانهای بزرگ و کرنشهای کوچک

توسط: فرزین پاک نیا

استاد راهنما: جناب آقای دکتر شهرام وهدانی

6178

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

رشته مهندسی عمران گرایش سازه

دانشکده فنی

زمستان ۱۳۷۸

۳۰۰۶۹

بررسی رفتار اجسام تغییر شکل پذیر در اثر اعمال جابجایی با فرض دورانهای بزرگ و کرنشهای کوچک

نام و نام خانوادگی: *فرزین پاک نیا*

رشته تحصیلی - گرایش: *مهندسی عمران - سازه*

تاریخ دفاع: ۱۳۷۸/۱۱/۳۰

استاد راهنما: *جناب آقای دکتر شهرام وهدانی*

چکیده پایان نامه:

در روشهای معمول تحلیل دینامیکی سیستمهای سازه ای ، محققین معمولا ترجیح می دهند که حرکت و دورانهای صلب را از تغییر شکل جدا کنند. یعنی فرض می نمایند که جسم موقع حرکت ، رفتار مرکز جرم را به خود می گیرد و سپس حول آن ارتعاش می کند و تغییر شکل می دهد. پس از این فرض ، معادلات دیفرانسیل حرکت و معادلات تعادل و سازگاری لاگرانژ را پیاده سازی می کنند و سپس بروشهای حل عددی (و یا در حالات خاص بطور کلاسیک) اقدام به حل آنها میکنند. روشی که ما در این پروژه تحقیقی پیش گرفته ایم ، این است که حرکت و دوران مود صلب بصورت توأم و درگیر با تغییر شکل مدل شود. صرفنظر از تقریبی که در حل مجزای حرکت صلب و تغییر شکل جسم حول مرکز جرم در محاسبات بوجود می آید ، در بسیاری از موارد جدا سازی فوق یا مقدور نبوده و یا با مشکلات بسیار زیادی همراه می باشد. در این پروژه سعی شده است که در تحلیل سیستمها ، حرکت جسم صلب توأم با تغییر شکل مد نظر قرار گیرد و به لحاظ کاربردی، معادلات بدست آمده برای حالت خاص تغییر شکل و دوران بزرگ ولی کرنش کوچک خلاصه سازی شود. فرض اخیر در اغلب مسایل کاربردی اجسام متحرک مانند سکوهای متحرک دریایی، واگنها، خودرو و . . . فرض صحیحی محسوب می شود و نیاز به الگوریتمهای با هزینه کمتر محسوس می باشد.

در این پروژه رابطه سازیهای نموی .T.L و .U.L مورد بحث قرار گرفته اند. در زمینهٔ تحلیل دینامیکی نیز دو روش معروف ویلسون- θ و β-نیومارک مورد بحث قرار گرفته اند.

کلمات کلیدی: *دورانهای بزرگ، اجسام متحرک، کرنشهای کوچک.*

پیشگفتار

بطور کلی در اغلب مسایل مهندسی سازه ، پدیده های دینـامیکی در کنـار سـایر مسـایل مثـل پدیده های استاتیکی ، مصالح سازه ای اعم از فلزی و غیر فلزی ، مدیریت پروژه ، مدیریت ساخت و بسیاری مسایل ریز و درشت دیگر نیز مطرح می شود که چه از نظـر تئـوری و چـه از نظـر عملـی از جایگاه ویژه ای برخودار است . پدیده های دینامیکی به شیوه های گوناگونی در مهندسـی سـازه و یـا بطور کلی در مکانیک جامدات عارض می شوند. مثـلا نیروهـای دینـامیکی مـی تواننـد در اثـر اعمـال شتاب بر اجسام بوجود آیند . (مانند شتاب اعمالی بر پایه یک سازه ساختمان در اثـر حرکـات زمیـن لرزه ای). و یا می توانند در آخر اعمال نیروهای دینامیکی یا نیروهای متغیر در طـول زمـان بـر سـازه بوجود آیند (مانند نیروهای حاصل از عمل یک دستگاه پرس متکی بر یک سازه). و یـا اینکـه مـی – توانند در اثر اعمال جابجایی های بسیار بزرگ بر سازه بوجود آیند (مـانند اعمـال جابجـایی بـزرگ از سوی یک کشتی یدک کش به یک سکوی حفاری شناور دریایی که امواج آب نیز می توانند در اعمال این جابجایی های بزرگ مؤثر باشند) بطور کلی می توان گفت اگر در اثر اعمال شرایطی روی جسـم ، نیروهای اینرسی یا نیروهای میرایی ظاهر شود ، می گویند یک پدیده دینامیکی صورت گرفته اسـت . به همین دلیل است که نیروهای حاصل از آتش سوزی را که متغـیر در طـول زمـان اسـت – نـیروی دینامیکی به حساب نمی آورند. در صورتیکه نیروهای حرارتی در ما هواره هـا را وقتـی از سـایه وارد ناحیه روشنایی خورشید می شود و یا از خلاء وارد جو زمین می شود ، دینامیکی فرض می کنند زیرا افزایش حرارت و انبساط بقدری سریع است که مقداری نیروی دینامیکی نیز ظاهر می شود. هر چنـد

که مقدارش ممکن است کم باشد .[I] در هر حال ما می توانیم با کمی وقت بر روی موارد بوجود آورنده نیروهای دینامیکی در یابیم که ماهیت آنها در اصل یکسان است . مثلا موقع انتقال نیروی دینامیکی از دستگاه پرس به سازه حاصل آن حتما جابجایی هایی هر چند ناچیز که ممکن است حالت ارتعاشی نیز داشته باشد بوجود می آید. یا اینکه ما می توانیم در حل سکوی شناور دریایی ، جابجایی های بزرگ را تبدیل به شتاب در نقاط مختلف آن بکنیم و سازه را حل دینامیکی نماییم . این مطالعات نشان می دهد که حالات فوق از نظر تئوری می توانند قابل تبدیل به یکدیگر باشند. ولی باید دید آیا در عمل هم چنین است ؟ و اگر جواب پر سش مثبت است باید دید که آیا این کار برای فرد متخصص می صرفد؟

اصولا در علم مهندسی زلزله رسم بر این است که برای آنالیز دینامکی سازه ها از طیف شتاب به جای طیف جابجایی در آنالیز استفاده می کنند. از نظر ریاضی ، یک دستگاه شتاب نگار (بعنوان مثال مدل SMA-1) از یک سیستم یک درجه آزادی ، شامل جرم ، میراگر و فنر تشکیل شده است . میرایی این سیستم عموما بالا (بیش از ٪ ۷۰ میرایی بحرانی) می باشد. بعنوان مثال اگر میرایی دستگاه کم و حرکت زمین حالت تک پالسی داشته باشد ، این سیستم در اثر اعمال این حرکت ، یک نوسان طولانی خواهد داشت که مسلما متفاوت با حرکت واقعی است . در این دستگاه، جرم قطعه مرتعش کم و سختی فنر متصل به آن بالاست . در نتیجه می توان گفت فرکانس زاویه ای (ω_D) دستگاه و یا به عبارتی فرکانس ارتعاش طبیعی دستگاه خیلی بالاست . در مقابل ، دستگاههای جابجایی نگار هم داریم که مشخصات مشابه دستگاه شتاب نگار را داراست ولی جرم جسم مرتعش بالا و سختی فلز متصله پایین است . یعنی فرکانس زاویه ای و فرکانس طبیعی دستگاه ، پایین است . از طرفی می دانیم فرکانس مودهای غالب در طیف زلزله پایین است ، که این مطلب را می توان به کمک الگوریتمهای کامپیوتری نظیر الگوریتم FFT[II] جهت تعیین محتوای فرکانسی زلزله ها تحقیق

[I] به نقل از ژورنال Solids and Struetures

[II] Fast Fourier Transform

کرد. اگر چنین حرکاتی را بخواهیم با دستگاه جابجایی سنج ثبت کنیم ، احتمال هماهنگ شدن نوسان جرم دستگاه با نوسان زمین بالا خواهد بود و در نتیجه نمی توان از صحت داده های ثبت شده اطمینان حاصل کرد. پس به این دلیل استفاده از طیف جابجایی برای مطالعات دینامیکی روی سازه های متأثر از حرکات زمین لرزه مناسب نخواهد بود. و چون فرکانس طبیعی دستگاه شتاب نگار خیلی بالاست ، بعید به نظر می رسد که با برخی مودهای ارتعاشی موجود در طیف شتاب واقعی زلزله به هماهنگی[I] بیافتد. اکنون حالت دیگر را مورد بررسی قرار می دهیم و آن این است که ما طیف جابجایی را به کمک طیف شتاب بدست آوریم . این عمل را می توان با دو انتگرال گیری پی در پی انجام داد. اما نکته اساسی اینجاست که در مراکز تحقیقاتی زلزله ، جهت مطالعه طیف ، آنرا به صورت گام به گام[II] وارد دستگاههای کامپیوتری می کنند. اگر از این طیف ناپیوسته مستقیما در آنالیز دینامیکی استفاده شود . خطای محاسبات خیلی پایین خواهد بود. ولی می دانیم اگر از این طیف نا پیوسته ، دوباره انتگرال گرفته شود ، خطای محاسبات خیلی بالا خواهد رفت و در نتیجه باز هم استفاده از طیف جابجایی در آنالیز دینامیکی کار صحیح و قابل قبولی نخواهد بود . پس دلایل فوق نشان می دهد که برای تحلیل دینامیکی ساختمانها استفاده از طیف شتاب بدلیل مطلق بودن آن مناسب ، بهتر و درست است .

اکنون حالت دیگری را می خواهیم مثال بزنیم . واگنی را در نظر بگیرید که در امتداد خط راه آهن در حال حرکت است و از نقطه "بوژی " توسط لوکوموتیوی کشیده می شود. خط آهن دارای انحنا در پلان افقی و انحنا در پلان قائم است و در ضمن خط آهن با اندکی دست انداز[III] همراه است و از طرفی واگن و لوکوموتیو، قصد ترمز کردن و توقف دارد. می بینیم که هر کدام از عوامل فوق در سازه واگن ، شتابهای متفاوتی را بوجود می آورند. اگر ما واگن را به اجزاء محدود متناهی با خواص

[I] Resonance

[II] Digitized

[III] Imperfection

مکانیکی متفاوت تقسیم کنیم و حتی اگر به فرض محال سازه واگن را به حد کافی صلب فرض نماییم و بگوییم که شتاب کلیه نقاط گاهی با یکدیگر برابر است ، علی الاصول توزیع کردن شتاب بر اساس هر کدام از عوامل فوق بر روی کلیه نقاط گرهی و محاسبه نیروی اینرسی متناظر با هر کدام از آنها، کاری بس دشوار خواهد بود. ولی از طرفی می دانیم که اولا سازه واگن صلب نیست و ثانیا سیستم کمک فنر واگنها دارای تغییر شکلهای بزرگی هستند که باعث می شوند واگن گهواره مانند به اشکال مختلف نوسان کند. پس روش اول خیلی روش اشتباهی خواهد بود. از طرفی می دانیم حرکت واگن از حرکت زمین - بر خلاف ساختمانها - مستقل است و با توجه به اینکه در مسایل فنی ، زمین به عنوان یک دستگاه مرجع لخت [I] مناسب منظور می شود ، اندازه گیری جابجایی ، سرعت و شتاب مطلق نسبت به آن کار آسانی خواهد بود. از طرفی ما مکان هندسی محل تماس طوقه باریل و نیز مکان هندسی "بوژی " را از طریق پایش [II] می توانیم با دقت کافی در دست داشته باشیم . پس با دانستن جابجایی در ۱+۸ نقطه ما خواهیم توانست سیستم اجزاء محدود متناظر با واگن را بدون توزیع نیروی اینرسی در نقاط گرهی سازه جزء بندی شده با دقت بالا و قابل قبول در کارهای مهندسی تحلیل نماییم . این عمل اولا با پیشرفت روز افزون ماشینهای حسابگر سازگار است ثانیا موجب سهولت تحقیقات در مراکز تحقیقاتی ، از جمله مراکز تحقیقاتی سازه های فرا ساحلی ، مراکز تحقیقاتی خودرو و راه آهن ، مراکز تحقیقات صنایع دفاعی و هوا - فضا و ... خواهد شد . ما در این پروژه ، سعی بر انجام این کار یعنی تحلیل اجسام در اثر اعمال جابجایی داریم .

[I] Inertial

[II] Monitoring

از جناب آقای دکتر شهرام وهدانی به پاس تمامی زحماتی
که جهت راهنمایی و رفع اشکالات و نواقص پایان نامهٔ
اینجانب علیرغم وجود کار ها و مسئولیت های فراوانشان
متحمل شدند کمال تشکر و سپاسگذاریها را دارم.

از آقایان دکتر رضا عطار نژاد و دکتر اسدا... نورزاد که
راهنمایی هایشان چراغی فرا راه مطالعاتم بود نهایت شکر
و سپاسگذاری را دارم. از آقای دکتر ایرج محمود زاده
نیز که قبول زحمت فرمودند و پایان نامهٔ اینجانب را داوری
فرمودند و موجبات امتنان مرا فراهم نمودند بسیار ممنونم.

در خاتمه نیز از کلیه اساتید محترم گروه مهندسی عمران
که در مدت زمان تحصیل اینجانب متحمل زحمات و
دشواریهای تعلیم و تربیت شدند و نیز از کلیه گمنامانی
که پیدا و پنهان در جهت ارتقاء دانشجویان تلاش
می کنند کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

. . . ومن الله التوفیق

فهرست

مقدمه .....

فصل اول

مقدمه ای بر علم حرکت ۱

۱-۱) مفاهیم کلی ۲

۱-۱-۱) حرکت جسم صلب ۲

۱-۱-۲) طبقه بندی حرکت جسم صلب ۳

۱-۱-۳) نیرو های کریولیس ۸

۱-۲) بحث بیشتر در مورد دورانهای بزرگ و برخی
رابطه سازیهای ماتریسی متداول در مورد آن ۹

۱-۲-۱) تبیین یک روش متداول ۹

۱-۲-۲) تبیین یک روش دیگر برای دورانهای محدود ۱۷

۱-۲-۳) تعبیر هندسی دورانهای بزرگ ۱۸

فصل دوم

حرکت و تغییر شکل ۲٤

۲-۱) جداسازی حرکتها و تغییر شکلها در تحلیل سیستمها ۲۵

۲-۲) هدف مورد پیگرد در پروژه حاضر ۳۳

۲-۳) بحث پیرامون جداسازی تغییر مکان و تغییر شکل ۳۲

۲-۳-۱) بررسی موردی یک سیستم جرم-فنر متقارن ۳۳

۲-۳-۲) بررسی موردی یک سیستم جرم-فنر نامتقارن ۳۷

۲-۳-۳) بررسی حرکت یک جسم در یک مسیر منحنی ۳۹

۲-۳-۴) بررسی مسأله حرکت یک میله در حالتیکه تغییر طول و خمش آن زیاد است .. ۴۰

۲-۳-۵) بررسی سیستمهای مکانیکی ۴۱

۲-۳-۶) بررسی یک تسمه باریک با قابلیت تغییرشکلهای بزرگ و کرنشهای کوچک .. ۴۲

۲-۳-۷) بررسی مسأله تماس-برخورد دینامیکی ۴۳

۸-۳-۲) مثالی برای مسأله اعمال جابجایی ۴۷
۴-۲) بررسی مسایل تحلیلی در رابطه با مسأله اعمال جابجایی ۴۹
۵-۲) مسایلی که در این پروژه بدان خواهیم پرداخت ۵۲
۶-۲) تحلیل دینامیکی سیستمهای غیرخطی ۵۳
۷-۲) نتیجه گیری و خلاصه فصل ۵۵

فصل سوم

تحلیل خطی و غیر خطی بروش اجزاء محدود ۵۷

۱-۳) مقدمه ای بر روش اجزاء محدود خطی ۵۸
۱-۱-۳) مفاهیم اساسی ۵۸
۲-۱-۳) استخراج معادلات تعادل حاکم بر اجزاء محدود ۵۹
۲-۳) مقدمه ای بر آنالیز اجزاء محدود بروش غیر خطی ۶۳
۱-۲-۳) طبقه بندی مسایل غیر خطی ۶۳
۲-۲-۳) رابطه سازی معادلات حرکت نموی در مکانیک جامدات ۶۹
۳-۲-۳) تنسور تنش ، تنسور کرنش و گرادیان تغییر شکل لازم
برای معادلات حرکت نموی ۷۱
۴-۲-۳) رابطه سازی لاگرانژین کامل و لاگرانژین بهنگام ۸۰
۵-۲-۳) بحث در مورد نحوهٔ انتخاب رابطه سازیهای .T.L و .U.L ۸۴

فصل چهارم

روش حل دستگاه معادلات غیر خطی ۸۷

۱-۴) مقدمه ۸۸
۲-۴) روش تکرار نیوتن-رافسون (.N.R) ۸۸
۳-۴) حل تکراری بروش سختی اولیه ۹۰
۴-۴) روش تکرار نیوتن-رافسون اصلاح شده (.M.N.R) ۹۲
۵-۴) بررسی صوری سایر روشهای مبتنی بر تکرار ۹۳
۶-۴) کنترل همگرایی در حل دستگاههای معادلات غیر خطی ۹۵
۱-۶-۴) معیار همگرایی نسبت نرم تغییر مکان نموی ۹۶
۲-۶-۴) معیار همگرایی نسبت نرم نیروهای نامتعادل ۹۶
۳-۶-۴) معیار همگرایی نسبت انرژی تغییر شکل ۹۷

۷-۴) پیاده سازی روشهای حل تکراری در روابط حرکت نموی.....۹۸

فصل پنجم

مقدمه ای بر تحلیل دینامیکی سیستم اجزاء محدود.....۹۹

۵-۱) مفاهیم اساسی ۱۰۰

۵-۲) روش شتاب خطی ۱۰۰

۵-۲-۱) روش ذوزنقه ۱۰۱

۵-۲-۲) روش ویلسون-θ ۱۰۳

۵-۲-۳) روش β-نیومارک ۱۰۵

۵-۳) آنالیز پایداری جواب.....۱۰۶

۵-۳-۱) بررسی پایداری در روش β-نیومارک.....۱۰۸

۵-۳-۲) بررسی پایداری در روش ویلسون-θ.....۱۱۰

۵-۴) آنالیز دقت.....۱۱۱

۵-۵) انتخاب خودکار گام زمانی ۱۱۲

۵-۶) آنالیز دینامیکی غیرخطی سیستم اجزاء محدود ۱۱۴

۵-۷) مسأله نیرو های خارجی وابسته به تغییر شکل یا تغییر مکان ۱۱۵

فصل ششم

رابطه سازی و ساخت المانهای سازه ای ۱۱۷

۶-۱) مقدمه ۱۱۸

۶-۲) رابطه سازی آیزوپارامتریک.....۱۱۹

۶-۲-۱) المان تیر آیزو پارامتریک ۱۲۰

۶-۲-۲) المان خرپا در صفحه.....۱۳۲

۶-۲-۳) المان تیر کلاسیک در صفحه ۱۳۴

۶-۳) تشکیل ماتریس جرم برای المان تیر کلاسیک در صفحه.....۱۴۵

فصل هفتم

ملاحظات لازم در حل دستگاههای معادلات سیستم اجزاء محدود ۱۴۸

۷-۱) کلیات ۱۴۹

۷-۲) روش فشرده سازی استاتیکی ۱۴۹

۳-۷) روش تابع جریمه ۱۵۱
۴-۷) بحث بیشتر پیرامون دو روش ۱۵۱
۵-۷) بحث پیرامون روشهای دیگر ۱۵۴

حل چند مثال ۱۵۵

نتیجه گیری و پیشنهاد ۱۶۱

فهرست جدولها

فصل سوم

تحلیل خطی و غیر خطی بروش اجزاء محدود.....۵۷

جدول(۱-۳): طبقه بندی پدیده های غیر خطی ۶۵

جدول(۲-۳): طبقه بندی الگوهای رفتاری مصالح ۶۷

جدول(۳-۳): رابطه سازی افزایشی بر اساس روش لاگرانژین کامل ۸۵

جدول(۴-۳): رابطه سازی افزایشی بر اساس روش لاگرانژین بهنگام.....۸۵

فصل ششم

رابطه سازی و ساخت المانهای سازه ای.....۱۱۷

جدول(۱-۶): روابط ماتریسی معادل برای معادلات تعادل ۱۱۹

جدول(۲-۶): روابط ماتریسی مورد نیاز برای المان تیر با فرمولاسیون .U.L ۱۳۰

جدول(۳-۶): رابطه سازی افزایشی بر اساس روش لاگرانژین کامل ۸۵

جدول(۴-۶): رابطه سازی افزایشی بر اساس روش لاگرانژین بهنگام.....۸۵

فهرست اشکال

فصل اول

مقدمه ای بر علم حرکت ۱

شکل (۱-۱): طبقه بندی محیطهای پیوسته ۲

شکل (۱-۲): حرکت انتقالی یک جسم صلب ۳

شکل (۱-۳): حرکت دورانی یک جسم صلب ۴

شکل (۱-۴): جسم صلب در حال دوران ۵

شکل (۱-۵): نمایی از دستگاه جایروسکوپ ۸

شکل (۱-۶): استخراج ماتریس تبدیل $\mathbf{T}(\vec{\theta})$ به ازاء شبه بردار دوران $\vec{\theta}$ ۱۰

شکل (۱-۷): نمایش هندسی دورانهای بزرگ برای حالت (I_f) ۱۹

شکل (۱-۸): نمایش هندسی دورانهای بزرگ برای حالت (II_f) ۲۱

شکل (۱-۹) ۲۳

فصل دوم

حرکت و تغییر شکل ۲٤

شکل (۲-۱): حرکت یک جسم در فضا ۲۵

شکل (۲-۲): بررسی حرکت یک واگن ۲۶

شکل (۲-۳): نمایی از انواع سکوهای حفاری متحرک ۳۱

شکل (۲-۴): نمایی از سیستم سه درجه آزادی ۳۶

شکل (۲-۵): سیستم نامتقارن جرم-فنر با دو درجه آزادی ۳۷

شکل (۲-۶) ۳۸

شکل (۲-۷) ۳۹

شکل (۲-۸) ۴۱

شکل (۲-۹) ۴۲

شکل (۲-۱۰) ۴۳

شکل (۲-۱۱): برخورد جسم با تغییر شکل کم روی مانع صلب ۴۴

شکل (۱۲-۲): برخورد جسم صلب به یک خودرو ۴۵
شکل (۱۳-۲): برخورد دو جسم تغییر شکل پذیر به یکدیگر[24] ۴۶
شکل (۱۴-۲): مدل ۱/۴ خودرو ۴۸
شکل (۱۵-۲): نمایش یک المان دو نیرویی خرپا ۵۱
شکل (۱۶-۲) ۵۲

فصل سوم

تحلیل خطی و غیر خطی بروش اجزاء محدود ۵۷
شکل (۱-۳): نمایی از یک جسم در فضای سه بعدی ۶۰
شکل (۲-۳): انواع مختلف پدیده های فیزیکی در مکانیک جامدات ۶۶
شکل (۳-۳): سطوح شکست مصالح بر اساس الگوهای رفتاری ۶۸
شکل (۴-۳): حرکت جسم در مختصات فضایی ۷۰
شکل (۵-۳): المان دیفرانسیلی در زمانهای 0 و t ۷۴
شکل (۶-۳): بردارهای نیروی وارد بر جسم ۷۶

فصل چهارم

روشهای حل دستگاههای معادلات غیر خطی ۸۸
شکل (۱-۴): تعبیر هندسی روش نیوتن-رافسون ۹۰
شکل (۲-۴): تعبیر هندسی روش تنش اولیه ۹۱
شکل (۳-۴): تعبیر هندسی روش نیوتن-رافسون اصلاح شده ۹۲
شکل (۴-۴): روش کواسی نیوتن ۹۴

فصل پنجم

مقدمه ای برتحلیل دینامیکی سیستم اجزاء محدود ۹۹
شکل (۱-۵): تغییرات جابجایی ، سرعت و شتاب ۱۰۲
شکل (۲-۵): تغییرات شتاب در روش ویلسون- θ ۱۰۴
شکل (۳-۵): فرض اولیه نیومارک ۱۰۵
شکل (۴-۵): تعیین شعاع طیفی برای سیستم یک درجه آزادی ۱۰۷
شکل (۵-۵): نمودار شعاع طیفی نسبت به فرکانس پایه Ω ۱۰۹
شکل (۶-۵): نمودار شعاع طیفی نسبت به θ در روش ویلسون- θ ۱۱۰