دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

روش‌های تفاضلی کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته‌ی صریح و ضمنی برای مسئله‌ی استیفن

استاد راهنما

دکتر کریم ایواز

استاد مشاور

دکتر مهرداد لکستانی

پژوهشگر

مینا موسی پور کلیبر

۱۳۹۳

بسم الله الرّحمن الرّحیم

الهی! دل ده، که در کار تو جان بازیم. جانی ده، که کار آن جهان سازیم. تقوایی ده، که دنیا را بسپریم. روحی ده، که از دین برخوریم. یقینی ده، که در آز بر ما باز نشود. قناعتی، تا صعوه‌ی حرص ما باز نشود. دانایی ده، که از راه نیفتیم. بینایی ده، که در چاه نیفتیم. دست گیر، که دست آویز نداریم، در گذار، که بد کرده ایم. آزرم دار، که آزرده ایم. طاعت مجوی، که آب آن نداریم. از هیبت مگوی، که تاب آن نداریم. توفیقی ده، تا در دین استوار شویم. عقبی ده، تا از دنیا بیزار شویم. نگاهدار، تا پریشان نشویم. به راه دار تا پشیمان نشویم. بیاموز، تا شریعت بدانیم. برافروز، تا در تاریکی نمانیم. بنمای، تا در روی کس ننگریم. بگشای دری، که بگذریم. تو بساز، که دیگران ندانند. تو بنواز، که دیگران نتوانند. همه را از خود رهایی ده. همه را به خود آشنایی ده. همه را از مکر شیطان نگاهدار. همه را از فتنه‌ی نفس آگاه دار. الهی! بساز کار من، و منگر به کردار من. دلی ده، که طاعت افزون کند. طاعتی ده، که به بهشت راهنمون کند. علمی ده، که در او آتش هوا نبود. علمی ده، که در او آب زرق و ریا نبود. دیده ای ده، که عزّ ربوبیت تو بیند. نفسی ده، که حلقه‌ی بندگی تو در گوش کند. جانی ده، که زهر حکمت تو به طبع نوش کند. تو شفا ساز، که از این معلولان شفایی نیاید. تو گشادی ده، که از این ملولان کاری نگشاید. به اصلاح آر، که نیک بی سامانیم! جمع دار، که بس پریشانیم.

مینا موسی پور

باسپاس از سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

تقدیم به:

عزیزانم

به نام خدا

و لَمْ یَشْکُرُ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرُ الْخالِقْ.

راز و رمز پویای علم و کشف معانی بدیع و تجلی جلوه‌های شهودی معرفت کیمیایی است که آسمان علم به برکت سیما و سیره‌ی نورانی نبی مکرم صلی الله علیه و آله و سلم، انسان در بند خاک را به معراج حضور می‌خواند. و چه خرم علمی که از چشمه‌ی معارف سیراب شود و چه زیبا دانشی که قبای پرنیانش به عطر و بوی گلستان محمدی معطر شود و چه معماری باشکوهی، بنایی که سنگ هویت و فرهنگ آن ریشه درمدینه النبی بیابد. و امروز کاخ آباد علم به سروش معنوی و مفهوم پیام او بیش از پیش محتاج راهنمایانی است که علاوه بر حفظ آبادانی آن در راه اعتلای آن به فرزندان خویش محبت نمایند.

مینا موسی پور کلیبر
۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: موسی پور کلیبر نام: مینا
عنوان: روش‌های تفاضلی کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته‌ی صریح و ضمنی برای مسئله‌ی استیفن
استاد راهنما : دکتر کریم ایواز استاد مشاور : دکتر مهرداد لکستانی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۶۶
کلید واژه‌ها: روش تفاضلی کمترین مربعات متحرک، مسئله استیفن، صریح، ضمنی، مرز متحرک

چکیده

در این پایان‌نامه، روش تفاضلی کمترین مربعات متحرک MLS تعمیم یافته‌ی صریح و ضمنی را برای حل مسئله‌ی یک بعدی استیفن ارائه می‌دهیم. در مسئله استیفن، مرز فصل مشترک که شامل تغییر فاز است، حرکت می‌کند و باعث جهش در میدان گرادیان جواب می‌باشد. در روش تفاضلی MLS، چند جمله‌ای تیلور را با افزودن تابع وزن، توسعه می‌دهیم که مشتق جهشی نرمال را نشان می‌دهد. با به کار بردن رابطه جنبشی برای فیزیک فصل مشترک، تقریب خیلی ساده برای مسئله‌ی استیفن ارائه می‌شود که به طور دقیق، تکینگی فصل مشترک متحرک را در نظر می‌گیرد و برای مرز متحرک نیازی به مش‌بندی دوباره نیست. معادلات تفاضلی برای معادلات حاکم، مستقیماً در گره‌ها ساخته می‌شوند. روند صریح منجر به دستگاه خطی می‌شود ولی روند ضمنی منجر به دستگاه غیرخطی می‌شود. روش صریح ساده و مؤثر است ولی روش ضمنی، جواب پایدارتر و دقیق‌تری تولید می‌کند. مثال‌های عددی حاکی از این است که این روش‌ها، به دقت و بازده عالی در حل مسئله‌ی ذوب نیمه متناهی با مرز متحرک می‌رسد.

مقدمه

روش عناصر متناهی، با موفقیت تمام در اکثر شاخه‌های عملی و صنعتی مورد استفاده قرار گرفته است. البته محدودیت‌هایی برای آن وجود دارد. به علت درون‌یابی که بر پایه‌ی مش بندی هستند، مش‌بندی‌های دارای کیفیت پایین منجر به خطاهای زیادی می‌شوند و نیاز به مش‌بندی دوباره دارند که زمان‌بر و نیازمند فعالیت زیاد هستند که در زمان متناهی برای هندسه‌های سه بعدی مختلف امکان پذیر نیستند.

افزون بر این، به علت ساختار اساسی روش‌های مش‌بندی کلاسیک، این روش‌ها برای مسائل با ناپیوستگی مناسب نمی‌باشند. یک تکنیک برای مواجه با ناپیوستگی‌های متحرک در روش‌های مش‌بندی، دوباره مش‌بندی یا غنی‌سازی ناپیوستگی است. به هر حال، دوباره مش‌بندی هزینه‌بر است و برای بعد سه مشکل می‌باشد و به تصویر مقادیر بین مش‌های متوالی و درجه‌ی دقت مهمی نیازمند است.

روش‌های بدون مش‌بندی (MMS)، با هدف کاهش قسمتی از مشکلاتی که بر پایه‌ی مش‌بندی برای ساختن جواب تقریبی بودند، اختراع شدند. در روش‌های بدون مش‌بندی، تقریب فقط از گره‌ها ساخته می‌شود. یکی از اولین روش‌های مش‌بندی، روش SPH بود که توسط لوسی [۱] در سال ۱۹۷۷ [۱۷] و همچنین توسط گین‌گولد [۳] و موناگان [۲] در سال ۱۹۷۷ [۱۰] ساخته شد. این روش برای حل مسائلی در فیزیک نجومی و بعدها در دینامیک سیالات توسط بونت و کالاسگرانن در سال ۲۰۰۰ و توسط موناگان در سال ۱۹۸۸ به وجود آمدند.

مسئله استیفن، یکی از مشهورترین مسائل مقدار مرزی متحرک می‌باشد که در آن، فاز که مرز را از حالت مایع به حالت جامد یا به طور برعکس تغییر شکل می‌دهد، موقعیت را تغییر می‌دهد تا شار گرما بین دو فاز به تعادل برسد. ابتدایی ترین معادله با مشتقات جزئی، معادله انتقال گرما می‌باشد با وجود این، حل این مسئله، به دلیل مرز متحرک، آسان نیست. در حالت کلی برای حل

[۱] Lucy
[۳] Gingold
[۲] Monaghan

این مسئله، یک تکنیک عددی مخصوص که با ابزار جواب غیر خطی تجهیز شده است، مورد نیاز است. این تکنیک باید بتواند مرز متحرک را پیگیری کند. روندهای عددی زیادی برای حل مسئله‌ی استیفن، از قبیل روش فصل مشترک، پوشانده شده (IIN، لوک [۲] و لی [۱] در سال ۱۹۹۴) [۱۴] ، روش فرانتراکینگ (جوریک [۵] و تریگوراسون [۴] در سال ۱۹۹۶) [۱۲] و روش $XFEM$ (چسا [۳] و همکارانش در سال ۲۰۰۲) [۷] شناخته شده‌اند.

به هرحال این روش‌ها در واقع، شامل فرمول‌بندی و روند پیگیری مرز پیچیده می‌باشد، از جمله روش $LevelSet$ (اوشر و ستیان در سال ۱۹۸۸) که روش‌های عددی را به شدت پیچیده می‌کند. به ویژه، کالدول و کوان در سال ۲۰۰۴ و جویره در سال ۲۰۰۶ مسئله‌ی استیفن یک بعدی را با روش تفاضلات متناهی (FDM) حل کردند. اما آن‌ها نه تنها نتوانستند دقت عالی روش را نشان بدهند، بلکه نتوانستند بازده خوب روش را بیان کنند.

در این پایان‌نامه که بر مبنای مقاله‌ی [۲۱] تهیه شده است، یک روش عددی جدیدی را ارائه می‌دهیم که می‌تواند مسئله‌ی استیفن یک بعدی را هم به طور دقیق و هم با بازده بالا حل کند. این روش، روش تفاضلات MLS نامیده می‌شود که بر پایه‌ی بسط تیلور با به کار بردن روش کمترین مربعات متحرک است. این روش، جنبه‌های جالبی را در بر دارد که از FDM و روش بدون مش‌بندی ناشی می‌شود. معادلات با مشتقات جزیی حاکم با روش‌های صریح و ضمنی گسسته سازی می‌شوند.

یک روند جواب تکراری در روش ضمنی به کار برده می‌شود. نشان خواهیم داد که روش تفاضلی MLS از کارایی عالی در دقت و راحتی نسبت به روش‌های عددی ذکرشده برخوردار است.

---

[۲] LeVeque
[۱] Li
[۵] Juric
[۴] Tryggvason
[۳] Chessa

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف

در این پایان‌نامه، $\mathbb{R}$ بیانگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{C}$ بیانگر مجموعه‌ی اعداد مختلط می‌باشد و عمده‌ی بحث‌ها روی $\mathbb{R}^n$ خواهد بود (فضای اقلیدسی $n-$بعدی).نقطه‌ی $\mathbf{x}$ در این فضا به صورت n مؤلفه‌ای به شکل زیر می‌باشد:

$$\mathbf{x} = (x_۱, x_۲, \dots, x_n).$$

تعریف ۱.۱.۱. یک دنباله در $\mathbb{R}^n$ را با $\{x_R\}$ نشان می‌دهیم. در این حالت، به ازای هر R داریم $x_R \in \mathbb{R}^n$. اگر $\nu \subset \mathbb{R}^n$، $\bar{\nu}$ را بستار ν و $\partial\nu$ مرز آن نامیده می‌شود. هر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ مانند Ω را که در رابطه‌ی $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^n - \Omega)$ صدق کند، یک میدان می‌گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{C}^n$ باشند، آنگاه

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=۱}^{n} x_i \cdot \bar{y}_i,$$

را حاصل‌ضرب داخلی آنها می‌نامیم که در آن $\bar{y}_i$ مزدوج y_i است و در حالتی که $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$، آنگاه

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=۱}^{n} x_i \cdot y_i,$$

همچنین

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$$

را طول بردار $\mathbf{x}$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. کره و گوی باز به مرکز $\mathbf{x}$ و شعاع r در $\mathbb{R}^n$ را به ترتیب با $S_r(x)$، $B_r(x)$ نمایش می‌دهیم، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_r(x) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = r\},$$
$$B_r(x) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}-\mathbf{y}| < r\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرمنفی را با Z نشان می‌دهیم. اگر

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in Z^n$$

باشد، آنگاه آن را یک اندیس $n-$گانه می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. برای $\alpha \in Z^n$، تعریف می‌کنیم:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!,$$
$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

همچنین برای $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$، $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in Z^n$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}.$$

تعریف ۶.۱.۱. مقصود از C_α که در آن $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ بسط عبارت $C_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}$ می‌باشد که C_α می‌تواند یک عدد حقیقی یا مختلط و یا یک بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد. به عنوان مثال، عبارت

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$، $C_\alpha \in \mathbb{R}$ و $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in Z^n$ می‌باشد، یک چند جمله‌ای از درجه‌ی m از n متغیر x_1، $\cdots$، x_n را نشان می‌دهد.

تعریف ۷.۱.۱. اگر $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{x} = (x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک میدان و U یک تابعی به صورت $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد، در این‌صورت، عبارت $\partial U/\partial x_i$ را با D_iU یا U_{x_i} نیز می‌توان نشان داد.

تعریف ۸.۱.۱. عبارت $\mathbf{D} = (D_۱, D_۲, \cdots, D_n)$ یا $\partial = (\partial_۱, \cdots, \partial_n)$ را عمگر گرادیان می‌نامند که به صورت زیر، روی تابع حقیقی $U(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ عمل می‌کند:

$$\mathbf{D}U = (D_۱U, \cdots, D_nU) = (\frac{\partial U}{\partial x_۱}, \frac{\partial U}{\partial x_۲}, \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}).$$

تعریف ۹.۱.۱. عملگر دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه m را

$$\frac{\partial^m}{\partial x_۱^{\alpha_۱} \partial x_۲^{\alpha_۲} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

که در آن $|\alpha| = m$ می‌باشد، می‌توان با نمادهای زیر نشان داد:

$$\mathbf{D}^\alpha = D_۱^{\alpha_۱} {D_۲}^{\alpha_۲} \cdots {D_n}^{\alpha_n}, \qquad , \partial^\alpha = {\partial_۱}^{\alpha_۱} {\partial_۲}^{\alpha_۲} ... {\partial_n}^{\alpha_n},$$

تعریف ۱۰.۱.۱. در تعریف ریاضی، منیفلد، فضای توپولوژیک می‌باشد که موضعاً فضای اقلیدسی است. به طور دقیق‌تر، هر نقطه از منیفلد n-بعدی، دارای یک همسایگی می‌باشد که با فضای اقلیدسی از بعد n همئومورف است.

چهار نوع منیفلد وجود دارد: توپولوژیک، تکه‌ای خطی، مشتق‌پذیر و مختلط. بسته به این‌که دستگاه‌های مختصات موضعی حاصل از توابع پیوسته، تکه‌ای خطی، مشتق‌پذیر یا تحلیلی مختلط از مختصات در فضای اقلیدسی باشند. منیفلد از لحاظ شهودی یک رویه می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. گرادیان تابع اسکالر $f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ را با ∇f یا $\overrightarrow{\nabla} f$ نمایش می‌دهیم که در آن، ∇ (نماد نابلا)، بیان کننده‌ی بردار عملگر مشتق می‌باشد. گرادیان تابع f، میدان برداری منحصربه‌فردی است که حاصل‌ضرب نقطه‌ای اش با هر بردار v در هر نقطه‌ی دلخواه x برابر با مشتق جهتی f در امتداد v می‌باشد یعنی

$$(\nabla f(x)).v = D_v f(x).$$

در دستگاه مختصات مستطیلی، گرادیان، میدان برداری است که مولفه‌هایش، مشتقات جزیی f می‌باشند:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n,$$

که در آن، e_i ها بردارهای متعامد یکه هستند که جهت‌های مختصات را نشان می‌دهند. در دستگاه‌های مختصات دکارتی سه بعدی، گرادیان به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k.$$

در ریاضیات، هر بردار دلخواه در یک نقطه از منحنی را می‌توان به صورت منحصربه‌فرد، به صورت حاصل‌جمع دو بردار تجزیه کرد که یکی از بردارها مماس بر منحنی می‌باشد و آن را مولفه‌ی مماسی بردار می‌نامیم و بردار دیگر عمود بر منحنی می‌باشد و آن را مولفه‌ی نرمال بردار می‌نامیم. به طور مشابه، یک بردار در یک نقطه از رویه را می‌توان با روند مشابه تجزیه کرد.

فرض کنید S یک رویه باشد و x نقطه‌ای روی این رویه باشد. هم‌چنین، فرض کنید V، برداری در نقطه‌ی x باشد. آن‌گاه می‌توان V را به صورت منحصربه‌فردی به صورت زیر نوشت:

$$V = V_{||} + V_{\perp}$$

که در آن، بردار اول در مجموع، بیان‌کننده‌ی مولفه‌ی مماسی و بردار دوم، بیان‌کننده‌ی مولفه‌ی نرمال می‌باشند. طبق تعریف، این دو بردار بر یکدیگر عمود هستند.

برای محاسبه‌ی مولفه‌های مماسی و نرمالی، فرض کنید $\widehat{n}$، بردار نرمال واحد در رویه باشد، یعنی $\widehat{n}$ بر رویه‌ی S در نقطه‌ی x عمود باشد. آن‌گاه

$$V_{\perp} = (V.\widehat{n})\widehat{n},$$

هم‌چنین:

$$V_{||} = V - V_{\perp},$$

که در آن، "."، بیانگر حاصل‌ضرب نقطه‌ای می‌باشد. فرمول دیگری که برای مولفه‌ی مماسی، می‌توان در نظر گرفت، به صورت زیر می‌باشد:

$$V_{||} = -\widehat{n} \times (\widehat{n} \times V),$$

که در آن، " $\times$ " بیانگر حاصل‌ضرب خارجی می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲. اگر Ω زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، $C(\Omega)$ فضای توابع پیوسته را روی Ω نشان می‌دهد. اگر Ω باز باشد و k یک عدد صحیح مثبت باشد $C^k(\Omega)$ عبارت است از فضای توابع پیوسته روی Ω که تمامی مشتقات جزئی تا مرتبه‌ی kام آن موجود و پیوسته می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱۳. یک معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ عبارت است از معادله‌ای که مجهول آن تابعی مانند U به قلمرو Ω می‌باشد.

۱.۲ روش‌های بدون مش‌بندی

بسیاری از مسائل فیزیکی که با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند، به صورت تحلیلی قابل حل نبوده و برای حل آنها می‌بایست از روشهای عددی کمك گرفت. اساساً در روش‌های عددی متداولی که مورد استفاده قرار می‌گیرند، قبل از هر کاری می‌بایست دامنه‌ی مسئله را مش‌بندی نمود. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش عناصر متناهی [1] اشاره کرد. ایده‌ی اولیه‌ی این روش، جایگزینی یك تابع تقریب موضعی به جای تابع جواب اصلی در هر المان است. اما تقسیم بندی کل دامنه، به المان های به هم چسبیده، یك فرآیند پیچیده و زمان‌بر است. علاوه بر آن، بعضی مسائل وجود دارند که تحلیل آنها به کمك روش عناصر متناهی امکان پذیر نمی‌باشد. لذا می‌توانند در حل این گونه مسائل روش‌های بدون مش [2] [۱۶] کارآیی بیشتری داشته باشند.

عدم نیاز به مش بندی دامنه‌ی محاسباتی، خصوصیت اصلی این روش‌هاست. به طور کلی، در روش های بدون مش، همانند روش عناصر متناهی، برای به‌دست آوردن میدان‌ها در محدوده‌ی بین

[1] Finite Element

[2] Mesh Free Methods

گره‌ها از یك تابع تقریب استفاده می‌شود. به این منظور از تعدادی توابع پایه برای تخمین میدان در بین گره‌ها، براساس مقادیر دقیق گره‌ها، کمك گرفته می‌شود تا در نهایت تابع شکل [۳] تولید گردد. تولید توابع شکل، از مهمترین موضوعات در روش‌های بدون شبکه به حساب می‌آید و تحقیقات در رابطه با تولید توابع شکل تنها با استفاده از یک سری نقاط پراکنده اختیاری در حوزه‌ی مسئله و بدون استفاده از هرگونه مش‌بندی از پیش تعیین شده از مهمترین مباحث در زمینه‌ی روش‌های بدون شبکه می‌باشد. به طور کلی روش‌های محاسبه توابع شکل را می‌توان به سه گروه تقسیم بندی کرد:

الف- روش‌های که بر مبنای استفاده از سری‌های محدودند (مانند MLS [۴]).

ب- روش‌های که از انتگرال گیری محدود استفاده می‌کنند (مانند $RPIM$ [۵]).

ج- روش‌های که از فرمول‌بندی تفاضل‌های محدود استفاده می‌کنند (مانند $PPIM$ [۶]).

با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن یك روند مشخص در هر گروه، در نهایت توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع، متناسب با نوع تابع پایه‌ی به کار گرفته شده، دارای خصوصیات خاصی هستند.

۳.۱ تابع خطا

یکی از توابعی که در حل معادله رسانش گرمایی با روش تبدیل لاپلاس پیش می‌آید، تابع خطا، $erfx$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

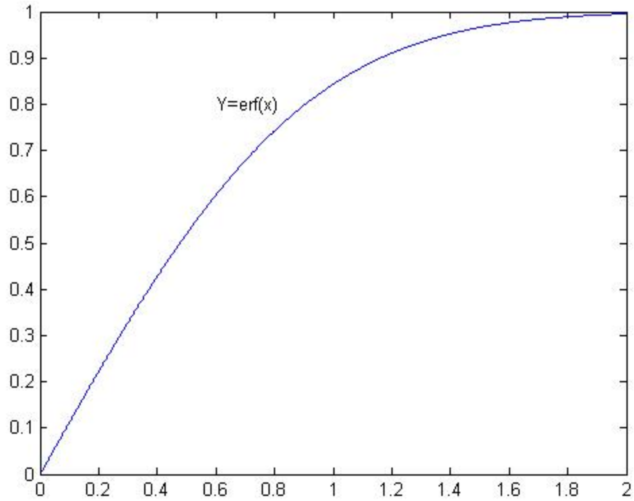
$$erfx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

[۳] Shape Function

[۴] Moving Least Square

[۵] Radial Point Interpolation Method

[۶] Polynomial Point Interpolation Method



نمودار $erfx$ در شکل بالا نشان داده شده است این تابع به ازای مقادیر بزرگ x طبق فرمول استاندارد زیر بطرف عدد یک میل می‌کند.

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-u^{۲}} \mathrm{d}u = \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$$

مکمل تابع خطای $erfx$، که به صورت

$$erfcx = ۱ - erfx = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-u^{۲}} \mathrm{d}u$$

تعریف می‌شود در برخی از مسائل مقدار مرزی بصورت $erfc(\frac{a}{۲\sqrt{x}})$ پیش می‌آید که در آن a یک ثابت حقیقی است.

۴.۱ روش‌های بدون‌مش بندی

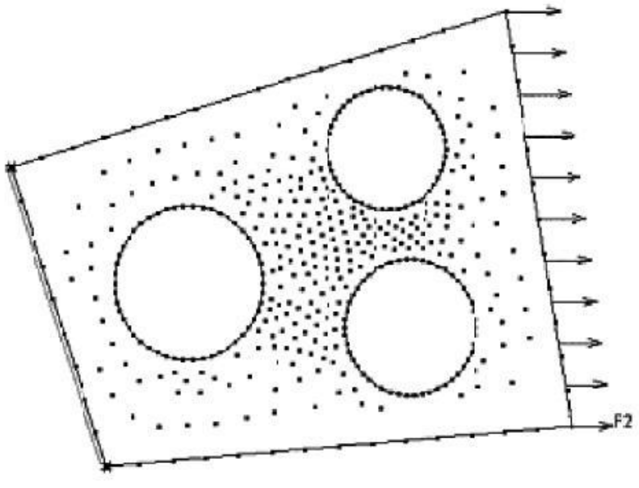
در این قسمت، روند عمومی روش‌های بدون مش‌بندی را در حل مسائل مکانیکی به طور خلاصه بیان می‌کنیم

۱.۴.۱ گام‌های اولیه

گام اول: نمایش دامنه

ابتدا ساختار جسم جامد را مدل‌بندی می‌کنیم و با به کار بردن مجموعه‌ای از گره‌ها که در دامنه‌ی مسئله و مرز آن پراکنده شده‌اند، ساختار آن را مشخص می‌کنیم. سپس شرایط مرزی در مدل مش‌بندی تعیین می‌شوند، همانگونه که در شکل(۱) نشان داده شده است، تراکم گره‌ها به دقت مورد نیاز و ابزار در دسترس بستگی دارد. توزیع گره‌ها، معمولاً یکنواخت نیست و اغلب توزیع متراکم گره‌ها در نواحی به کار می‌رود که شیب جابه‌جایی بزرگتری دارند. از آنجایی که الگوریتم‌های قابل قبول برای روش بدون مش‌بندی به کار می‌رود، در نهایت به طور اتوماتیک‌وار و سازگار با دستورالعمل‌های روش‌های بدون مش‌بندی کنترل می‌شود. از این رو، نیازی نیست که راجع به کیفیت توزیع گره‌های اولیه‌ای که به کار می‌رود نگران باشیم. به علاوه، به عنوان روش بدون مش‌بندی، نباید نیاز زیادی به الگوی توزیع گره‌ها داشته باشیم. بنابراین می‌توانیم گره‌های توزیع شده‌ی دلخواهی را برگزینیم.

از آنجایی که گره‌ها، مقدار متغیرهای میدان را در فرمول بندی بدون مش‌بندی رقم می‌زنند، اغلب آنها را گره‌های میدان می‌گوییم.



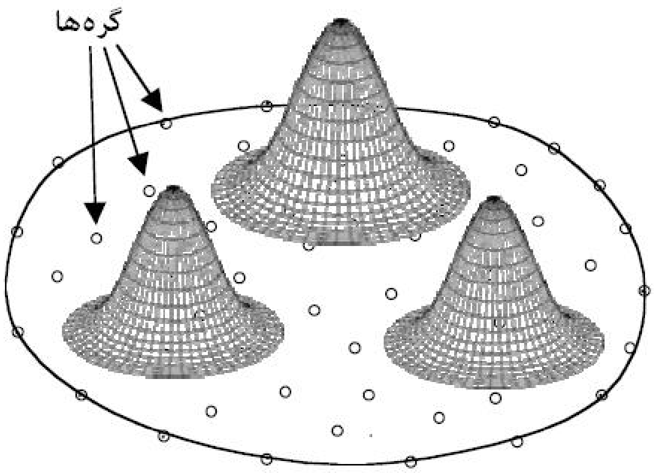
شکل ۱: مثالی از مدل بدون مش‌بندی برای اجسام دو بعدی با کار بردن مش‌بندی دو بعدی

گام دوم: درون‌یابی تغییر مکان

از آنجایی که در روش بدون مش‌بندی، مش‌بندی از عناصر به کار نمی‌رود، متغیر میدان (مولفه تغییر مکان) u در هر نقطه‌ی $\mathbf{x}$ در درون دامنه‌ی مسئله با به کار گرفتن تغییر مکان‌ها در گره‌هایش درون دامنه‌ی اتکا در نقطه‌ی $\mathbf{x}$ درون یابی می‌شود. یعنی

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\mathbf{x}) u_i = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \qquad (1.1)$$

که در آن n تعداد گره‌هایی است که مشمول دامنه‌ی موضعی کوچک در نقطه $\mathbf{x}$ می‌باشد، u_i متغیر میدان گرهی در $i-$امین گره در دامنه‌ی موضعی کوچک می‌باشد، $\mathbf{U}_s$ برداری است که در برگیرنده‌ی تمامی متغیرهای میدان در این گره‌ها می‌باشد و $\phi_i(\mathbf{x})$ تابع شکل $i-$امین گره است که توسط گره‌هایی که مشمول در دامنه‌ی کوچک از $\mathbf{x}$ هستند، تعیین می‌شود. این دامنه موضعی کوچک را دامنه‌ی اتکای $\mathbf{x}$ می‌نامیم. یک دامنه‌ی اتکا از نقطه‌ی $\mathbf{x}$، تعداد گره‌هایی را که باید به کار گرفته شود تا مقدار تابع را در $\mathbf{x}$ تقریب بزنیم، تعیین می‌کند. یک دامنه‌ی اتکا را می‌توان با به کار بردن توابع وزن، وزن‌دار کرد، همان گونه که در شکل (۲) نشان داده شده است که می‌تواند شکل‌های متفاوتی داشته باشد، همان گونه که در شکل (۳) نشان داده شده است. شکل‌هایی که به کار گرفته می‌شوند اغلب به شکل دایره یا مستطیل می‌باشند



شکل ۲: دامنه‌ی ارائه شده در حالت دو بعدی و گره‌های موضعی وزن‌دار در دامنه اتکا