بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

عنوان پایان نامه

معادلات ساختاری و تانسورهای مختلف روی منیفلدهای مختلط فینسلری

استاد راهنما

آقای دکترمرتضی میر محمد رضایی

استاد مشاور

آقای دکتربهروز بید آباد

نگارش

حامد فرجی

مهر ۱۳۸۶

بسمه تعالي

دانشگاه صنعتي امير كبير
معاونت پژوهشی

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا
(پلي تكنيك تهران)

تاریخ :
پیوست :

نام و نام خانوادگی :حامد فرجی

دانشجوی آزاد ☒ بورسیه ☐ معادل ☐

شمارۀ دانشجوئی : 84113023 **دانشکده :** رياضي و علوم كامپيوتر **رشتۀ تحصیلی :** ریاضی

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر مرتضی میر محمد رضایی

عنوان پایان نامه به فارسی: معادلات ساختاری و تانسور های مختلف روی منیفلد های مختلط فینسلری

عنوان پایان نامه به انکلیسی: The Structure Equations and various tensors of a Complex Finsler manifold

نوع پروژه : کارشناسی ارشد : ☒ دکتـــــری ☐

کاربردی ☐ بنیادی ☒ توسعه ای ☐ نظری ☐

تاریخ شروع : اسفند ۸۵ **تاریخ خاتمه :** مهر ۸۶ **تعداد واحد :** ۶

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلیدی به فارسی : متریک های فینسلر مختلط ، متر یک های کوبایاشی ، التصاق هرمیتی

واژه های کلیدی به انگلیسی : Complex Finsler metrics, Kobayashi metrics,Hermitian connection.

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیتهای پژوهشی دانشگاه :

استاد راهنما : دکتر مرتضی میر محمد رضایی

دانشجو :

امضاء استاد راهنما : **تاریخ :**

نسخة ١ : معاونت پژوهشي
نسخة ٢: كتابخانه و به انضمام دوجلد پايان نامه به منظور تسويه حساب با كتابخانه و مركز اسناد و مدارك علمي

چکیده

در این پایان نامه مفهوم متر فینسلر و التصاق تحت این متر را روی منیفلد های مختلط مورد بررسی قرار گرفته شده و این التصاق با التصاق از نوع (۱,۰) ـسازگار روی منیفلد هرمیتی مقایسه‌می شود . سپس برای یک منیفلد مختلط فینسلری قویاً شبه محدب M ، کلاف شناخته شده قاب های یکه وابسته شده $U_F(M)$ ارائه می شود . التصاق غیر خطی‌ای روی $U_F(M)$ موجود است که، تحت ایزومتری های دو تحلیلی پایا و منحصر به فرداست.در پایان معادلات ساختاری را برای منیفلد مختلط فینسلری بیان می شود.

عناوین مقاله هایی که مورد بررسی قرار داده شده اند به شرح زیر است.

1)$THE\ STRUCTURE\ EQUATIONS\ OF\ A\ COMPLEX\ FINSLER\ MANIFOLD$
$(A.SPIRO\ 2001\ ASIAN\ J.MATH)$

2)$CONNECTIONS\ ON\ COMPLEX\ FINSLER\ MANIFOLDS$
$(RONGMU\ YAN{-}2003SPRINGER)$

کلمات کلیدی: کلاف اصلی ، منیفلد های فینسلری مختلط ،اسکالر های بروالد

فهرست مطالب

مقدمه

یک متریک فینسلر روی یک منیفلد یا یک کلاف برداری ، عبارت است از یک نرم باناخ روی فضای مماس در هر نقطه یا فضای تار در آن نقطه منیفلد. چنانچه متریک ریمانی باشد این نرم اقلیدسی خواهد بود. لذا کلاس متریک های فینسلری شامل متریک های ریمانی می باشد.در واقع تفاوت این دو هندسه ، در این است که در هندسه ریمان فرض بر این است که طول خم ها مستقل از جهت آنهاست ولی در هندسه فینسلر چنین نیست.یعنی برای یک خم دو پارامتر طول و جهت در نظر گرفته می شود.به همین دلیل هندسه فینسلر به عنوان تعمیمی از هندسه ریمانی در نظر گرفته می شود. از طرف دیگر ما می توانیم هندسه ریمانی را به صورت خاصی به هندسه فینسلری تعمیم دهیم. از یک جهت هندسه فینسلر را می توان تعمیمی از هندسه دیفرانسیل منیفلد ها در نظر گرفت.یعنی اگر یک متریک فینسلر روی کلاف برداری موجود باشد آنگاه می توان یک ضرب ریمانی روی زیر کلاف قائم از فضای کل تعریف کرد. لذا هندسه فینسلر تبدیل به هندسه این کلاف ریمانی خواهد شد. مفهوم متریک فینسلر مختلط بسیار قدیمی است و به کاراتئودوری بر می گردد که متریک کاراتئودوری را تعریف کرد.هندسه یک منیفلد فینسلر مختلط با آنالیز تانسور ها توسط **ریزا** [1] در سال ۱۹۶۳ مورد بررسی قرار گرفت و بعد از آن تئوری التصاق روی منیفلد های فینسلر مختلطتُوسط افرادی مانند **راند** [2] (در سال ۱۹۸۹)، **وانگ** [3](۲۰۰۳)و ... توسیع داده شد. اما اخیراً متریک فینسلر مختلط به موضوع قابل توجهی تبدیل شده است.مثلًا متریک کوبایاشی ، یک متریک پایای تحلیلی روی منیفلد مختلط است.با این تعریف هر متریک کوبایاشی یک متریک پیش فینسلر است.یکی از مهمترین مباحث فینسلر مختلط ، مبحث التصاق روی منیفلد های مختلط فینسلری می باشد.

در فصل اول مفاهیم پایه ای و اساسی از یک منیفلد یعنی ، گروه های لی و جبر های لی

---

[1] G.B.Rizza

[2] H.Rund

[3] P.M.Wong

را یادآوری نموده .سپس مفهوم کلاف های اصلی و به دنبال آن التصاق ها را معرفی می کنیم.زیر فضا های متعامد و زیر فضا های افقی مشتق کواریان و انتقال موازی از دیگر مفاهیمی است که در این فصل ارائه خواهد شد.

در فصل دوم برای منیفلد مختلط M ، کلاف های برداری مختلط ارائه شده است. در ادامه مختلط سازی یک فضای برداری حقیقی را تشریح و ساختار تقریباً مختلط فضای مماس M بیان می شود.متر های فینسلری قویاً شبه محدب از دیگر مفاهیم جالبی در هندسه است که برای یک منیفلد مختلط بیان و بعضی از خواص آن ارائه شده است .

در فصل سوم مفهوم قاب یکه وابسته شده از یک منیفلد مختلط (M, J) با یک متر فینسلر قویاً شبه محدب F ، پرداخته شده و زیر کلاف $U_F(M)$ از قاب های یکه وابسته شده از کلاف قاب خطی مختلط $L^{\mathbb{C}}(M)$ را در نظر می گیرند.و نامگذاری زیر را به کار می برند:

هر توزیعی که مکملی برای توزیع متعامد و از بعد معادل با بعد حقیقی M باشد ، یک التصاق غیر خطی روی $U_F(M)$ می گوییم.

فصل ۱

گروه و جبرلی والتصاق روی کلاف اصلی

در ابتدای فصل مباحث لازم و پایه ای راکه در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند ،ارائه می کنیم.گروه های لی یکی از مباحث و مفاهیم مهمی در هندسهٔ است که با کمک آن مباحث جالبی چون جبر لی از یک گروه لی و یا کلاف های اصلی بایک گروه لی را معرفی می کنیم . سپس التصاق را روی کلاف اصلی بیان و خواص مهمی از آن را ارائه مدهیم که در فصل آخر از این خواص استفاده شده است.

۱.۱ گروه لی

تعریف ۱.۱.۱ یک **گروه لی** [۱] عبارت است از منیفلد G که دارای ساختار گروهی‌است به‌طوری که‌نگاشت :

$$\begin{aligned} \theta : G \times G \to G \\ (x, y) \mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

مشتق پذیر است.

مثال ۲.۱.۱

۱)$\mathbb{R}^n$ با عمل جمع یک گروه لی است.

۲)$Gl(n, \mathbb{R})$ با عمل ضرب ماتریس ها یک گروه لی است.

۳)اگر G, H گروه لی باشند آنگاه $G \times H$ با ضرب $(g_1, h_1).(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید که G یک گروه لی باشد و $a \in G$ در اینصورت نگاشت

$$\begin{aligned} L_a : G \to G \\ x \mapsto ax \end{aligned}$$

را **انتقال چپ** [۲] توسط a گویند.به صورت مشابه نگاشت **انتقال راست** [۳]، R_a را می توان تعریف کرد.

تعریف ۴.۱.۱ اگر G یک گروه لی باشد H را یک زیر گروه لی G گویند هر گاه:

۱)H یک زیر خمینه G باشد.

۲)H یک زیر گروه G باشد.

۳)H یک گروه لی باشد.

مثال ۵.۱.۱ $Sl(n, \mathbb{R})$ گروه ماتریسهای حقیقی $n \times n$ با دترمینان ۱ یک زیر گروه لی از $Gl(n, \mathbb{R})$ می باشد.

---

[1]Lie Group

[2]Left Translation

[3]Right Translation

مثال ۶.۱.۱ U_n گروه ماتریس های مختلط $n \times n$ هرمیتی:

$$U_n = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | A\bar{A} = I^n\}$$

یک زیر گروه لی از $GL(n,\mathbb{C})$ است.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنید که H یک زیر گروه‌از گروه لی G باشد و همچنین H یک زیر گروه منیفلد نشانده شده در G باشد.در اینصورت H یک زیر گروه لی G است.

قضیهٔ ۱ − ۴ از [۲۴]

قضیه ۸.۱.۱ هر زیر گروه لی همبند لزوما یک پایه شمارا دارد.

قضیهٔ ۳ − ۵ از [۲۴]

۲.۱ جبر لی

تعریف ۱.۲.۱ یک جبر لی **جبر لی** [1] روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ عبارت است از فضای برداری حقیقی (مختلط) a به انضمام یک نگاشت دو خطی $[\ ,\ ] : a \times a \to a$ موسوم به کروشه به طوری که در دو رابطه زیر صدق کند.

۱) $[A, B] = -[B, A]$: $\qquad \forall A, B \in a$

۲) $[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0$ $\qquad \forall A, B, C \in a$

مثال ۲.۲.۱

۱) هر فضای برداری V با کروشه صفر($[\ ,\ ] = 0$) یک جبر لی است.

۲)فضای برداری $gl(n, R)$ متشکل از ماتریسهای $n \times n$ با کروشه $[A, B] = AB - BA$ ، یک جبر لی است.

۳)فضای برداری میدان های برداری روی یک منیفلد با کروشه معمولی میدان های برداری

---

[1] Lie Algebra

یک جبر لی است.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید که G یک گروه لی باشد میدان برداری X روی G را**ناوردای چپ** [1] گویند ، هر گاه به ازای هر $\forall a,b\in G \qquad L_a(X_b)=X_{ab}$

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید که G یک گروه لی باشدو $\underline{g}$ مجموعه میدان های برداری ناوردا از چپ روی آن باشد.در اینصورت:

$\underline{g}$ یک فضای برداری و نگاشت

$$\begin{array}{c} E:\underline{g}\to T_eG \\ X\mapsto X_E \end{array}$$

یکریختی خطی است. و داریم : $dimG=dimT_eG=dim\underline{g}$

قضیهٔ۳ – ۷ از[۲۴]

تعریف ۵.۲.۱ دو جبر لی $\underline{a}_۱$ و$\underline{a}_۲$ را یکریخت گوییم هرگاه یکریختی خطی $T:\underline{a}_۱\to\underline{a}_۱$ موجود باشد به طوری که‌برای هر $A,B\in\underline{a}_۲$ داشته باشیم :

$$T([A,B])=[T(A),T(B)]$$

تعریف ۶.۲.۱ جبر لی میدان های برداری ناوردا از چپ روی یک گروه لی G را **جبر لی** [2] بر گروه لی G گویند ، و با $\underline{g}$ نمایش می دهند. و ثابت شد که این جبر لی با T_eG یکریخت است.

۳.۱ کلاف تاری اصلی

تعریف ۱.۳.۱ گوییم G به طور موثر روی M ، از راست (چپ) عمل می کند هرگاه e (عنصر همانی G) تنها عضوی از G باشد به طوری که

[1] Left Invariant

[2] Lie Algebra

$$g \in G \quad \forall m \in M \qquad , \qquad m.g = m \Rightarrow g = e$$

گوییم G به طور آزاد از سمت راست (چپ) روی M عمل می کند هرگاه e تنها عضوی در G است که دارای نقطه ثابت است.

تعریف ۲.۳.۱ یک **کلاف تاری اصلی** [1] روی M با گروه لی G عبارت است از سه تایی $P(M,G)$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱)Pیک منیفلد C^∞ است (**فضای کل** [2])

۲)G به صورت آزاد از راست روی P عمل می کند.

۳)$\pi : P \to M$ یک نگاشت سوبمرسیون است (نگاشت تصویر) به روی M (منیفلد پایه) که

$$\forall u \in P, a \in G \qquad \pi(u.a) = \pi(u)$$

۴) P موضعا بدیهی است.یعنی: هر نقطه $x \in M$ یک همسایگی U دارد به طوریکه $\pi^{-1}(U)$ ایزومرفیسم با $U \times G$ است با این مفهوم که یک دیفئومرفیسم $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ وجود دارد به طوریکه $\psi(u) = (\pi^{-1}(u), \phi(u))$ که ϕ یک نگاشت از $\pi^{-1}(U)$ به درون G است به طوری که $\forall u \in \pi^{-1}(U), a \in G \phi(ua) = \phi(u).a$

برای هر $x \in M$ و $\pi^{-1}(x)$ زیر منیفلد بسته ای از P است که به آن تار روی x می گویند. اگر $u \in \pi^{-1}(x)$ باشد آنگاه $\pi^{-1}(x)$ مجموعه همه نقطه های $u.a$ است که $a \in G$.

مثال ۳.۳.۱ فرض کنید M یک منیفلد با بعد n باشد.یک قاب خطی u در یک نقطه $x \in M$ پایه مرتب شده $\{X_1, ..., X_n\}$برای فضای مماس T_xM می باشد.مجموعه همه قاب های خطی u در همه نقاط M را به وسیله $L(M)$ نمایش می دهیم.همچنین بررسی می شود که $L(M)$ یک کلاف اصلی با گروه ساختاری $GL(n, R)$ روی منیفلد M است که به آن **کلاف**

[1] Principal Fiber Bundle

[2] Total Space

قاب خطی [1] روی منیفلد M گویند.

مثال ۲.۵ از فصل اول [۱۶]

تعریف ۴.۳.۱ بنا بر تعریف کلاف اصلی ،فیبر $\pi^{-1}(x)$ از P دیفئومرفیسم با G است. اگر برای یک $u \in P$ داشته باشیم $x = \pi(u)$ و $i : \pi^{-1}(x) \to P$ نگاشت شمول باشد.آنگاه $i_*(T_u\pi^{-1}(x))$ یک زیر فضای $\mathcal{V}_u$ از T_uP است.که به آن **زیرفضای قائم** [2] در u می گویند. بردار های مماس در این زیرفضا را بردارهای مماس متعامد در u گویند.

تعریف ۵.۳.۱ یک گروه ۱−**گروه پارامتری** [3] از انتقالات دیفرانسیل پذیر از M خانواده ای از نگاشت های $\{\phi_t\}$:

$$\begin{array}{l} I\!R \times M \to M \\ (t,p) \mapsto \phi_t(p) \end{array}$$

است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱)برای هر $t \in R$ ، $\phi_t : p \mapsto \phi_t(p)$ یک دیفئومرفیسم از M است.

۲)برای هر $t, s \in R$ و $p \in M$ داریم.

$$\phi_{t+s}(p) = \phi_s(\phi_t(p))$$

هر گروه۱ پارامتری از دیفئومرفیسم های ϕ_t یک میدان برداری X را روی P به صورت زیر القاء می کند.

برای هر $p \in M$ ، X_p بردار مماس بر منحنی $x(t) = \phi_t(p)$ در $t = 0$ است.

یک گروه یک پارامتری موضعی نیز به همین شیوه تعریف می شود بجز اینکه t تنها در یک همسایگی از ۰ و p در یک هسایگی بازی از M است.

حال فرض کنید $\underline{g}$ جبر لی از گروه لی G است که از راست روی M عمل می کند.برای هر $X \in \underline{g}$ منحنی $t \to exp(tX)$ را روی G در نظر می گیریم.لذا برای هر $p \in M$ ، منحنی

---

[1] Bundel of Linear Frame

[2] Vertical Subspace

[3] 1-Parametr Group

$$C_p(t) = p.exp(tX) = R_{exp(tX)}(p)$$

روی M بدست می آید.قرار می دهیم :$C'_p(\circ) = \sigma(X)(p)$

$\sigma(X)$ یک میدان برداری روی M است .به همین خاطر نگاشت $\sigma : \underline{g} \to \chi(M)$ گروه ۱− پارامتری از دیفئومرفیسم های تولید شده توسط $\sigma(X)$ ، $\phi_t(p) = p.exp(tX)$ است. بنابراین در کلاف تاری $P(M,G)$ برای هر $X \in \underline{g}$ میدان برداری اساسی $\sigma(X)$ راروی P ایجاد می شود.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید که X یک میدان برداری روی منیفلد M باشد .یک منحنی $x(t) : [a,b] \to M$ روی M را منحنی انتگرال از X گویند هر گاه برای هر مقدار $t_\circ \in [a,b]$ ، بردار $X_{x(t_\circ)}$ ، بروی منحنی $x(t)$ در نقطه $x(t_\circ)$ مماس باشد.

گزاره ۷.۳.۱ فرض کنیدکه G از سمت راست روی M عمل کند آنگاه:

۱) نگاشت $\sigma : \underline{g} \to \chi(M)$ خطی است.

۲) $\sigma([X,Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$

۳) اگر G به طور موثر روی M عمل کند و $X \neq \circ$باشد آنگاه $\sigma \neq \circ$ است.

۴) اگر G بدون نقطه ثابت روی M عمل کند و $X \neq \circ$ باشد آنگاه $\sigma(X)$ همه جا مخالف صفر است.

گزاره۸ − ۷ − ۱ از[۲۰]

نکته ۸.۳.۱ چون نگاشت $(\forall a \in G) R_a : P \to P$ هر فیبر را به خودش می برد و A^*_u مماس بر فیبر شامل u است و با توجه به اینکه G به طور آزاد روی P عمل می کند لذا بنابر گزارهٔ قبل A^* روی P هرگز صفر نمی شود .(اگر $A \neq \circ$) از طرفی چون بُعد هر فیبر برابر با بعد g جبر لی G است لذا نگاشت $A \mapsto (A^*)_u$ از g به درون $T_u(P)$ یک ایزومرفیسم خطی از g به روی فضای مماس روی فیبری است که از u می گذرد. یعنی

$$\mathcal{V}_u = \{\sigma(X)_u | X \in g\}$$

قرارداد ۹.۳.۱ $\sigma(X) = X^* \qquad \forall X \in \underline{g}$

۴.۱ التصاق در کلاف تاری اصلی

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید که $P(M,G)$ یک کلاف تاری اصلی روی منیفلد M با گروه لی G باشد.برای هر $u \in P$ فرض کنید که T_uP فضای مماس بر P در u و V_u زیر فضای T_uP روی هر فیبر شامل u مماس باشد.

یک**التصاق**[1] Γ در P یک تخصیص دهنده زیر فضای $\mathcal{H}_u$ از T_uP به هر $u \in P$ است به طوری که:

۱) $T_uP = \mathcal{V}_u \bigoplus \mathcal{H}_u$

۲) برای هر $u \in P$ و $a \in G$ داشته باشیم:$\mathcal{H}_{ua} = (R_a)_* \mathcal{H}_u$

۳) $\mathcal{H}_u$ به‌طور دیفرانسیل پذیر به u وابسته است.

که به $\mathcal{V}_u$ **زیر فضای قائم** [2] و به $\mathcal{H}_u$ **زیر فضای افقی** [3] در T_uP می گویند.

یک بردار $X \in T_uP$ را قائم گویند اگر در $\mathcal{V}_u$ قرار گیرد.به همین ترتیب یک بردار از T_uP را افقی گویند هرگاه در $\mathcal{H}_u$ قرار گیرد. لذا برای هر بردار $X \in T_uM$ داریم:$Y \in \mathcal{V}_u, Z \in \mathcal{H}_u \quad X = Y + Z$

برای التصاق داده شده فوق ۱–فرم ω روی P با مقادیر در جبر لی $\underline{g}$ از G به صورت زیر تعریف می کنیم.

در گزاره (۷.۳.۱) دیدیم که برای هر $X \in \underline{g}$ یک میدان برداری X^* روی P القاء می کند به طوری که که نگاشت $X \mapsto \sigma(X) = X^*$ یک ایزومرفیسم خطی از $\underline{g}$ به روی $\mathcal{V}_u$ است.(برای هر $u \in P$)

تعریف ۲.۴.۱ برای هر $X \in T_uP$ ، $\omega(X)$ را برابر آن $A \in \underline{g}$ یکتایی در نظر می گیریم به طوری که $(A^*)_u$ برابر موٴلفه متعامد از X است.

---

[1] *Connection*

[2] Vertical SubSpace

[3] Horizontal SubSpace

واضح است که :$\omega(X) = 0$ اگر و فقط اگر X افقی است . فرم ω ،**فرم التصاق** [1] متناظر با التصاق Γ گویند.

گزاره ۳.۴.۱ فرم التصاق ω از التصاق Γ ، در شرایط زیر صدق می کند.

۱) $\omega(A^*) = A$ برای هر $A \in \underline{g}$

۲) $\omega((R_a)_*X) = ad(a^{-1})\omega(X)$ برای هر $a \in G$ و میدان برداری X روی P

عکس قضیه فوق نیز برقرار است .

یعنی اگر ۱-فرم $\underline{g}$ مقدار ω روی P موجود باشد که در شروط ۱و۲ صدق کند آنگاه یک التصاق یکتای Γ در P موجود است که فرم التصاق آن ω است.

مرجع: گزاره ۱ – ۱ ازفصل دوم [۱۶]

با توجه به تجزیه $T_uP = \mathcal{V}_u \bigoplus \mathcal{H}_u$ و این حقیقت که $\mathcal{V}_u$ هسته نگاشت $\pi_* : T_uP :\to T_{\pi_{(u)}}M$ است لذا یک ایزومرفیسم $\pi_* : \mathcal{H}_u :\to T_{\pi_{(u)}}M$ به ازای هر $u \in P$ بدست می‌آید .در نتیجه برای هر میدان برداری X روی M ، یک میدان برداری یکتای X^* روی P موجود است که X^* در همه جا افقی است و $\pi_*(X_u^*) = X_{\pi(u)} \quad \forall u \in P$.که به میدان برداری X^* ترفیع افقی میدان برداری X^* گویند.

گزاره ۴.۴.۱ اگر X یک میدان برداری روی M باشد آنگاه X^* یک میدان برداری روی P است که برای هر $A \in G$ داریم $(R_a)_*(X^*) = X^*$.بر عکس یعنی اگر Y یک میدان برداری روی P باشد به طوری که $(R_a)_*(Y) = Y$ برای هر $a \in G$ آنگاه برای میدان بر دار یکتای X روی M داریم:$Y = X^*$.

گزاره ۳ – ۱ از[۱۶]

گزاره ۵.۴.۱ اگر X^*, Y^* ترفیع هایی‌به ترتیب از میدانهای برداری X, Y روی M باشند آنگاه

[1] Connection Form

۱)X^*+Y^* ترفیع $X+Y$ است.

۲)اگر $f: M \to R$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه:$(fX)^* = (f\circ\pi)X^*$

۳)$h([X^*,Y^*]) = [X,Y]^*$

گزاره ۱ – ۳ از[۱۶]

تعریف ۶.۴.۱ الف) یک منحنی $\gamma: [0,1] \to P$ را**افقی** [1] گویند هرگاه همه بردار های مماس $C'(t)$ بردار های افقی باشند.

ب) اگر $C: [0,1] :\to M$ نقطه به نقطه از کلاس c^1 باشد **ترفیع** [2] C ، منحنی افقی $C^*: [0,1] \to p$ است به طوریکه $\pi\circ C^* = C$

گزاره ۷.۴.۱ فرض کنید که $C: [0,1] \to M$ یک منحنی نقطه به نقطه از کلاس C^1 باشد و $u_0 \in P$ به طوریکه $\pi(u_0) = C(0)$.آنگاه یک ترفیع یکتای C^* از C با شرط $C^*(0) = u_0$ وجود دارد.

گزاره ۷ – ۲۰ – ۸ از[۲۰]

در اینجا **انتقال موازی** [3] از یک کلاف اصلی $\pi: P \to M$ در طول منحنی $C: [0,1] \to M$ را تعریف می کنیم.

برای $u \in \pi^{-1}(C(0))$ ، $\mathcal{T}_t(u) \in \pi^{-1}(C(t))$ را برابر با $C^*(t)$ قرار می دهیم که C^* ترفیع C با شرط $C^*(0) = u_0$ است . لذا دیفئومرفیسم $\mathcal{T}_t : \pi^{-1}(C(0)) \to \pi^{-1}(C(t))$ را بدست می آوریم.که به آن انتقال موازی در کلاف P گویند.معکوس آن نیز دوباره یک انتقال موازی در طول جهت عکس C از t به ۰ است.

در حالت خاص کلاف اصلی $\pi: L(M) \to M$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.می دانیم که هر $u \in L(M)$ یک ایزومرفیسم خطی از $u: R^n \to T_xM$ است. حال فرض کنید $C: [0,1] \to M$ یک منحنی نقطه به نقطه C^1 باشد و $X_p \in TM$ یک بردار مماس بر $p = C(0)$

[1] Horizontal

[2] lift

[3] Parallel Trnslation

و $C^*:[\circ,\text{۱}]\to L(M)$ ترفیع C با شرط $C^*(\circ)=u$ باشد.لذا یک $\xi\in R^n$ یکتا وجود دارد به طوریکه $C^*(\circ)(\xi)=u(\xi)=X_p$.

قرار می دهیم :$J_t(X_p)=C^*(t)(\xi)$.لذا انتقال موازی بردارها راتعریف کردیم. برای نشان دادن خوش تعریف بودن این انتقال موازی ترفیع دیگر $\bar{C}^*$ را مورد بررسی قرار می دهیم به طوری که$\bar{C}^*=R_a\circ C^*$

آنگاه : $$X_p=C^*(\xi)=C^*(\circ)a(a^{-\text{۱}}\xi)=\bar{C}^*(\circ)(a^{-\text{۱}}\xi)$$

حال $\bar{J}_t$ را با توجه به $\bar{C}^*$ تعریف می کنیم.

$$\bar{J}_t(X_p)=\bar{C}^*(\circ)(a^{-\text{۱}}\xi)=\bar{C}^*(t).a(a.^{-\text{۱}}\xi)=C^*(t)\xi=J_t(X_p)$$

بنابراین انتقال موازی فوق خوشتعریف است.حال مشتق کواریان از میدان های برداری را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\nabla^Y_{X_p}=\lim_{h\to\circ}\frac{\text{۱}}{h}(\mathcal{T}_h^{-\text{۱}}Y_{c(h)}-Y_p)$$

که $C(\circ)=p$ و $C'(\circ)=Y_p$.

گزاره ۸.۴.۱ عملگر مشتق کواریان که در بالا تعریف شده، یک التصاق است و در شرایط زیر صدق می کند.

۱) $\nabla^Y_{(X_p+X'_p)}=\nabla^Y_{X_p}+\nabla^Y_{X'_p}$

۲) $\nabla^{(Y_\text{۱}+Y_\text{۲})}_{X_p}=\nabla^Y_{X_p}+\nabla^Y_{X_p}$

۳) $\nabla^Y_{aX_p}=a\nabla^Y_{X_p}$

۴) $\nabla^{fY}_{X_p}=f(p)\nabla^Y_{x_p}+X_p(f).Y_p$

به علاوه اگر X,Y دو میدان برداری C^∞ باشند آنگاه ∇^Y_X نیز C^∞ است.

گزاره(۱.۲) از[۲۰]

۵.۱ التصاق های خطی

کلاف قاب خطی $L(M,GL(n,I\!\!R))$ را در نظر می گیریم.برای هر زیر کلاف دلخواه $P\subset L(M)$ فرم کانونی θ از $L(M)$ ۱− فرم $I\!\!R^n$ مقدار روی $L(M)$ است که به صورت زیر