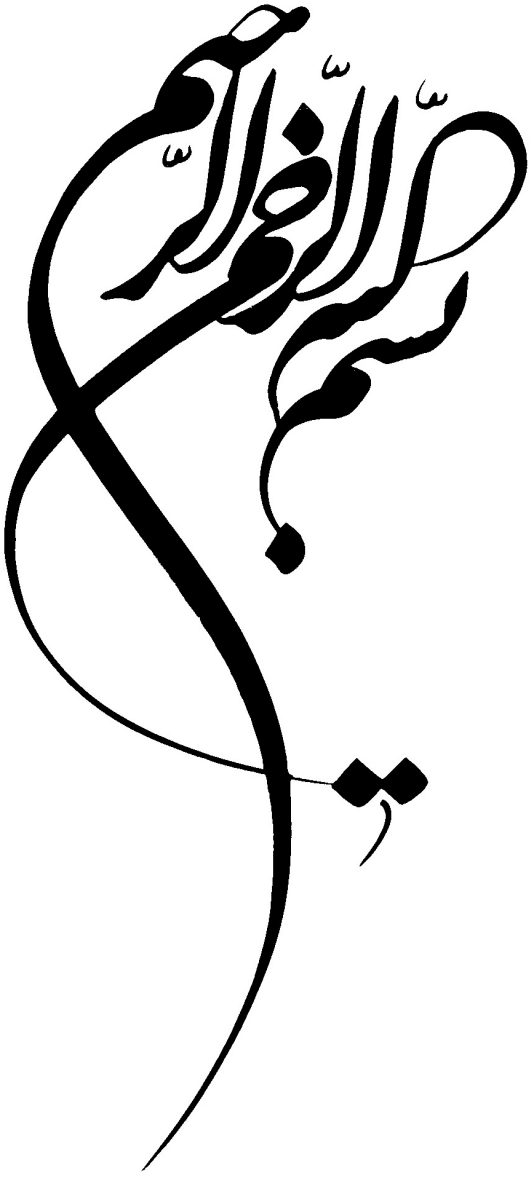
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی دکتری رشته‌ی ریاضی گرایش بهینه‌سازی

شرایط کان–تاکر قوی برای مسایل بهینه‌سازی غیرهموار چندهدفه

استاد/استادان راهنما:

دکتر صغری نوبختیان

استاد/استادان مشاور:

دکتر محمدرضا پوریای‌ولی

پژوهشگر:

محمد گلستانی

خرداد ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکـارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع ایـن پایـان نامـه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض گرایش آنالیز (بهینه سازی) آقای محمد گلستانی

تحت عنوان:

شرایط کان تاکر قوی برای مسائل بهینه سازی غیر هموار چند هدفه

در تاریخ ...۹۱/۳/۳..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه .....عالی..... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر نوشین موحدیان عطار	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۵- استاد داور خارج گروه	دکتر نظام الدین مهدوی امیری	با مرتبه علمی استاد	امضاء

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

مهر و امضای مدیر گروه .....

تقدیر و تشکر:

خداوندا نه زبان شکر تو را دارم و و نه توان تشکر از بندگان تو، اما بر حسب وظیفه برخود واجب می‌دانم از کلیه کسانی که در تحقق و تدوین کوچک‌ترین ثمره تحصیلم مشوق و همراه من بوده‌اند، خاضعانه سپاسگزاری نمایم. صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را به استاد گرامی سرکار خانم دکتر نوبختیان تقدیم نموده که در راه تحقق این اثر، همواره از راهنمایی‌ها و مساعدت‌های ایشان بهره بردم. از جناب آقای دکتر پوریای‌ولی که مشاوره‌ی این رساله را برعهده داشتند صمیمانه متشکرم.

از داوران گرامی‌ام که علی رغم مشغله‌های متعدد با صرف وقت زیاد و دقت در مطالعه‌ی این پایان‌نامه، زحمات زیادی را متقبل شده‌اند، سپاسگزاری می نمایم.

از کلیه دانشجویان دکترای ریاضی، به ویژه جناب آقای جزایری، و دیگر دوستان و آشنایان صمیمانه سپاسگزارم.

و در پایان از خانواده‌ی عزیزم که با تحمل دشواری‌ها، زیر سایه‌ی عشق و محبت ایشان، در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من هم‌چنان زنده باقی ماند، صمیمانه سپاسگزارم و این نیست جز جلوه‌ای از لطف و رحمت پروردگاری که از ادای شکر حتی یک نعمت او ناتوانم.

«اثری» کوچک است، خیلی کوچک و شاید هیچ!

اما به یاد عهد قدیم و رسم ادب

تقدیم می‌شود به خانواده‌ام

با عشق

چکیده

در این رساله شرایط بهینگی کان–تاکر قوی را بررسی می‌کنیم. در حالتی‌که مسایل بهینه‌سازی به‌صورت تک‌هدفه در نظر گرفته می‌شوند، شرایط لازم کاروش–کان–تاکر طوری بیان می‌شوند که ضریب متناظر با تابع هدف مثبت باشد. برای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه این شرایط، که اینجا شرایط کان–تاکر خوانده می‌شوند، به‌گونه‌ای هستند که بردار متناظر به تابع هدف مخالف صفر است و در نتیجه ممکن است که برخی از مولفه‌های تابع هدف در مساله‌ی بهینه‌سازی اهمیت خود را از دست بدهند. برای جلوگیری از این پدیده از شرایط کان–تاکر قوی استفاده می‌کنیم که در آن همه‌ی درایه‌های بردار متناظر به تابع هدف مقادیر مثبت دارند. برای بررسی این‌گونه شرایط، مساله‌ی بهینه‌سازی را در حالت ناهموار در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که توابعی که در مساله وجود دارند الزاماً مشتق‌پذیر و یا محدب نیستند. برای دستیابی به شرایط لازم نیازمند توصیف قیدی هستیم. از این رو، برخی از توصیف‌های قیدی متداول را به حالت ناهموار تعمیم می‌دهیم و روابط میان آنها را بررسی می‌کنیم. همچنین، از نوع تحدب تعمیم یافته توابع بهره می‌بریم و با استفاده از آنها به این پرسش پاسخ می‌دهیم که اگر یک نقطه شرایط لازم بهینگی را داشته باشد آنگاه تحت چه شرایطی این نقطه الزاماً یک نقطه‌ی بهینه است. در حالت خاص مساله‌ی دوگان متناظر با مساله‌ی اولیه را تعریف و قضایای دوگانی را بررسی می‌کنیم.

واژگان کلیدی: شرایط لازم بهینگی، شرایط کافی بهینگی، توصیف قیدی، شرایط فریتز–جان، شرایط کان–تاکر، ضرایب لاگرانژ، زیردیفرانسیل‌ها، محدب کننده‌ها، تحدب تعمیم یافته

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱

۲ مفاهیم اولیه ۱۱

۱.۲ بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی ۱۱

۱.۱.۲ بهینه‌ی پارتو ۱۷

۲.۱.۲ شرایط بهینگی مشتق‌پذیر ۲۱

۲.۲ روش‌های حل ۲۵

۱.۲.۲ روش معیار سراسری ۲۸

۲.۲.۲ روش وزن‌دهی ۲۹

۳.۲.۲ روش ε-قید ۳۰

۴.۲.۲ برنامه‌ریزی آرمانی ۳۱

۳.۲ بهینه‌سازی ناهموار ۳۲

۳ شرایط بهینگی کان-تاکر قوی ۴۶

۱.۳ بیان یک قضیه‌ی تناوبی ۴۷

۲.۳ شرایط کان-تاکر قوی ۵۴

۳.۳ شرایط کافی بهینگی ۶۴

۴.۳ دوگانی ۷۳
۱.۴.۳ دوگان ولف ۷۴
۲.۴.۳ دوگان موند–وایر ۷۵

۴ شرایط کان–تاکر قوی و محدب کننده‌ها **۷۹**
۱.۴ محدب کننده ۷۹
۲.۴ توصیف‌های قیدی ۹۲
۳.۴ شرایط کافی بهینگی ۱۰۳

نمایه **۱۰۶**

کتاب‌نامه **۱۰۹**

فصل ۱

مقدمه

تصمیم‌گیری علم انتخاب است. بهترین راه رسیدن به محل کار چیست؟ کدام پروژه باید در اولویت انجام قرار گیرد؟ بهترین فن‌آوری برای یک کاربرد خاص چیست؟ این‌ها همه نمونه‌هایی از مسایل تصمیم‌گیری هستند که به طور روزمره با آنها مواجه می‌شویم. اولین مولفه در مساله‌ی تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیرنده[۱] است. چنان‌چه چند نفر یا سازمان‌هایی در فرایند تصمیم‌گیری دخالت داشته باشند، این افراد یا سازمان‌ها ممکن است اولویت‌ها، نظرات و علایق متفاوتی داشته باشند، و خروجی فرایند تصمیم‌گیری به چگونگی درنظر گرفتن نظرات و اولویت‌های آنان بستگی خواهد داشت. ساده‌ترین نوع مساله‌ی تصمیم‌گیری، مساله‌ی بهینه‌سازی با یک تصمیم‌گیرنده است.

در کلیه‌ی مسایل تصمیم‌گیری با محدودیت‌هایی برخورد می‌کنیم که ناشی از محدودیت منابع مالی و فناوری‌های قابل استفاده و یا محدودیت‌های فیزیکی، اجتماعی و زیست‌محیطی هستند. این موارد، قیود[۲] مساله محسوب می‌شوند که مرزهای فضای

[۱] Decision Maker

[۲] Constraints

تصمیم را تشکیل می‌دهند. گزینه‌هایی که کلیه قیدها را ارضا کنند، نقاط شدنی[۳] هستند.

در فرایند تصمیم‌گیری، نیازمند معیار یا معیارهایی هستیم که میزان مناسب بودن گزینه‌ها را کمّی کند و سطح خوب یا بد بودن هر گزینه به‌وسیله مشخصات آن تعریف شود. بسیاری از این مشخصات می‌توانند به صورت توصیفی تعریف شوند، مثلاً به میزان آلودگی آب یا میزان رضایتمندی مشتریان در قبال خرید از یک فروشگاه می‌توان اشاره کرد. در مدلسازی ریاضی، این مشخصات باید قابل کمّی شدن باشند تا بتوان به صورت عددی میزان خوب یا بد بودن هر گزینه را نشان داد. این مقادیر کمّی، معیارها[۴] هستند. اگر تنها یک معیار مورد توجه قرار گیرد، آنگاه مساله‌ی بهینه‌سازی تک معیاره در دست است. در مساله‌ی بهینه‌سازی چندمعیاره، تصمیم‌گیری بر اساس چند معیار صورت می‌گیرد که اثر ترکیبی آنها معمولاً در قالب یک تابع ریاضی کمّی می‌شود که به آن تابع هدف یا تابع ارزیابی گویند.

بیشتر مسایل بهینه‌سازی در جهان واقعی چند هدفه هستند که معمولاً هدف‌ها در تضاد با یکدیگر قرار می‌گیرند. یافتن یک «پاسخ بهینه» در این موارد معمولاً امکان‌پذیر نیست. در این مسایل، سعی بر یافتن مجموعه‌ای از جواب‌ها است که توازنی نسبی را بین هدف‌های مختلف برقرار کند. به این پاسخ‌ها، جواب‌های متعادل[۵] یا متوازن گویند که تصمیم‌گیرنده می‌تواند برحسب شرایط مساله یکی از آنها را برگزیند.

در یک مساله‌ی دوهدفه پاسخی بهینه در نظر گرفته می‌شود که در هر یک از هدف‌ها از بقیه‌ی جواب‌ها بدتر نباشد و حداقل در یکی از آنها، بهتر از سایر جواب‌ها باشد. جواب بهینه، جوابی است که در مقایسه با هیچ جواب دیگری در فضای تصمیم

[۳] Feasible

[۴] Criteria

[۵] Trade-offs

مساله، مغلوب[۶] نباشد. به چنین جواب بهینه‌ای، جواب «بهینه‌ی پارتو»[۷] گویند و مجموعه‌ی این جواب‌ها در یک مساله‌ی چندهدفه، مجموعه‌ی بهینه‌ی پارتو نامیده می‌شود. هرچند روش‌های مختلفی برای حل مسایل چندهدفه پیشنهاد شده‌اند، هدف همه‌ی این روش‌ها، یافتن مجموعه‌ی بهینه‌ی پارتو است.

برنامه‌ریزی چندهدفه برای رده‌ی گسترده‌ای از مسایل در هر دو رده از مسایل خصوصی و اجتماعی قابل استفاده است. زندگی هر یک از ما با مسایل چندهدفه روزمره توام است. تصمیم‌گیری‌ها معمولاً در موقعیت‌هایی با اهداف ناسازگار انجام می‌شوند، مثلاً من برای رفت و آمد از ماشین شخصی استفاده کنم یا از اتوبوس؟ اتوبوس ارزان‌تر است (زمانی‌که هزینه سوخت، نگهداری و بیمه برای ماشین محاسبه شود)، اما ماشین شخصی راحت‌تر است (به‌طور ویژه، در زمان بازگشت از محل کار برای خرید می‌توان توقف کرد). با اتوبوس در مصرف انرژی صرفه‌جویی می‌شود، اما در ماشین شخصی می‌توان به رادیو و یا نوار گوش داد. احتمالاً شرایط و هدف‌های دیگری، علاوه بر هزینه، راحتی و محاسبه انرژی در انتخاب بین ماشین و اتوبوس وجود دارند. مطلبی که وجود دارد اینست که اینجا یک مقیاس منحصر به‌فرد، مثلاً پول، وجود ندارد که بهترین باشد. در عوض، چندین مقیاس و هدف با درجه‌ی اهمیت متفاوت وجود دارند و تصمیم‌گیری نیازمند آنست که تصمیم‌گیرنده به وضوح اهمیت نسبی اهداف را مشخص کند. مسایلی از این دست بسیارند.

به‌عنوان مثالی کامل‌تر، نمونه‌ای از مسایل سرمایه‌گذاری در جامعه را بیان می‌کنیم. این مسایل توجه بسیاری از تحلیل‌گران را به خود جلب کرده است. برنامه‌ریزی منابع آب از جمله مسایلی در این زمینه است و می‌توان از مارگلین[۴۸، ۴۹] و میجر[۴۴] به‌عنوان مبتکران توسعه تحلیل چندهدفه نام برد.

[۶] Dominated

[۷] Pareto Optimal

هیل[۲۶] در کار ارزشمند خود در زمینه نقشه حمل و نقل شهری چهارده هدف را بیان کرده است. از جمله‌ی این اهداف می‌توان کاهش آلودگی هوا، سر و صدا و تصادفات، و افزایش کارایی مالیاتی و دسترسی بیشتر به یک توزیع عادلانه را نام برد. این شش هدف با یکدیگر در تضادند و روش روشنی برای تجمیع این هدف‌ها در یک مقیاس مالی وجود ندارد. برای مثال، یک مسیر مستقیم با استفاده از بزرگراه شهری معمولاً میزان دسترسی (از لحاظ زمان سفر) و کارایی مالیاتی را حداکثر می‌کند اما باعث افزایش ضریب آلودگی هوا و سر و صدا می‌شود. از طرفی دیگر، مسیر کمربندی ضریب آلودگی هوا و میزان سر و صدا را کاهش می‌دهد، اما زمان سفر را افزایش می‌دهد.

با وجود این هدف‌های متضاد کدام مسیر بهتر است؟ تصمیم‌گیری بدون یک قضاوت ارزشمند در مورد اهمیت اهداف، شدنی نیست. اختصاص سهمیه‌های مختلف در فرایند تصمیم‌گیری معمولاً موجب ارزشمند شدن اهمیت هدف‌های مختلف می‌شود. در برخی از موارد، تصمیم در مورد هدف‌های متضاد معمولاً نیازمند در نظر گرفتن مسایل سیاسی است. این درست نیست که برنامه‌ریز تنها یکی از این هدف‌ها را مد نظر قرار دهد و یا بقیه هدف‌ها را وابسته به یک هدف در نظر بگیرد. عدم توجه به برخی از موارد باعث بروز مشکلات سیاسی اجتماعی می‌شود و احیاناً در فرایند تصمیم‌گیری تنگناهایی ایجاد می‌کند.

شروع بهینه‌سازی چندهدفه را می‌توان به کار اولیه کان و تاکر در سال ۱۹۵۱[۳۶] و کوپمنز [۳۵] نسبت داد. اکنون بهینه‌سازی چندهدفه یکی از شاخه‌های مهم در بهینه‌سازی محسوب می‌شود که مورد توجه پژوهشگران متعددی قرار گرفته است. برای آشنایی بیشتر، از مراجع [۹، ۱۳، ۲۸، ۵۸، ۷۲، ۷۹] می‌توان به‌عنوان مراجعی که شرحی کلی در این زمینه را در اختیار قرار می‌دهند، نام برد. کتاب‌های قابل ملاحظه‌ی دیگر در این زمینه مراجع [۶۴، ۷۸، ۸۲، ۸۱] هستند. قسمتی از [۷۸] با تحلیل

تصمیم چندصفتی[۸] کار می‌کند. مفاهیم رفتاری بهینه‌سازی چندهدفه توسط رینگِست در [۶۵] بررسی شده‌اند، اگر چه مفاهیم نظری در کتابهای [۳۱، ۴۱] آمده‌اند.

مسایلی را که در این رساله بررسی می‌کنیم مسایلی در زمینه‌ی بهینه‌سازی چندهدفه‌ی غیرخطی هستند. بررسی مطالبی از این دست از اهمیت بالایی برخوردار است. یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه‌ی غیرخطی، مساله‌ی است که در آن حداقل یکی از توابع هدف و یا قیود غیرخطی باشد. برای آشنایی مختصر با مسایلی از این دست و الگوریتم‌های مورد استفاده در این‌گونه مسایل به مرجع [۵۳] مراجعه کنید.

این رساله به شرایط لازم و کافی در مورد مسایل بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی ناهموار، مساله‌ای غیرخطی که در آن حداقل یکی از توابع هدف و یا قیود مشتق‌پذیر و محدب نباشد، می‌پردازد و مسایل دوگان مربوط به آن را بررسی می‌کند. به این منظور، این رساله را در چهار فصل تنظیم کرده‌ایم.

فصل دوم مشتمل بر چهار بخش است. در بخش اول مقدماتی در مورد مسایل بهینه‌سازی چندهدفه را بیان می‌کنیم. بهینه‌سازی چندهدفه را تشریح و اهمیت آن را بررسی می‌کنیم و با مثال‌هایی، کاربردهایی از آن را در دنیای واقعی نشان می‌دهیم.

در بخش دوم این فصل بهینه‌سازی چندهدفه غیرخطی را معرفی می‌کنیم و یکی از مهم‌ترین تعریف‌های مرتبط را که همان بهینگی پارتو است، می‌آوریم. شرایط لازم فریتز-جان و کان-تاکر را وقتی توابع مشتق‌پذیر هستند، بیان می‌کنیم.

در بخش سوم، برای آشنایی با روش‌های حل مسایل بهینه‌سازی چندهدفه، چند روش را برای حل این مسایل بررسی می‌کنیم.

بخش چهارم شامل تعاریف و مفاهیمی از بهینه‌سازی ناهموار است که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌شود. در فصل دوم کوشش بر آنست که مفاهیم کلی را بیان کنیم و مفاهیم تخصصی‌تر مورد نیاز در همان فصل‌ها بیان کنیم.

[۸] Multiattribute Decision Analysis

فصل سوم برگرفته از نتایج مرجع [۲۳] است. در قسمت اول یک قضیه‌ی تناوبی را بیان و ثابت می‌کنیم. در قسمت دوم به شرایط کان-تاکر قوی می‌پردازیم.

همانند بهینه‌سازی تک‌هدفه چنان‌چه نقطه‌ای بهینه باشد، آنگاه ضرایبی نامنفی که همگی صفر نیستند وجود دارند که در شرایط فریتز-جان صدق می‌کنند. هم‌چنین، می‌دانیم که با استفاده از توصیف قیدی می‌توان شرایطی را به‌دست آورد که در آن بردار ضریب متناظر با تابع هدف ناصفر باشد و این تضمین می‌کند که تابع هدف نیز در شرایط بهینه‌سازی نقش فعالی داشته باشد. به شرطی که ناصفر بودن بردار متناظر به تابع هدف را تضمین می‌کند، شرط کان-تاکر می‌گویند. در این‌گونه شرایط ممکن است که برخی از مولفه‌های بردار متناظر به تابع هدف برابر صفر باشند و این بدین معنی است که این مولفه‌ها در بهینه‌سازی نقشی ندارند. برای این‌که این پدیده رخ ندهد، نیازمند شرایطی هستیم که در آن همه‌ی درایه‌های بردار متناظر به تابع هدف مثبت باشند. به چنین شرایطی، شرایط کان-تاکر قوی گویند. این شرایط تضمین می‌کنند تا همه‌ی درایه‌های تابع هدف در مسایل بهینه‌سازی نقشی فعال داشته باشند.

برای به‌دست آوردن شرایط کان-تاکر قوی ما نیازمند توصیف‌های قیدی و یا شرایط منظم بودن هستیم. با توجه به اهمیت توصیف‌های قیدی، این موضوع هدف بررسی محققان با دیدگاه‌های مختلف بوده است؛ از آن جمله می‌توان به [۳، ۳۷، ۴۶، ۷۶] اشاره کرد.

اما در مورد شرایط کان-تاکر قوی باید حالت‌های تعمیم یافته این‌گونه قیود را در نظر بگیریم. در این راستا، مائدا[۴۳] یک مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را با توابعی مشتق‌پذیر بررسی کرد که در آن ناحیه‌ی شدنی با قیود نامساوی مشخص شده بود. او برای به‌دست آوردن شرایط کان-تاکر قوی توصیف قیدی گیگنارد را تعریف کرد و شرایط را در یک نقطه‌ی بهینه‌ی پارتو با استفاده از این توصیف قیدی به‌دست آورد.

پردا و چیتسکو در [۶۲] نتایج به‌دست آمده توسط مائدا را به حالتی توسعه دادند

که توابع مورد بررسی شبه‌محدب هستند و مشتق جهتی دارند. اگرچه با توجه به فرض شبه‌محدب و شبه‌مقعر بودن تابع هدف و محدب و مقعر بودن نیم‌مشتقات شرط لازم به‌دست آمده توسط آنها بسیار محدود کننده بود.

بیگی و پاپالاردو [۴] اهمیت شرایط کان–تاکر قوی را یادآور شدند. آنها چهار دسته از مسایل را در نظر گرفتند، دو دسته آنهایی بودند که در آنها حداقل یکی از درایه‌های بردار متناظر به تابع هدف مثبت است. این‌گونه مسایل را مسایل منظم[۹] نامیدند. دو دسته‌ی دیگر مسایلی بودند که همه‌ی درایه‌های بردار متناظر به تابع هدف مثبت باشند. این دسته از مسایل را نیز مسایل کاملاً منظم [۱۰] خواندند. آنها این شرایط را بر حسب مشتق دینی بالایی بیان کردند. هم‌چنین فرض کردند که بردار مشتق دینی دارای نوعی تحدب باشد. آنها این رده‌ها را با چند توصیف قیدی مربوط ساختند.

لی [۳۷] یک مساله‌ی بهینه‌سازی را در نظر گرفت که در آن ناحیه‌ی شدنی تنها با قیدنامساوی تعریف شده بود و فرض کرده بود که توابعی که در این مساله هستند موضعاً لیپ‌شیتز باشند. او شرایط کان–تاکر قوی را تحت توصیف قیدی ابادی تعمیم یافته براساس زیردیفرانسیل کلارک به‌دست آورد. لازم به ذکر است که او در کار خود فرض کرده بود که زیردیفرانسیل کلارک درایه‌های بردار هدف و قیود چند وجهی باشند.

لی و ژانگ [۳۸] یک مساله‌ی بهینه‌سازی با قیود نامساوی را در نظر گرفتند و شرایط کان–تاکر قوی در نقطه‌ی بهینه را بر اساس محدب کننده‌ی [۱۱] بالایی به‌دست آوردند. آنها برای به‌دست آوردن این شرایط مجبور شدند درایه‌های بردار هدف را به‌طور جهتی مشتق‌پذیر در نظر بگیرند. هم‌چنین، مشتق جهتی بر روی درایه‌ی دوم

[۹] Regular Problem

[۱۰] Totally Regular Problem

[۱۱] Convexificator

برای یکی از درایه‌ها خطی و برای بقیه‌ی درایه‌ها زیرخطی باشند، و مشتق دینی پائینی برای قیود نامساوی زیرخطی در نظر گرفته شوند.

گیورگی و همکاران در [۲۲] مطالب بیان شده در [۳۷] را با تعمیم ناحیه‌ی شدنی به قیود تساوی و یک قیدمجموعه‌ای تعمیم دادند. آنها فرض کردند که قیود تساوی فرشه مشتق‌پذیر هستند و شرایط کان-تاکر قوی را تحت توصیف قیدی گیگنارد تعمیم یافته بیان کردند.

در ادامه‌ی این فصل مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را به‌صورت مساله‌ای با قیود تساوی و نامساوی و یک قید مجموعه‌ای در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که توابع موضعاً لیپ‌شیتز هستند. برای بررسی شرایط کان-تاکر قوی از قضیه‌ی تفکیک‌پذیری که در ابتدای فصل بیان و ثابت شده است، استفاده می‌کنیم. هم‌چنین، برای دست‌یابی به شرایط کان-تاکر قوی توصیف قیدی ابادی را، که در [۱] بیان شده است، در حالت ناهموار تعمیم می‌دهیم. سپس، با استفاده از این توصیف قیدی شرایط کان-تاکر قوی را بر اساس زیردیفرانسیل کلارک بیان و ثابت می‌کنیم.

در ادامه، توصیف قیدی مانگاساریان-فرومویتز را[۴۷]، که توسط پاپالاردو [۵۹] در حالت غیرمشتق‌پذیر بیان شده است، به مسایلی با قیدمجموعه‌ای تعمیم می‌دهیم و شرایط کان-تاکر قوی را برای یک نقطه‌ی بهینه‌ی پارتوی ضعیف بیان و ثابت می‌کنیم.

هم‌چنین، پس از یادآوری چندنمونه از مسایل تحدب تعمیم یافته، شرایط کافی بهینگی را بیان و ثابت می‌کنیم.

در ادامه، با استفاده از مفهوم زیردیفرانسیل کلارک دو نمونه از مسایل دوگان را که معروف به دوگان ولف و موند-وایر، هستند برای مساله‌ی اولیه بیان و قضایای دوگانی ضعیف و وقوی را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر یک نقطه بهینه باشد، آنگاه در صورت وجود شرایط تحدب مناسب، آن نقطه می‌تواند یک نقطه‌ی بهینه برای مساله‌ی دوگان باشد.

در فصل چهارم، که برگرفته از مراجع [۲۴، ۲۵] است، شرایط لازم بهینگی را بر اساس محدب کننده‌ها بیان می‌کنیم.

مفهوم محدب کننده توسط دمیانف [۱۶] معرفی شد و بعداً توسط جیاکومار و لوک [۳۲] و دوباره توسط همین نویسندگان در [۳۳] بیشتر تعمیم یافت.

وقتی توابع محدب هستند، زیردیفرانسیل محدب یک محدب کننده است. برای توابع موضعاً لیپ‌شیتز زیردیفرانسیل‌هایی که معمولاً در بهینه‌سازی استفاده می‌شوند نیز نمونه‌هایی از محدب کننده‌ها هستند. البته، می‌توان نشان داد که محدب کننده‌هایی هستند که حتی پوش محدب آنها اکیداً از مجموعه‌ی تولید شده توسط زیردیفرانسیل‌های معمولی کوچک‌تر است.

در این رساله، از محدب کننده‌ی نیم-منظم بالایی استفاده کرده‌ایم. با توجه به توصیف قیدی ابادی، که بر مبتنی بر محدب کننده تعمیم داده شده است، شرایط کان-تاکر قوی را بر حسب محدب کننده‌ی نیم-منظم بالایی بیان و ثابت می‌کنیم. لازم به ذکر است که در اثباتی که ارائه داده‌ایم، بر خلاف [۳۸]، از هیچ‌گونه خاصیت تحدب در مورد مشتق دینی استفاده نشده است.

در [۲۴] ابتدا توصیف قیدی مانگاساریان-فرومویتز را توسط محدب کننده‌ی نیم-منظم تعمیم داده‌ایم و شرایط کان-تاکر قوی را با استفاده از فرضیاتی کمتر از آنچه که در [۲۵] آمده است، بیان و ثابت کردیم.

در این رساله نشان دادیم که اگر قیدمجموعه‌ای را حذف کنیم، آنگاه می‌توان شرایط کان-تاکر قوی را تحت توصیف قیدی ابادی با فرضیاتی کمتر بیان کرد.

هم‌چنین، با استفاده از چند مثال نشان می‌دهیم که شرایطی که با استفاده از آنها شرایط کان-تاکر قوی را بیان کرده‌ایم، کمینه است و نمی‌توان قضیه را تحت شرایطی کمتر بیان کرد.

در مرجع [۲۵] تعدادی از توصیف‌های قیدی شناخته شده کان-تاکر، زنگویل،

اساسی و مستقل خطی را با استفاده از مفهوم محدب کننده‌ی نیم-منظم بالایی تعمیم دادیم و رابطه‌ی بین آنها را بررسی کردیم و نشان دادیم که توصیف قیدی ابادی در میان این قیود از همه ضعیف‌تر است.

در ادامه، با استفاده از مطالبی که در مرجع [۲۴] آمده‌اند، شرایطی کافی را برای مساله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه برحسب محدب کننده‌های نیم-منظم بالایی بیان می‌کنیم.