دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های هم‌محلی چندگامی برای معادلات انتگرال ولترا

استاد راهنما

دکتر غلامرضا حجتی

استاد مشاور

دکتر صداقت شهمراد

پژوهشگر

نگار اورنگی فرد

بهمن ۱۳۸۹

به نام خدا

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر دلسوزم که همواره حامی من بوده اند
و برادر مهربانم مهرداد.

خدایا

در برابر هر آنچه انسان ماندن را به تباهی می کشد
مرا به نخواستن
و نداشتن، رویین تن کن.

سپاس گزاری

سپاس و ستایش خداوندرا که هرچه هست از مهر اوست.

صمیمانه از استاد معزز، جناب آقای دکتر غلامرضا حجتی که با صبر و شکیبایی مرا از راهنمایی‌های ارزنده و مشاوره‌های گران بهای خود بهره مند نمودند، سپاسگزارم و از درگاه ایزدمنان برای ایشان سعادت و سلامت آرزومندم.

فروتنانه از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر صداقت شهمراد که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این پایان نامه را بر عهده گرفتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراتب امتنان خود را به استاد ارجمند، جناب آقای دکتر قدرت عبادی که زحمت ارزیابی نهایی و داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند ابراز می‌دارم. هم چنین از اساتید محترم گروه ریاضی کاربردی دانشگاه تبریز که در طول تحصیل تجربیات ارزشمندشان را در اختیار این جانب نهادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و برای این بزرگواران سرافرازی روزافزون آرزومندم.

بر خود لازم می‌دانم سپاسگزار زحمات بی دریغ خانم سمیه فاضلی باشم، که همواره با بردباری و متانت راهنمایی‌های ارزنده‌ای به این جانب ارائه نمودند.

هم چنین از آقای بابک شیری به خاطر کمک هایی که جهت هرچه بهتر شدن این پایان نامه ارائه نمودند، متشکرم.

در پایان، از پدر و مادر عزیزم به خاطر حمایت ها، تشویق ها و روشنگری هایشان قدردانی می‌نمایم.

نگار اورنگی فرد

بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی: اورنگی فرد نام: نگار

عنوان پایان‌نامه: روش‌های هم‌محلی چندگامی برای معادلات انتگرال ولترا

استاد راهنما: دکتر غلامرضا حجتی
استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۸۹ تعداد صفحه: ۱۱۹

کلیدواژه‌ها: معادلات انتگرال ولترا، روش‌های هم‌محلی چندگامی، مفاهیم همگرایی و پایداری

چکیده
در این پایان‌نامه روش‌های هم‌محلی چندگامی برای حل عددی معادلات انتگرال ولترا معرفی می‌شوند، طوری‌که پس از گسسته‌سازی، جواب در هر نقطه‌ی گرهی به مقدار جواب در چند گره قبلی وابسته می‌شود. تکنیک‌های ساختاری این روش را توضیح داده، به تجزیه و تحلیل مرتبه روش پرداخته و نیز خواص پایداری خطی روش را بررسی خواهیم کرد. با انجام آزمایش‌های عددی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش مذکور، با نتایج حاصل از دیگر روش‌های مشابه، به دنبال نشان دادن برتری‌های این روش و تائید نتایج نظری خواهیم بود.

فهرست مطالب

مقدمه

یک روش هم‌محلی برای حل معادله‌ی انتگرال ولترای

$$y(t) = g(t) + \int_{\circ}^{t} k(t, \tau, y(\tau)) d\tau, \qquad t \in I := [\circ, T],$$

که در آن $k \in C(D \times \mathbb{R})$ با $D = \{(t, \tau) : \circ \leq \tau \leq t \leq T\}$ و $g \in C(I)$، براساس ایده‌ی تقریب جواب دقیق با تابع مناسبی که به یک فضای با بعد متناهی تعلق دارد پایه‌ریزی شده است. این فضا معمولاً فضای چندجمله‌ای‌های جبری تکه‌ای است که روی یک زیر مجموعه‌ی معین از بازه‌ی انتگرال‌گیری، به طور دقیق در معادله‌ی انتگرال صدق می‌کند.

در این پایان‌نامه تعمیمی از روش هم‌محلی کلاسیك را به حالت چندگامی ارائه می‌کنیم. در اینجا یک دسته‌ی کلی از روش‌های هم‌محلی چندگامی را به دست می‌آوریم که جواب در هر گره، به مقدار جواب در تعداد ثابت r نقطه از گام‌های قبلی وابسته است، با این هدف که مرتبه همگرایی روش هم‌محلی تک‌گامی کلاسیک را بالا ببریم، بدون اینکه هزینه‌های محاسباتی افزایش یابند و نیز ناحیه‌ی پایداری مطلق روش توسعه می‌یابد.

آریه ایزرلیس [۱] [۱۷] ، علت استفاده از مقادیر موجود قبلی را تحت جمله‌ی زیر بیان می‌کند: ”محققین آنالیز عددی طبیعتاً انسان‌های صرفه جویی هستند، چرا مقادیر محاسبه شده در گره‌های قبلی را کنار بگذاریم؟ چرا جواب را به مقادیر موجود قبلی که اکنون در دست هستند وابسته نکنیم؟ “

در روش‌های هم‌محلی چندگامی برای محاسبات از t_n تا t_{n+1} از تقریب‌های y_{n-k}، $k = \circ, \dots, r-1$ که در گام‌های قبلی محاسبه شده‌اند استفاده می‌کنیم.

در فصل اول برخی تعاریف و مفاهیم اساسی معادلات انتگرال را که در فصل‌های

[۱] Arieh Iserles

بعد مورد نیاز است می‌آوریم. سپس برخی روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال را معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم روش‌های هم‌محلی کلاسیک را برای معادلات انتگرال ولترا معرفی می‌کنیم و مرتبه‌ی همگرایی این دسته از روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم به ارائه‌ی روش جدید می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که استفاده از این روش‌ها باعث بالا رفتن مرتبه‌ی همگرایی روش می‌شود. در ادامه به بررسی ناحیه‌ی پایداری مطلق روش‌های هم‌محلی چندگامی می‌پردازیم.

در فصل چهارم با استفاده از مثال‌های عددی نشان می‌دهیم مرتبه‌ای که به طور تحلیلی برای روش‌های هم‌محلی چندگامی به دست آورده‌ایم، صحیح است. هم‌چنین عملکرد روش‌های جدید را با روش‌های هم‌محلی کلاسیک مقایسه می‌کنیم. برنامه‌های کامپیوتری روش‌های هم‌محلی کلاسیک و روش‌های هم‌محلی چندگامی در محیط $MATLAB$ نوشته شده‌اند.

این‌پایان‌نامه براساس مرجع [۱۱] تنظیم شده است.

فصل ۱
مفاهیم اولیه و پیشینه‌ی پژوهش

در این فصل برخی تعاریف و مفاهیم اساسی معادلات انتگرال را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است می‌آوریم و دسته‌های مختلف معادلات انتگرال را معرفی می‌کنیم. سپس قضایای وجود و منحصربفردی جواب معادلات انتگرال ولترا را بررسی خواهیم کرد. برای توضیحات کامل‌تر و مثال‌های بیشتر، مراجع [۱]، [۲]، [۱۹] و [۲۰] را ببینید. در ادامه برخی روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال را معرفی خواهیم کرد.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اساسی معادلات انتگرال

معادله‌ی انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(t)$ زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. شکل کلی معادله‌ی انتگرال به صورت

$$F(t, \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} K(t,\tau,y(\tau))d\tau) = ۰$$

است.که در آن $K(t,\tau,y(\tau))$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال نامیده می‌شود و y تابع مجهول معادله است. در این معادله $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ حدود انتگرال هستند.

معادلات انتگرال دارای کاربردهای فراوانی هستند. مسأله‌ی رشد جمعیت، همزیستی گونه‌های زیستی، از کار افتادگی تجهیزات و نرخ جایگزینی آنها، زنجیر آویزان و غلتیدن یك مهره روی یك مسیر که زمان رسیدن به یك نقطه‌ی معین مستقل از نقطه‌ی شروع حرکت باشد، چند نمونه از مسائلی هستند که به صورت معادلات انتگرال یا انتگرال-

دیفرانسیل فرمول بندی شده‌اند. همچنین بعضی مواقع تبدیل یك معادله‌ی دیفرانسیل به یك معادله‌ی انتگرال، حل آن را ساده‌تر می‌کند.

دسته بندی‌های متعددی از معادلات انتگرال وجود دارند که ذیلاً به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم.

۱.۱.۱ معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

یک دسته‌بندی مهم در معادلات انتگرال، خطی و غیرخطی بودن معادله است. شکل کلی معادلات انتگرال خطی به صورت

$$h(t)y(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k(t,\tau)y(\tau)d\tau = g(t) \qquad (۱.۱)$$

است. در این معادله $k(t,\tau)$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال است و $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ حدود انتگرال هستند. شکل کلی معادلات انتگرال غیر خطی به صورت

$$h(t)y(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} k(t,\tau,y(\tau))d\tau = g(t) \qquad (۲.۱)$$

است، که در آن $k(t,\tau,y(\tau))$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال است و تابعی غیرخطی از y است.

مثال ۱.۱.۱. معادلات انتگرال

$$y(t) + \int_{۰}^{t} e^{t-\tau}y(\tau)d\tau = t,$$

$$y(t) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin(t+\tau)y(\tau)d\tau = cost,$$

خطی‌اند و معادلات انتگرال

$$y(t) - \int_{۰}^{t} y^{۲}(\tau)d\tau = \frac{۱}{۲} + e^{-t} - \frac{۱}{۲}e^{-۲t},$$

$$y(t) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^{t+\tau y(\tau)}d\tau = ۰,$$

غیرخطی هستند.

۲.۱.۱ معادلات انتگرال فردهلم و ولترا

فردهلم و ولترا از اولین کسانی بودند که معادلات انتگرال را مورد بررسی قرار دادند، به این دلیل دو دسته‌ی مهم از معادلات انتگرال به معادلات انتگرال فردهلم و ولترا معروف شده‌اند. در صورتی که حدود انتگرال معادله‌ی انتگرال مقادیر ثابت باشند، معادله‌ی انتگرال فردهلم نامیده می‌شود و اگر حداقل یکی از حدود متغیر باشد، معادله‌ی انتگرال ولترا است.

مثال ۲.۱.۱. معادله‌ی

$$\int_{0}^{t} e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = t$$

یك معادله‌ی انتگرال ولترا است و

$$y(t) - \frac{1}{8} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y^{2}(\tau) d\tau = 2cos(t) - \frac{\pi}{8}$$

یك معادله‌ی انتگرال فردهلم است.

۳.۱.۱ معادلات انتگرال نوع اول و دوم

یک دسته‌بندی مهم دیگر در معادلات انتگرال، دسته‌بندی آنها به نوع اول و دوم است. در معادلات (۱.۱) و (۲.۱)، اگر $h(t) \equiv 0$ معادله نوع اول نامیده می‌شود و در صورتی که $h(t) \not\equiv 0$ معادله از نوع دوم است. معادله‌ی

$$\int_{0}^{\pi} t\tau y(\tau) d\tau = 2cosht - 1$$

یك معادله‌ی انتگرال فردهلم خطی نوع اول است و معادله‌ی

$$y(t) - \int_{0}^{t} \tau y(\tau) d\tau = cost + t$$

یك معادله‌ی انتگرال ولترای خطی نوع دوم است.

۴.۱.۱ معادلات انتگرال منفرد

دسته‌ی دیگری از معادلات انتگرال، معادلات انتگرال منفرد نامیده می‌شود. اگر در معادله‌ی انتگرال حداقل یکی از حدود انتگرال نامتناهی باشد و یا هسته‌ی معادله در نقطه یا نقاطی از بازه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی گردد، معادله‌ی انتگرال را از نوع منفرد گویند.

مثال ۳.۱.۱. معادله‌ی

$$y(t)+\int_{0}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}y(\tau)d\tau=\sqrt{t}+\frac{1}{2}\pi t$$

یك معادله‌ی انتگرال ولترای منفرد نوع دوم است.

مثال ۴.۱.۱. تبدیل لاپلاس

$$F(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

و تبدیل فوریه‌ی

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}f(x)dx$$

نیز نمونه‌هایی از معادلات انتگرال منفرد هستند.

بدون کاستن از کلیت و برای نمادگذاری ساده‌تر، دامنه‌ی متغیرهای مستقل را می‌توان طوری انتخاب کرد که حد پایین انتگرال صفر باشد، در این‌صورت، معادله‌ی ولترای نوع اول به شکل

$$\int_{0}^{t}k(t,\tau,y(\tau))d\tau=0,\qquad 0\leq t\leq T,$$

خواهد بود.

۵.۱.۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

اگر برخی از مشتقات تابع مجهول نیز در معادله‌ی انتگرال حضور داشته باشند، در این صورت معادله از نوع معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل است. به عنوان مثال

$$D_{1}y(t)-\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}k(t,\tau)\big(D_{2}y(\tau)\big)d\tau=f(t),$$

یك معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل است که در آن $D_۱$ و $D_۲$ عملگرهایی هستند که قسمت دیفرانسیل را نشان می‌دهند. دسته‌بندی این معادلات مشابه معادلات انتگرال می‌باشد.

مثال ۵.۱.۱. معادله‌ی

$$y^{(۳)}(t) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} t\tau y^{(۱)}(\tau)d\tau = sin(t) - t$$

یك معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل خطی فردهلم است و

$$y^{(۲)}(t) + ty^{(۱)}(t) - \int_{۰}^{t} e^{t-\tau} y(\tau)d\tau = t^{۲} + ۱$$

یك معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل ولترا است.

۲.۱ معادلات انتگرال ولترا

با توجه به هدف اصلی این پایان‌نامه، در این بخش به بررسی بیشتر معادلات انتگرال ولترا می‌پردازیم و قضایای وجود و منحصربفردی جواب معادلات انتگرال ولترا را بررسی می‌کنیم، در ادامه روش‌های حل معادلات انتگرال ولترای خطی و معادلات انتگرال ولترای غیرخطی را ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۱ قضایای وجود و منحصربفردی جواب معادلات انتگرال ولترا

قضایای زیر شرایط لازم برای وجود و یکتایی جواب معادله‌ی انتگرال ولترای خطی و غیرخطی را بیان می‌کنند.

قضیه ۱.۲.۱. [۲۲] *برای معادله‌ی انتگرال خطی ولترا به‌صورت*

$$y(t) - \int_{۰}^{t} k(t,\tau)y(\tau)d\tau = g(t), \qquad (۳.۱)$$

فرض کنیم توابع $k(t,\tau)$ و $g(t)$ به ترتیب روی $۰ \leq \tau \leq t \leq T$ و $[۰,T]$ پیوسته باشند، در این‌صورت معادله‌ی انتگرال (۳.۱) برای $۰ \leq t \leq T$ دارای جواب پیوسته‌ی یکتاست.

برهان. برای اثبات وجود و منحصربفردی جواب معادله‌ی انتگرال (۳.۱) از روش پیکارد استفاده می‌کنیم. این روش شامل تکرار ساده‌ی

$$y_n(t) = g(t) + \int_0^t k(t,\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{۴.۱}$$

با

$$y_0(t) = g(t)$$

است. به منظور سادگی، معرفی می‌کنیم

$$\phi_0(t) = g(t)$$

و

$$\phi_n(t) = y_n(t) - y_{n-1}(t), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{۵.۱}$$

با جایگذاری از رابطه‌ی (۴.۱) در (۵.۱) داریم

$$\phi_n(t) = g(t) + \int_0^t k(t,\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau - g(t) - \int_0^t k(t,\tau) y_{n-2}(\tau) d\tau.$$

بنابراین

$$\phi_n(t) = \int_0^t k(t,\tau) \phi_{n-1}(\tau) d\tau, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{۶.۱}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۵.۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
&\phi_0(t) + \phi_1(t) + \phi_2(t) + \ldots + \phi_{n-1}(t) + \phi_n(t) \\
&= g(t) + y_1(t) - y_0(t) + y_2(t) - y_1(t) + \ldots + y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) + y_n(t) - y_{n-1}(t) \\
&= y_n(t).
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$y_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \phi_i(t). \tag{۷.۱}$$

حال برای اثبات قضیه، G و K را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$|g(t)| \leq G, \qquad \circ \leq t \leq T,$$

$$|k(t,\tau)| \leq K, \quad \circ \leq \tau \leq t \leq T.$$

در ابتدا نامساوی

$$\phi_n(t) \leq \frac{G(Kt)^n}{n!}, \quad \circ \leq t \leq T, \quad n = \circ, ۱, \ldots, \tag{۸.۱}$$

را معرفی می‌کنیم و به استقرا نشان می‌دهیم که این نامساوی برقرار است. با فرض $n = \circ$ داریم

$$\phi_\circ(t) \leq \frac{G(Kt)^\circ}{\circ!}, \quad \circ \leq t \leq T, \quad n = \circ, ۱, \ldots.$$

این نامساوی برقرار است، زیرا از فرض داریم

$$g(t) \leq G.$$

از طرفی چون $\phi_\circ(t) = g(t)$ در نتیجه

$$\phi_\circ(t) \leq G.$$

حال فرض کنیم این نامساوی برای $n - ۱$ برقرار باشد

$$\phi_{n-۱}(t) \leq \frac{G(Kt)^{n-۱}}{(n-۱)!}, \quad \circ \leq t \leq T, \quad n = \circ, ۱, \ldots,$$

ثابت می‌کنیم برای n نیز برقرار است.

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \int_\circ^t k(t,\tau)\phi_{n-۱}(\tau)d\tau \leq \int_\circ^t k(t,\tau)\frac{G(K\tau)^{n-۱}}{(n-۱)!}d\tau \\
&= \frac{G(K)^{n-۱}}{(n-۱)!}\int_\circ^t k(t,\tau)(\tau)^{n-۱}d\tau \leq \frac{G(K)^n}{(n-۱)!}\int_\circ^t (\tau)^{n-۱}d\tau \\
&= \frac{GK^n t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

با توجه به کران (۸.۱) واضح است که $y_n(t)$ در عبارت (۷.۱) همگراست، در نتیجه

$$y(t) = \sum_{i=\circ}^{\infty} \phi_i(t). \tag{۹.۱}$$

حال ثابت می‌کنیم (۹.۱) در معادله‌ی (۳.۱) صدق می‌کند. با توجه به اینکه در عبارت (۹.۱) هریک از جملات $\phi_i(t)$ با $\frac{G(Kt)^i}{i!}$ کراندار هستند، پس سری (۹.۱) به‌طور یکنواخت همگرا است، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$g(t)+\int_۰^t\sum_{i=۰}^{\infty}k(t,\tau)\phi_i(\tau)d\tau=g(t)+\sum_{i=۰}^{\infty}\int_۰^t k(t,\tau)\phi_i(\tau)d\tau$$

از (۶.۱) داریم

$$\begin{aligned} g(t)+\sum_{i=۰}^{\infty}\int_۰^t k(t,\tau)\phi_i(\tau)d\tau &= g(t)+\sum_{i=۰}^{\infty}\phi_{i+۱}(t)\\ &= g(t)+\sum_{i=۱}^{\infty}\phi_i(t)\\ &= \sum_{i=۰}^{\infty}\phi_i(t). \end{aligned}$$

در نتیجه $y(t)$ که توسط (۹.۱) تعریف شد در معادله‌ی (۳.۱) صدق کرد. واضح است که هر یک از ϕ_iها پیوسته هستند، $y(t)$ حد دنباله‌ای از توابع پیوسته است و به‌طور یکنواخت همگراست، در نتیجه $y(t)$ نیز پیوسته است.

حال ثابت می‌کنیم $y(t)$ یکتاست. فرض کنیم تابع دیگری مانند $\overline{y}(t)$ موجود است به طوری که جواب معادله‌ی (۳.۱) می‌باشد، در این صورت

$$y(t)-\overline{y}(t)=g(t)+\int_۰^t k(t,\tau)y(\tau)d\tau-g(t)-\int_۰^t k(t,\tau)\overline{y}(t)d\tau,$$

$$y(t)-\overline{y}(t)=\int_۰^t k(t,\tau)(y(t)-\overline{y}(t))d\tau. \qquad (۱۰.۱)$$

چون $y(t)$ و $\overline{y}(t)$ هر دو پیوسته هستند، در نتیجه ثابت B چنان موجود است که

$$|y(t)-\overline{y}(t)|\le B, \qquad ۰\le t\le T.$$

این عبارت را در (۱۰.۱) جایگذاری می‌کنیم

$$|y(t)-\overline{y}(t)|=|\int_۰^t k(t,\tau)(y(t)-\overline{y}(t))d\tau|\le BKt, \quad ۰\le t\le T,$$

با تکرار این گام به ازای n دلخواه نتیجه می‌گیریم

$$|y(t)-\overline{y}(t)| \leq \frac{B(Kt)^n}{n!}, \quad ۰ \leq t \leq T.$$

برای n های به حد کافی بزرگ، طرف راست این عبارت به‌طور دلخواه کوچک می‌شود، در نتیجه باید

$$y(t)=\overline{y}(t), \quad ۰ \leq t \leq T,$$

پس فقط یک جواب پیوسته موجود است.

□

قضیه ۲.۲.۱. *اگر در معادله‌ی انتگرال ولترای غیرخطی*

$$y(t)-\int_۰^t k(t,\tau,y(\tau))d\tau = g(t) \qquad (۱۱.۱)$$

توابع $g(t)$ و $k(t,\tau,u)$ در فواصل $۰ \leq \tau \leq t \leq T$ و $-\infty \leq u \leq +\infty$ پیوسته باشند و هسته نیز نسبت به مولفه‌ی سوم در شرط لیپ شیتس صدق کند، یعنی

$$|k(t,\tau,y_۱)-k(t,\tau,y_۲)| \leq L|y_۱-y_۲|, \quad \forall ۰ \leq \tau \leq t \leq T,$$

(ضریب L مستقل از $y_۱$، $y_۱$، t و τ است)، آنگاه (۱۱.۱) برای هر T متناهی دارای جواب منحصربفرد است.

برهان. ر.ک. [۲۲]. □

۲.۲.۱ روش‌های حل معادلات انتگرال ولترا

در این بخش دو روش هسته‌ی حلال و هسته تباهیده را برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی بررسی می‌کنیم. برای مطالعه‌ی روش‌های هسته‌ی حلال و هسته تباهیده برای حل معادلات انتگرال ولترای غیرخطی به [۵] مراجعه کنید.

روش هسته حلال [۱]

جواب معادله‌ی انتگرال ولترای خطی نوع دوم

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_a^t k(t,\tau) y(\tau) d\tau \qquad (۱۲.۱)$$

اغلب به صورت انتگرال

$$y(t) = g(t) + \lambda \int_a^t \Gamma(t,\tau;\lambda) g(\tau) d\tau \qquad (۱۳.۱)$$

ظاهر می‌شود که در آن $\Gamma(t,\tau;\lambda)$ هسته‌ی حلال معادله‌ی انتگرال (۱۲.۱) نامیده می‌شود. زمانی که $k(t,\tau)$ و $g(t)$ در عبارت (۱۲.۱) پیوسته باشند، هسته‌ی حلال $\Gamma(t,\tau;\lambda)$ برای معادله‌ی انتگرال (۱۲.۱) با استفاده از سری نیومن [۲]

$$\Gamma(t,\tau;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(t,\tau) \qquad (۱۴.۱)$$

ساخته می‌شود که $k_{n+1}(t,\tau)$، هسته‌ی تکراری است و به صورت

$$\begin{aligned} k_{n+1}(t,\tau) &= \int_\tau^t k(t,u) k_n(u,\tau) du, \\ k_1(t,\tau) &\equiv k(t,\tau) \end{aligned} \qquad (۱۵.۱)$$

محاسبه می‌شود.

قضیه ۳.۲.۱. *معادله‌ی انتگرال ولترای (۱۲.۱) که $g(t)$ در بازه‌ی $[a,b]$ و هسته‌ی $k(t,\tau)$ در مثلث $a \leq t \leq b$ و $a \leq \tau \leq t$ انتگرال‌پذیر می‌باشند، دارای جواب کراندار و یکتای $y(t)$ به صورت (۱۳.۱) است که در آن هسته‌ی حلال $\Gamma(t,\tau;\lambda)$ با سری نامتناهی (۱۴.۱) نمایش داده می‌شود، که این سری برای همه‌ی مقادیر λ همگراست.*

برهان. ر. ک. [۱۹]. □

---
[۱] Resolvent kernel
[۲] Neumann