بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته زمین‌شناسی

عنوان

تخمین پارامترهای هیدرولیکی آبخوان‌های محبوس با تلفیق روش‌های کوپر- ژاکوب و رگرسیون خطی فازی اصلاح شده

استاد راهنما

دکتر محمد نخعی

دانشجو

اکرم راهبر

بهمن ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم ،

برادران و خواهران دلسوزم

و همسر مهربانم

قدردانی

حمد و سپاس بیکران به درگاه ایزد منان که هر آغاز و پایانی از اوست.

با تشکر از محضر تمامی استادان بزرگواری که در طول مدت تحصیل از محضر آن‌ها کسب فیض نموده‌ام.

نهایت مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر محمد نخعی که با عنایت به مساعدت و راهنمایی‌های سودمند ایشان تهیه و تدوین این پایان نامه میسر شده است، ابراز می‌دارم.

از جناب آقای دکتر حمیدرضا ناصری و آقای دکتر فرج الله فیاضی نیز که داوری این پایان نامه را پذیرفته‌اند، بی‌نهایت سپاس گذارم.

از همسرم آقای مهدی تلخابی به پاس یاری و تشویق‌هایش در طول دوران کارشناسی و کارشناسی ارشد و بویژه در به انجام رساندن این پایان نامه قدردانی می‌کنم.

از دوستان عزیزم، خانم‌ها طاهری و منصوری که زیباترین دوران تحصیل را در کنارشان گذراندم، سپاس گذاری می‌کنم.

از هم کلاسی‌های دوران کارشناسی ارشدم خانم‌ها جمالی و مصطفوی، آقایان میرعربی، ناصری و تلخابی تشکر فراوان دارم.

در پایان موفقیت روزافزون همگی آن‌ها را در مراحل مختلف زندگی از درگاه خداوند متعال خواهانم.

چکیده:

معادله کوپر- ژاکوب جهت تعیین پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان، ضریب ذخیره (S) و تراوایی (T)، با استفاده از نتایج آزمون پمپاژ به‌کار می‌رود. این معادله حالت ساده شده‌ای از محیط زیرسطحی را در نظر می‌گیرد و اجازه بررسی عدم قطعیت، ناشی از فقدان دانش مربوط به ناهمگنی محیط را نمی‌دهد. در این تحقیق روش رگرسیون کمترین مربعات فازی اصلاح شده، (MFLSR) Modified fuzzy least-squares regression، بر روی داده‌های آزمون پمپاژ استفاده شده است که داده‌های آزمون پمپاژ را به‌منظور محاسبهٔ شیب و عرض از مبدأ فازی به‌کار برده و سپس این مقادیر را برای محاسبهٔ S و T آبخوان توسط روش کوپر- ژاکوب استفاده می‌کند. برای محاسبه توابع فازی S و T از اصل توسعه، Extension principle، استفاده شده است.

در این تحقیق دو سری داده مربوط به آبخوان‌هایی محبوس مورد مطالعه قرار گرفت. سری اول داده‌ها مربوط به آزمون پمپاژ چاه عمیقی واقع در دهکده سوهان شهرستان قوچان و سری دوم نیز برگرفته از Todd (2005) می‌باشد.

روش MFLSR توأم با روش کوپر- ژاکوب به شخص اجازه تحلیل عدم‌قطعیتی را می‌دهد که بطور ذاتی در پارامترهای برآورد شده وجود دارد.

فصل اول: ۱

مقدمه ۱

۱-۱ طرح موضوع پژوهش.. ۲
۱-۲ مروری بر پیشینه پژوهش.. ٤
۱-۳ تئوری مجموعه‌های فازی.. ۵
۱-۳-۱ مفاهیم و تعاریف پایه *۵*
۱-۳-۱-۱ مقدمه ۵
۱-۳-۱-۲ مقایسه مجموعه‌های کلاسیک و فازی ۷
۱-۳-۱-۳ تابع عضویت ۸
۱-۳-۱-٤ اصل توسعه ۱۳
۱-۳-۲ عملگرهای فازی *۱۷*
۱-۳-۲-۱ عملگرها و ویژگی‌های مجموعه‌های کلاسیک ۱۷
۱-۳-۲-۲ عملگرهای مجموعه ای استاندارد در مجموعه‌های فازی ۱۸
۱-۳-۲-۳ عملگرهای جبری مجموعه‌های فازی ۲۱

فصل دوم: ۲۳

رگرسیون فازی ۲۳

۲-۱ رگرسیون خطی فازی... ۲٤
۲-۱-۱ انگیزه استفاده از رگرسیون فازی *۲٤*
۲-۱-۲ مدل‌های رگرسیون امکانی فازی *۲۵*
۲-۱-۲-۱ ضرایب فازی، ورودی و خروجی مشاهده‌ای غیرفازی.................. ۲٦
۲-۱-۲-۲ ضرایب فازی، ورودی غیرفازی و خروجی مشاهده‌ای فازی ۳۰
۲-۱-۳ مدل‌های رگرسیون کمترین مربعات فازی *۳۲*
۲-۱-۳-۱ روش کمترین مربعات مبتنی بر مینیمم کردن میزان فازی بودن ۳۲
۲-۱-۳-۲ روش کمترین مربعات مبتنی بر حساب فازی وزنی ۳۳
۲-۱-۴ مدل‌های رگرسیون مبتنی بر تحلیل بازه‌ای *۳۷*
2-2 مدل رگرسیون کمترین مربعات فازی اصلاح شده ۳۸
MODIFIED FUZZY LEAST-SQUARES REGRESSION (MFLSR)................. ۳۸

فصل سوم: ٤۱

آزمون پمپاژ و مشتق منحنی‌های افت- زمان.................................. ٤۱

۳-۱ آزمون پمپاژ... ٤۲
۳-۱-۱ مقدمه *٤۲*
۳-۱-۲ خصوصیات فیزیکی آبخوان... *٤۲*
۳-۱-۳ معادله کوپر-ژاکوپ *٤۵*
۳-۲ مشتق منحنی افت – زمان.. ۵۰
۳-۲-۱ مقدمه *۵۰*
۳-۲-۲ الگوریتم‌های مشتق گیری *۵۸*

فصل چهارم: ٦۳

محاسبات و تجزیه و تحلیل... ٦۳

۴-۱ محاسبات مقدماتی... ٦٤

۴-۲ نتایج بهینه‌یابی ۷۰

فصل پنجم: ۸۱

بحث و نتیجه گیری، خلاصه و پیشنهادات ۸۱

۵-۱ ضریب تراوایی ۸۲
۵-۲ ضریب ذخیره ۸۶
۵-۳ نتیجه گیری ۹۰
۵-۴ پیشنهادات ۹۲
منابع فارسی ۹۴
REFERENCE ۹۵
پیوست ۹۸

فصل اول:

مقدمه

۱-۱ طرح موضوع پژوهش

در طی سال‌ها آزمون پمپاژ برای پیش‌بینی خصوصیات آبخوان مورد استفاده بوده است. در حین اجرای یک آزمون پمپاژ، اندازه‌گیری‌های سطح آب در چاه‌های مشاهده‌ای و موقعیت آن‌ها نسبتاً قطعی (Crisp) بوده و با خطایی ناچیز همراه می‌باشند، درصورتی‌که طبیعت محیط متخلخل نشان‌دهنده این است که این اندازه‌گیری‌ها دارای عدم‌قطعیت‌اند. به دلیل ناهمگنی، خصوصیات مواد در مجاورت چاه‌های مشاهده‌ای متغیر خواهد بود. افزودن تعداد چاه‌های مشاهده‌ای، اگرچه تصویری با جزئیات بهتر از محیط زیرسطحی فراهم خواهد کرد، ولی در عمل مقرون به صرفه نخواهد بود.

بنابراین در عدم دسترسی به چاه‌های مشاهده‌ای اضافی سؤال این است که:

در طی یک آزمون پمپاژ چه میزان از تغییرات در سطح آب چاه‌های مشاهده‌ای منعکس کننده طبیعت ناهمگن خصوصیات در مجاورت چاه‌ها می‌باشد؟

روش خط مستقیم (Straight-Line) مشتق شده از تئوری(1940) Theis توسط Cooper & Jacob (1946) جهت محاسبه خصوصیات آبخوان معرفی شد. مقادیر سطح آب اندازه‌گیری شده برای محاسبه پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان استفاده می‌شوند. این پارامترها به‌طور ذاتی دربردارنده ناهمگنی‌های موجود در سازندهای زمین‌شناسی در محدودهٔ شعاع تأثیر چاه پمپاژ می‌باشند. این مشاهدات به‌صورت h_{obs} نشان داده می‌شود. روش Theis (1940) (h_{Theis})، پروفیل سطح آب نسبت به زمان را در موقعیتی ثابت، تحت نرخ پمپاژی ویژه، با فرض همگن بودن آبخوان ارائه می‌دهد.

در روش خط مستقیم فرض بر آن است که آبخوان همگن می‌باشد در صورتی‌که در واقعیت این‌چنین نیست درنتیجه با به‌کارگیری روش خط مستقیم برای محاسبه خصوصیات آبخوان (S,T)، پارامترهای حاصل به آبخوانی ناهمگن تعلق ندارند، بلکه متعلق به آبخوانی همگن می‌باشند.

روش خط مستقیم با به‌کارگیری مقادیر سطح آب اندازه‌گیری شدهٔ قطعی، پارامترها را نیز به‌صورت قطعی ارائه خواهد داد (البته پارامترها را ماهیتاً به‌صورت قطعی ارائه نمی‌دهد). در نتیجه این روش در بیان اهمیت عدم‌قطعیت آمیخته با این پارامترها، ناشی از ناهمگنی در مجاورت چاه‌های مشاهده‌ای، ناتوان می‌باشد. اگر مقادیر S و T تعیین شده از روش خط مستقیم با مقادیر صحیح فیزیکی اما نامعلوم‌شان جایگزین شوند، معادله برای آبخوان (معادله‌ای که h_{obs} را تولید می‌کند)، یک مقدار جدید سطح آب را تولید خواهد کرد. اختلاف بین h_{obs} و h_{Theis} را می‌توان به‌عنوان خطای مدل در نظر گرفت که در هنگام استفاده از معادله کوپر- ژاکوب نسبت به معادلات

فیزیکی صحیح نمایش دهندۀ آبخوان ناهمگن واقعی، ایجاد می‌شود. این خطا با ε نمایش داده می‌شود.

عدم‌قطعیتی را که ناشی از فقدان دانش است، نظیر ε که در بالا مورد ملاحظه قرار گرفت (نسبت به خطای تصادفی)، عدم‌قطعیت شناختی (epistemic uncertainty) نامند. بر خلاف عدم‌قطعیت شانسی(aleatory uncertainty) که وابسته به عدم‌قطعیت غیرقابل تقلیل (irreducible uncertainty) بوده و قابل آنالیز توسط تئوری آمار می‌باشد، عدم‌قطعیت شناختی به سادگی توسط تئوری آمار تحلیل نشده و نیاز به سایر ابزار ریاضی دارد. مجموعه‌های فازی یک چنین ابزاری را فراهم می‌کند.

در این تحقیق چگونگی تلفیق عدم‌قطعیت شناختی و روش خط مستقیم به‌منظور تعیین تأثیر عدم‌قطعیت مدل بر پارامترهای آبخوان (S, T)، بررسی شده است.

به‌طور کلی روش خط مستقیم رگرسیون خطی معمولی را برای برازش یک شیب و عرض از مبدأ به داده‌های سطح آب اندازه‌گیری شده در طول زمان و در یک مکان ثابت، یا در طول یک سری چاه و در یک زمان ثابت به‌کار می‌برد. رگرسیون خطی معمولی را می‌توان برای آنالیز عدم‌قطعیت شانسی ناشی از خطاهای مشاهده‌ای به‌کار برد. هر چند چنین خطاهایی معمولاً کوچک بوده، به خطاهای مدل وابسته‌اند و منعکس کنندۀ عدم‌قطعیت ذاتی (inherent uncertainty) موجود در پارامترهای برآورد شده ناشی از ناهمگنی نیستند.

رگرسیون خطی فازی ارائه شده توسط Tanaka et al. (1982) روشی است که اجازه تطابق عدم‌قطعیت شناختی مربوط به فقدان دانش را می‌دهد.

۲-۱ مروری بر پیشینه پژوهش

طی سال‌های اخیر رگرسیون فازی در هیدرولوژی توسط Bardossy et al. (1990)؛ Ozelkan and Duckstein (2001)؛ Uddameri (2004)؛ Si and Bodhinayake (2005) و Uddameri and Honnungar (2007) به‌کار رفته است. (Mathon et al. 2008)

موضوع مورد بحث در این تحقیق توسط Mathon et al. (2008) ارائه شده است و تا کنون نیز توسط شخص دیگری مورد بررسی و تکرار قرار نگرفته است. در ایران موضوع این پژوهش نوین بوده و برای اولین بار در قالب پایان نامه کارشناسی ارشد ارائه می‌شود.

روش رگرسیون کمترین مربعات فازی هیبرید توسط Chang (2001) ارائه شده است، ولی Mathon et al. (2008) با وارد کردن این ایراد که این روش برای پهنای فازی ضرایب معادله رگرسیون مقادیر منفی به‌دست می‌دهد و این که پهنای فازی اصولاً مقداری مثبت می‌باشد، روش وی را زیر سؤال برده و روش خود یعنی رگرسیون کمترین مربعات فازی اصلاح شده (MFLSR) را ارائه می‌دهند.

در ادامه به معرفی تئوری مجموعه‌های فازی و مفاهیم پایه در این خصوص پرداخته می‌شود.

۱-۳ تئوری مجموعه‌های فازی

۱-۳-۱ مفاهیم و تعاریف پایه

۱-۳-۱-۱ مقدمه

تئوری مجموعه‌های فازی، اولین بار توسط Zadeh (1965) پایه‌گذاری شد. پس از چند سال و در اوایل دهه هفتاد، با مطرح شدن منطق فازی، اولین کاربردهای این تئوری در علوم مهندسی ارائه شد. از آن زمان به بعد شاهد گسترش روزافزون جنبه‌های تئوری و عملی آن توسط دانشمندان علوم مختلف بوده‌ایم به‌طوری‌که امروزه تقریباً در تمام عرصه‌های صنعت و دانش، از این تئوری استفاده می‌شود. مهم‌ترین ویژگی منطق فازی در مقایسه با منطق کلاسیک این است که دانش و تجربه بشر را می‌تواند در قالب روابط ریاضی بیان نماید. این مهم باعث شده است که مسائل موجود در دنیای واقعی را به خوبی بتوان با استفاده از آن مدل سازی نمود.

منطق فازی که در برابر منطق کلاسیک مطرح شد، ابزاری توانمند جهت حل مسائل مربوط به سیستم‌های پیچیده‌ای که درک آن‌ها مشکل و یا مسائلی که وابسته به استدلال، تصمیم‌گیری و استنباط بشری می‌باشند، به شمار می‌آید. انتخاب یک روش و رویکرد مناسب برای مدل‌سازی یک سیستم، کاملاً بستگی به میزان پیچیدگی آن سیستم داشته و پیچیدگی نیز ارتباط معکوس با میزان دانش و شناخت ما از آن سیستم دارد. واضح است که انسان تمایل دارد یک سیستم را با بیشترین دقت ممکن مدل‌سازی نماید، اما چنان‌چه شناخت کافی نسبت به آن نداشته باشد مجبور است که دقت مورد انتظار از مدل را با میزان شناخت خود از سیستم منطبق نماید. منطق فازی بهترین وسیله برای مدل‌سازی سیستم‌هایی است که دارای پیچیدگی زیاد بوده و داده‌های کافی از آن‌ها موجود نیست یا اطلاعاتی که در مورد آن‌ها در اختیار می‌باشد مبهم و غیر صریح است. اما باید توجه داشت که در این حالت دقت مدل نیز کاهش می‌یابد.

به‌طور کلی سیستم‌های فازی را می‌توان به خوبی برای مدل‌سازی دو نوع اصلی عدم‌قطعیت در پدیده‌های موجود در جهان به‌کار برد. نوع اول عدم‌قطعیت ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پیچیدگی‌های یک پدیده می‌باشد. به‌عنوان مثال برای اندازه‌گیری دمای هوای یک شهر ممکن است از یک یا چند دماسنج استفاده کنند و متوسط اعداد قرائت شده را به‌عنوان دمای هوای آن شهر اعلام کنند. اما واضح است که آن عدد، تقریبی از مقدار واقعی دمای شهر می‌باشد چرا که اولاً تنها چند نقطه از بی‌نهایت نقاط موجود در فضای شهر در محاسبات دخالت داده

شده‌اند، ثانیاً خطای شخص اندازه‌گیر و همچنین دستگاه اندازه‌گیری باعث ایجاد عدم‌قطعیت در میزان دمای محاسبه شده می‌شود. نوع دوم عدم‌قطعیت مربوط به عدم صراحت و عدم شفافیت مربوط به یک پدیده یا ویژگی خاص می‌باشد. یعنی یک پدیده ممکن است ذاتاً غیر صحیح و وابسته به قضاوت افراد باشد. به‌عنوان مثال ویژگی "گرم بودن هوا" از نظر افراد مختلف، متفاوت می‌باشد و هیچ تعریف واحدی برای آن وجود ندارد به‌طوری‌که یک نفر ممکن است دمای بالای ۳۰ درجه را گرم بداند و فرد دیگری دمای بالای ۴۰ درجه را. در این میان در میان مسائل مربوط به مهندسی آب نیز به‌طور گسترده‌ای با عدم‌قطعیت و عدم صراحت روبه‌رو هستیم که به‌عنوان مثال می‌توان به موارد و عبارت‌هایی نظیر خشکسالی نسبتاً شدید، رودخانه پرآب، آب آلوده، تبخیر و تعرق کم، آب قابل دسترس کافی، برداشت زیاد از آب‌های زیرزمینی و... اشاره نمود. همان‌گونه که در موارد مذکور نیز مشاهده می‌شود عبارت‌هایی نظیر شدید، کم، زیاد، کافی، مناسب، ضعیف و ... عبارت‌های غیرصریحی می‌باشند. بنابراین تئوری مجموعه‌های فازی ابزار مناسبی جهت مدل‌سازی سیستم‌هایی است که دارای چنین ویژگی‌هایی می‌باشند. (کوره‌پزان دزفولی، ۱۳۸۷)

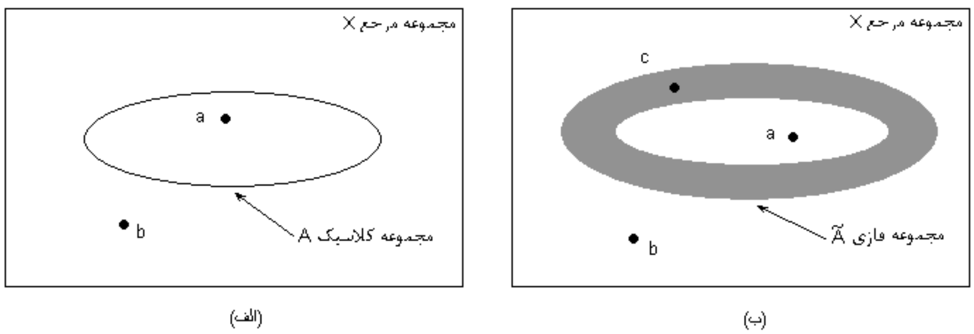
۱-۳-۱-۲ مقایسه مجموعه‌های کلاسیک و فازی

مجموعه‌های کلاسیک و فازی زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه مرجع می‌باشند. فرض کنید X مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه کلاسیک از X باشد. به‌طوری‌که در حالت "الف" شکل (۱-۱) نشان داده شده است مجموعه کلاسیک A دارای مرز دقیق، صریح و معین می‌باشد. بنابراین هر المان از مجموعه مرجع X یا به مجموعه A تعلق دارد یا ندارد. به عبارت دیگر عضویت یک المان به مجموعه A می‌تواند به‌صورت یک گزاره درست یا نادرست باشد که مقادیر یک و صفر به‌ترتیب به گزاره‌های مذکور تخصیص داده می‌شود. بنابراین درصورتی‌که یک المان مانند a به مجموعه کلاسیک A تعلق داشته باشد، گوییم درجه عضویت المان مزبور به مجموعه A برابر یک می‌باشد و درصورتی‌که المانی نظیر b به مجموعه A تعلق نداشته باشد گوییم درجه عضویت b به مجموعه A برابر صفر می‌باشد. اگر درجه عضویت المان x به مجموعه A را با $\chi_A(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت.

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & if \quad x\in A\\ 0 & if \quad x\notin A\end{cases} \qquad (۱-۱)$$

بر اساس تعریف فوق و با توجه به حالت "الف" شکل (۱-۱) می‌توان نتیجه گرفت که درجه عضویت المان‌های a و b به مجموعه کلاسیک A به‌ترتیب برابر یک و صفر می‌باشد.

بر خلاف مجموعه‌های کلاسیک، مرز مجموعه‌های فازی به‌صورت صریح و دقیق نبوده بلکه به‌صورت یک باند می‌باشد. مجموعه $\tilde{A}$ در حالت "ب" شکل (۱-۱) یک مجموعه فازی از مجموعه مرجع X را نشان می‌دهد. به‌طوری‌که مشاهده می‌شود المان a کاملا به مجموعه $\tilde{A}$ تعلق دارد و المان b اصلاً به این مجموعه تعلق ندارد. به بیان دیگر درجه عضویت المان‌های a و b به مجموعه فازی $\tilde{A}$ به‌ترتیب برابر یک و صفر می‌باشد. اما المان c بر روی مرز مجموعه $\tilde{A}$ واقع بوده، بنابراین درجه عضویت آن به مجموعه فازی $\tilde{A}$ نه می‌تواند یک باشد و نه صفر، بلکه یک عدد بین صفر و یک می‌باشد. (کوره‌پزان دزفولی، ۱۳۸۷)



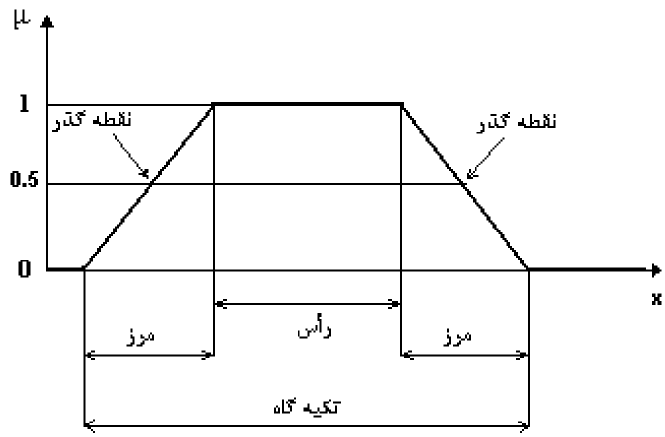
شکل ۱-۱ مقایسه مجموعه کلاسیک (شکل الف) و مجموعه فازی (شکل ب)

۱-۳-۱-۳ تابع عضویت

مفهوم تابع عضویت از اهمیت ویژه‌ای در تئوری مجموعه‌های فازی برخوردار می‌باشد، چراکه تمام اطلاعات مربوط به یک مجموعه فازی به وسیله تابع عضویت آن توصیف و در تمام کاربردها و مسایل تئوری مجموعه‌های فازی از آن استفاده می‌شود. تابع عضویت مقدار فازی بودن یک مجموعه فازی را مشخص می‌کند و در واقع به تابعی که میزان درجه عضویت المان‌های مختلف را به یک مجموعه نشان دهد، تابع عضویت می‌گویند. در این‌جا برای نشان دادن تابع عضویت فازی از حرف μ استفاده خواهد شد. تابعی که درجه عضویت المان x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان دهد با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش داده می‌شود. با توجه به مطالبی که تا کنون گفته شد می‌توان به‌طور خلاصه تفاوت مفهوم درجه عضویت در مجموعه‌های کلاسیک و فازی را به‌صورت زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned}\chi_A(x):&\ \ x \mapsto \{0,1\}\\ \mu_{\tilde{A}}(x):&\ \ x \mapsto [0,1]\end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

روابط فوق نشان می‌دهد که برد توابع عضویت کلاسیک، مجموعه دو عضوی صفر و یک بوده درحالی‌که برد توابع عضویت فازی، بازه بسته صفر و یک می‌باشد. در شکل (۱-۲) یک تابع عضویت به‌طور شماتیک نشان داده شده است.



شکل ۱-۲ اجزای مختلف تابع عضویت فازی

تعریف ۱-۱ به بخشی از مجموعه مرجع که المان‌های آن به‌طور کامل به مجموعه $\widetilde{A}$ تعلق دارند یعنی درجه عضویت آن‌هابه $\widetilde{A}$ برابر یک می‌باشد $\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)=1\right)$، رأس گفته می‌شود.

تعریف ۱-۲ به بخشی از مجموعه مرجع که عضویت المان‌های آن به مجموعه $\widetilde{A}$ مخالف صفر می‌باشد $\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)>0\right)$، تکیه‌گاه گفته می‌شود.

تعریف ۱-۳ به بخشی از مجموعه مرجع که درجه عضویت المان‌های آن به مجموعه $\widetilde{A}$ بین صفر و یک می‌باشد $0<\left(\mu_{\widetilde{A}}(x)<1\right)$، مرز مجموعه فازی گفته می‌شود.

تعریف ۱-۴ اگر یک کران بالا مانند u در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in X$ رابطه $u\geq x$ برقرار باشد، آن‌گاه u را کوچک‌ترین کران بالای مجموعه فازی $\widetilde{A}$ می نامیم و به‌صورت $u=\sup\widetilde{A}$ نشان می‌دهیم.

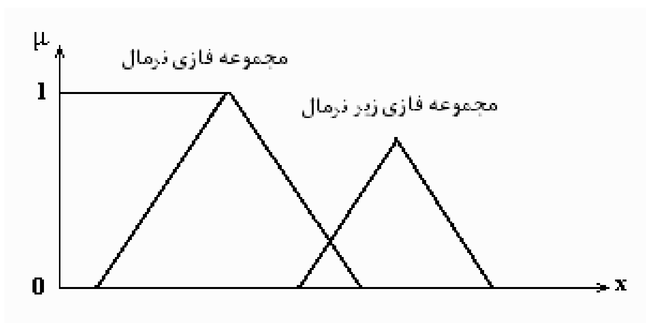
تعریف ۱-۵ اگر یک کران پایین مانند l در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in X$ رابطه $l\leq x$ برقرار باشد، آن‌گاه l را بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه فازی $\widetilde{A}$ می‌نامیم و به‌صورت $u=\inf\widetilde{A}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۶ به بیشترین مقدار تابع عضویت یک مجموعه فازی، ارتفاع آن مجموعه گفته می‌شود.

تعریف ۱-۷ به نقطه‌ای که مقدار درجه عضویت آن برابر ۰/۵ باشد نقطه گذر یک تابع عضویت گفته می‌شود.

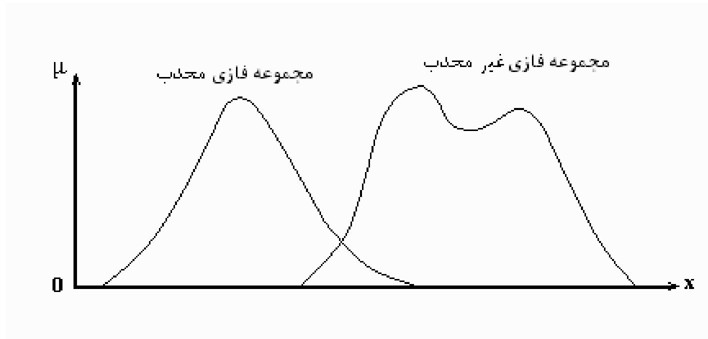
تعریف ۱-۸ به مجموعه‌ای که حداقل یکی از المان‌های آن دارای درجه عضویتی برابر با یک باشد مجموعه فازی نرمال گفته می‌شود (شکل ۱-۳).

تعریف ۱-۹ به مجموعه فازی که ارتفاع آن کمتر از یک باشد، مجموعه فازی زیر نرمال گفته می‌شود (شکل ۱-۳).



شکل۱-۳ مجموعه‌های فازی نرمال و زیر نرمال

تعریف ۱-۱۰ به مجموعه‌ای که تابع عضویت آن به‌صورت یکنواخت افزایشی یا کاهشی بوده و یا مقادیر درجه عضویت آن به‌صورت یکنواخت افزایشی سپس کاهشی باشد مجموعه فازی محدب گفته می‌شود (شکل ۱-۴).



شکل ۱-۴ مجموعه‌های فازی محدب و غیر محدب

به بیان دیگر اگر در مجموعه فازی $\widetilde{A}$، به‌ازای هر المان x، y و z، با فرض x < y < z رابطه زیر برقرار باشد، آن‌گاه آن مجموعه یک مجموعه فازی محدب می‌باشد.

$$\mu_{\widetilde{A}}(y) \geq \min\left[\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(z)\right] \qquad (۳-۱)$$

تعریف ۱-۱۱ به مجموعه فازی نرمال و محدب $\widetilde{A}$ که در مجموعه مرجع $\widetilde{X}$ تعریف شده است، عدد فازی $\widetilde{A}$ گفته می‌شود. بنابراین می‌توان انواع اعداد فازی مانند اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای را تعریف نمود.

مجموعه‌های فازی را می‌توان به دو صورت کلی که در ادامه ارائه می‌شود نمایش داد.

الف- مجموعه فازی گسسته و محدود

شکل‌های مختلفی برای نمایش دادن مجموعه فازی $\widetilde{A}$ که یک زیرمجموعه از مجموعه مرجع گسسته و محدود X می‌باشد پیشنهاد شده است. در این‌جا برای این نوع مجموعه‌ها از پیشنهادی که توسط زاده به‌صورت زیر ارائه شده است استفاده خواهد شد.

$$\widetilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_n)}{x_n} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_i)}{x_i} \right\} \qquad (۴-۱)$$

ب- مجموعه فازی پیوسته و نامحدود

برای نمایش دادن مجموعه فازی $\widetilde{A}$ که یک زیرمجموعه از مجموعه مرجع پیوسته و نامحدود X است نیز مانند مجموعه‌های فازی گسسته پیشنهادهای مختلفی نظیر روابط زیر ارائه شده است.

$$\widetilde{A} = \left\{ \int \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x} \right\} \quad (b \qquad \widetilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)\right) \middle| x \in X \right\} \quad (a \qquad (۵-۱)$$

که رابطه a برای تعریف یک مجموعه فازی پیوسته استفاده می‌شود. باید توجه داشت علائم "+" و "∫" در روابط فوق به مفهوم جبری آن که در مجموعه‌های کلاسیک تعریف می‌شود نمی‌باشد.

تعریف ۱-۱۲ عدد اصلی یک مجموعه فازی متناهی مانند $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left|\tilde{A}\right| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (۱-۶)$$

و عدد اصلی نسبی $\tilde{A}$ با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\left\|\tilde{A}\right\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|} \qquad (۱-۷)$$

واضح است که عدد اصلی نسبی یک مجموعه فازی بستگی به عدد اصلی مجموعه مرجع آن یعنی $|X|$ دارد و در واقع $\|\tilde{A}\|$ نشان‌گر کسری است از المان‌های X که در $\tilde{A}$ موجود می‌باشند با توجه به درجه عضویت آن‌ها به مجموعه $\tilde{A}$. بنابراین چنان‌چه در نظر باشد دو مجموعه فازی را با توجه به اعداد اصلی نسبی آن‌ها مقایسه نماییم، باید مجموعه مرجع آن‌ها یکسان باشد. درصورتی‌که X یک مجموعه نامتناهی باشد، عدد اصلی مجموعه $\tilde{A}$ به‌صورت $\left|\tilde{A}\right| = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x)dx$ تعریف می‌شود. واضح است که $\left|\tilde{A}\right|$ ممکن است همیشه موجود نباشد.

تعریف ۱-۱۳ روابط فازی، نگاشت المان‌های یک مجموعه مرجع مانند X به المان‌های یک مجموعه مرجع دیگر مانند Y به وسیله ضرب دکارتی دو مجموعه مرجع می‌باشند. بنابراین یک رابطه فازی، یک زیرمجموعه فازی از فضای دکارتی X×Y به بازه [0,1] می‌باشد.

تعریف ۱-۱۴ فرض کنید $X,Y \subseteq \Re$ دو مجموعه مرجع باشند، آن‌گاه $\tilde{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{R} = \left\{\left((x.y), \mu_{\tilde{R}}(x,y)\right) \middle| (x.y) \in X \times Y\right\} \qquad (۱-۸)$$

$\tilde{R}$ یک رابطه فازی بر X×Y نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱۵ برش‌های لامدا برای مجموعه‌های فازی:

برش‌های لامدا (λ) برای تبدیل مجموعه فازی به یک مجموعه کلاسیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ و عدد لامدا (λ) را در نظر بگیرید $(0 \le \lambda \le 1)$. حال یک مجموعه که آن را مجموعه برش لامدای مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم و با (A_λ) نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A_\lambda = \left\{x \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \lambda\right\} \qquad (۱-۹)$$

مجموعه (A_λ) یک مجموعه کلاسیک است. هر مجموعه فازی $\tilde{A}$ را می‌توان به تعداد بی‌نهایت مجموعه برش لامدا تبدیل کرد، چراکه در بازه $[0.1]$ بی‌نهایت عدد وجود دارد. هر المان $x \in A_\lambda$ در واقع یک المان متعلق به مجموعه $\tilde{A}$ بوده که درجه عضویت آن بیشتر یا مساوی λ می‌باشد.

ویژگی‌های مجموعه‌های برش λ:

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda \quad (۱۰-۱)$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda \quad (۱۱-۱)$$

$(\tilde{A}')_\lambda \neq (A'_\lambda)$ به استثنای $\lambda = 0.5$ (۱۲-۱)

$$A_\alpha \subseteq A_\lambda \quad for\ any \quad \lambda \le \alpha \quad where\ 0 \le \alpha \le 1\ and\ A_0 = X \quad (۱۳-۱)$$

تعریف ۱-۱۶ برش‌های لامدا برای روابط فازی:

برای تبدیل یک رابطه فازی به یک رابطه کلاسیک همانند روشی که برای تبدیل یک مجموعه فازی به یک مجموعه کلاسیک ذکر شد، می‌توان از برش‌های لامدا استفاده نمود. یک رابطه فازی مانند $\tilde{R}$ در واقع یک ماتریس است که هرکدام از سطرهای آن نشان دهنده یک مجموعه فازی با تابع عضویت گسسته می‌باشد. حال یک رابطه برش لامدا روی رابطه فازی $\tilde{R}$ که با R_λ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R_\lambda = \{(x,y) | \mu_{\tilde{R}}(x,y) \ge \lambda\} \quad (۱۴-۱)$$

درصورتی‌که المان $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ متعلق به مجموعه $\tilde{R}$ بیشتر یا مساوی λ باشد، آن‌گاه المان متناظر آن در R_λ برابر یک و در غیر این‌صورت برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین R_λ یک رابطه کلاسیک می‌باشد. (کوره‌پزان دزفولی، ۱۳۸۷)

ویژگی‌های روابط برش λ:

$$(\tilde{R} \cup \tilde{S})_\lambda = R_\lambda \cup S_\lambda \quad (۱۵-۱)$$

$$(\tilde{R} \cap \tilde{S})_\lambda = R_\lambda \cap S_\lambda \quad (۱۶-۱)$$

$$(\tilde{R}')_\lambda \neq (R'_\lambda) \quad (۱۷-۱)$$

$$R_\alpha \subseteq R_\lambda \quad for\ any \quad \lambda \le \alpha \quad where\ 0 \le \alpha \le 1 \quad (۱۸-۱)$$

۱-۳-۱-۴ اصل توسعه

اصل توسعه یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در مجموعه‌های فازی می‌باشد که توسط Zadeh (1975) معرفی شده است. این اصل روشی کلی را برای بسط مفاهیم ریاضی قطعی (Crisp) به کمیت‌های فازی فراهم می‌کند. به‌طوری‌که دامنه تعریف تابع را از نقاط قطعی به مجموعه‌هایی فازی، به‌صورت متغیرهای تابع، توسعه می‌دهد (Hanss, 2004). به عبارتی دیگر اصل توسعه یک معادله اساسی است که اجازه می‌دهد دامنه یک تابع را از نقاط در U به مجموعه‌های فازی در U توسعه داد. (وانگ، ۱۳۸۷)

اصل توسعه مطابق رابطه Zadeh (1975)، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنید $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ مجموعه مرجع حاصل‌ضرب باشد و F نیز تابعی بدین صورت باشد.

$$F : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \mapsto Z ,$$

که عناصر $x_1, x_2, ..., x_n$ را از مجموعه مرجع حاصل‌ضرب به مجموعه مرجع Z، $z = F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$، تصویر می‌کند.

در ادامه فرض کنید $\widetilde{A}_1 \subseteq X_1$, $\widetilde{A}_2 \subseteq X_2$, ..., $\widetilde{A}_n \subseteq X_n$، n تا مجموعه فازی باشند که توسط توابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n), x_i \in X_i, i = 1,2,...,n$ تعریف می‌شوند. تابع عضویت $\mu_{\widetilde{B}}(z),\ z \in Z$، مربوط به مجموعه فازی $\widetilde{B} \subseteq Z$، یعنی

$$\widetilde{B} = F\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\right)$$

بدین صورت تعریف خواهد شد.

$$\mu_{\widetilde{B}}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{z=F(x_1,x_2,...,x_n)} \min\left\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right\} \\ \qquad\qquad if \quad \exists z = F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ 0 \qquad\qquad otherwise . \end{cases} \tag{۱۹-۱}$$

مطابق عملیات ترکیب که در شکل، شبیه اصل توسعه می‌باشد، عملگر SUP را می‌توان با عملگر MAX جایگزین کرد به‌شرطی‌که همه مجموعه‌های فازی $\widetilde{A}_i$ دارای تعداد محدودی مجموعه تکیه‌گاه، $supp(\widetilde{A}_i), i = 1,2,...,n$ باشند.

به دلیل خصوصیات منحصر به فرد رابطه پیشنهادی Zadeh (1975) یعنی رابطه (۱-۱۹)، اصل توسعه معمولاً به این شکل کلاسیک خود به‌کار می‌رود.

برای حالتی‌که n=1 می‌باشد، فرض کنید مجموعه فازی $\widetilde{A} \subseteq X$ با تابع عضویت $\mu_{\widetilde{A}}(x),\ x \in X$ تعریف می‌شود و تابع F عناصر x را از مجموعه مرجع X به عناصر $z = F\left(x\right)$ از مجموعه جهانی Z تصویر می‌کند.

تابع عضویت $\mu_{\widetilde{B}}(z),\ z \in Z$، مربوط به مجموعه فازی $\widetilde{B} \subseteq Z$، یعنی

$$\widetilde{B} = F\left(\widetilde{A}\right)$$

بدین صورت تعریف خواهد شد.