



دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

کاربرد توابع فوق هندسی بر مبنای طرح Askey در

فیزیک انرژی های بالا

توسط:

حمید رضا شریفی نژاد

اساتید راهنما

ابوالفضل میرجلیلی

مهرداد قمی نژاد

بهمن ۱۳۸۹



دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک

تحت عنوان

کاربرد توابع فوق هندسی بر مبنای طرح **Askey** در فیزیک انرژی های بالا

ارائه شده توسط:

حمید رضا شریفی نژاد

در تاریخ ۲۷ بهمن ماه ۱۳۸۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت:

دکتر ابوالفضل میرجلیلی

۱- اساتید راهنما

دکتر مهرداد قمی نژاد

دکتر حسین مهربان

۲- استاد مشاور

دکتر علی نقی خرمیان

۳- استاد داور داخلی

دکتر نصرت الله جعفری

۴- استاد مدعو

## قدردانی

جا دارد در اینجا از اساتید راهنمایم جناب آقای دکتر میرجلیلی و آقای دکتر مهرداد قمی نژاد که زحمت راهنمایی پایانامه اینجانب را صبورانه به عهده گرفتند تشکر نمایم.

همچنین از قبول زحمت داوری این پایان نامه توسط اعضای هیئت محترم داوران جناب آقای دکتر علی خرمیان و دکتر نصرت الله جعفری قدر دانی نمایم.

## کاربرد توابع فوق هندسی بر مبنای طرح Askey در فیزیک انرژی های بالا

### چکیده

معادلات تحولی DGLAP برای بخش غیر یکتا، یکتا و همچنین توزیع های گلوونی در فضای بیورکن بر اساس بسط چند جمله ای لاگر بعنوان یکی از چند جمله ائی های فوق هندسی حل گردیده است. دقت بالای عددی در محاسبات با در نظر گرفتن حدود ۳۰ عدد از این چندجمله ای به دست می آید. نتیجه توزیع های پارتونی تحول یافته به مقیاس بالای انرژی در توافق خوبی با نتایج مدل پدیده شناسی GRV است. واژه های کلیدی: معادله تحولی آلترالی - پارسی، چند جمله ای های لاگر، پدیده شناسی

# فهرست مندرجات

۱	۱ مکانیک کوانتوم نسبیتی
۱-۱	۱-۱ معادله کلاین - گوردن
۱-۱-۱	۱-۱-۱ جواب در مختصات فضایی
۱-۱-۲	۱-۱-۲ جریان احتمال
۱-۱-۳	۱-۱-۳ معادله دیراک
۱-۲-۱	۱-۲-۱ جواب ذره آزاد
۱-۳	۱-۳ جواب های معادله دیراک
۱-۴	۱-۴ هموردای دو خطی
۱-۵	۱-۵ فوتون
۱-۶	۱-۶ تعبیر دیراک و فاینمن
۲۴	۲ الکترو دینامیک کوانتومی
۲۴-۱	۲-۱ الکترون در میدان های الکترومغناطیس $A^{\mu}$
۲۶-۲	۲-۲ پراکندگی "الکترون-میون" بدون در نظر گرفتن عامل اسپینی
۲۹-۲	۲-۲ سطح مقطع پراکندگی بر حسب دامنه ناوردایی $\Pi$

- ۳۲..... ۴-۲ طول عمر ها و سطح مقطع ها
- ۳۵..... ۵-۲ قاعده طلایی
- ۳۷..... ۶-۲ قاعده فاینمن بعنوان یک ابزار ریاضی سودمند

### ۴۲ ۳ نظریه فرمول بندی لاگرانژی

- ۴۲..... ۱-۳ اصل هامیلتونی
- ۴۴..... ۲-۳ بقای انرژی
- ۴۶..... ۳-۳ سیستم های پیوسته
- ۴۸..... ۴-۳ نظریه میدان هموردای لورنتس
- ۴۹..... ۵-۳ تانسور انرژی اندازه حرکت
- ۵۲..... ۶-۳ میدان نرده ای مختلط

### ۵۴ ۴ نظریه کوانتومی رنگ ها

- ۵۴..... ۱-۴ برهم کنش های الکترون-کوارک
- ۵۵..... ۲-۴ تولید هادرون در پراکندگی  $e^+e^-$
- ۶۲..... ۳-۴ الگوی پارتونی و مقیاس بندی بیورکن
- ۶۶..... ۴-۴ توابع توزیع کوارک ها
- ۷۰..... ۵-۴ برهم کنش های کوارک-کوارک
- ۷۳..... ۶-۴ نابودی زوج در  $QCD$
- ۷۷..... ۷-۴ آزادی مجانبی

۸-۴ کاربردهای QCD ..... ۸۰

## ۵ معادله تحولی پارتونی ..... ۸۳

۱-۵ نقش دوگانگی گلئون ها ..... ۸۳

۲-۵ فرایند گیر اندازی  $\gamma^*$  - پارتون در پراکندگی ناکشسان عمیق ..... ۸۶

۳-۵ مروری دوباره بر مدل پارتونی ..... ۸۸

۴-۵ سطح مقطع تابش گلئونی ..... ۸۹

۵-۵ نقص مقیاس بندی بیورکن و معادله آترالی - پارسی ..... ۹۵

۶-۵ تولید جفت های گلئونی ..... ۹۹

۷-۵ معادلات کامل تحولی برای چگالی های پارتونی ..... ۱۰۰

۸-۵ تعبیر فیزیکی توابع پارتونی ..... ۱۰۱

## ۶ توابع فوق هندسی بر مبنای طرح Askey ..... ۱۰۳

۱-۶ مقدمه ..... ۱۰۳

۲-۶ انواع نمایش های توابع فوق هندسی ..... ۱۰۴

۳-۶ تعریف های توابع فوق هندسی ..... ۱۰۵

۴-۶ ویژگی های توابع فوق هندسی ..... ۱۰۷

۵-۶ طرح Askey ..... ۱۰۹

## ۷ معادله تحولی پارتونی ..... ۱۱۲

۱۱۲	۱-۷ مقدمه
۱۱۳	۲-۷ ثابت جفت شدگی رونده
۱۱۳	۳-۷ معدلات تحولی پارتونی
۱۱۷	۴-۷ عملگر تحول برای حالت های غیر منفرد
۱۱۸	۵-۷ چند جمله ای های لاگر
۱۱۹	۶-۷ حل تحلیلی برای استخراج عملگر تحول
۱۲۹	۷-۷ نتیجه گیری



## لیست اشکال

- ۱.۱ تعبیر فاینمن برای انرژی منفی. . . . . ۲۳
- ۱.۲ نمودار فاینمن. . . . . ۲۶
- ۲.۲ پراکندگی الکترون از پتانسیل الکترومغناطیسی  $A^\mu$ . . . . . ۲۷
- ۳.۲ پراکندگی الکترون-میوان. . . . . ۲۸
- ۴.۲ پراکندگی میوان - الکترون بدون اسپین تا مرتبه  $e^2$ . . . . . ۲۹
- ۵.۲ پراکندگی از پتانسیل تثبیت شده. . . . . ۳۴
- ۶.۲ نمودار فاینمن مربوط به جذب یا دفع فوتون توسط الکترون. . . . . ۳۷
- ۷.۲ یک راس اولیه که سه ذره  $A, B$  و  $C$  به وسیله آن با هم برهم کنش می کنند. . . . . ۳۸
- ۸.۲ نمودار فاینمن مربوط به مرتبه اول تصحیح. . . . . ۳۹
- ۹.۲ نمودار پراکندگی ذرات همسان. . . . . ۳۹
- ۱۰.۲ نمودارهای متفاوت مربوط به پراکندگی ذرات  $A, B$ . . . . . ۳۹
- ۱۱.۲ یک نمونه نمودار فاینمن، خطوط خارجی علامت گذاری شده اند. . . . . ۴۰
- ۱.۳ نمایشی از مسیر در فضای  $q$  که توسط معادله حرکت تعیین شده است (خط پیوست) و یک مسیر در همسایگی آن (خط چین). . . . . ۴۳
- ۲.۳ حرکت حقیقی ریمان بین یک جابجایی اولیه  $\phi(x, t_1)$  و جابجایی نهایی  $\phi(x, t_2)$  یک سطح در فضا زمان تولید می کند. . . . . ۴۷
- ۱.۴ نمودار فاینمن برای تولید هادرون ها در پراکندگی الکترون - پوزیترون. . . . . ۵۵
- ۲.۴ نمودار فاینمن برای پراکندگی الکترون - پروتون. . . . . ۵۵
- ۳.۴ یک نمودار از رویداد دو فواره ای. . . . . ۵۶
- ۴.۴ یک نمودار از رویداد سه فواره ای. . . . . ۵۶
- ۵.۴ یک نمودار برای زوج کوآرک - پاد کوآرک که منشاء گلئون دارد. . . . . ۵۷
- ۶.۴  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q + \bar{q}$ . . . . . ۵۸
- ۷.۴  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ . . . . . ۵۸
- ۸.۴ R برحسب انرژی الکترون ( برحسب GeV) رسم شده است. . . . . ۶۱

۹.۴	رفتار مقیاس بندی تابع ساختار $W^2$ در پراکندگی ناکشسان عمیق برای $x = 0.25$ .....	۶۲
۱۰.۴	توابع مقیاس و رابطه کالان - گروس .در( الف ) و (ب) اندازه گیری های تجربی $F_1(x)$ و $F_2(x)$ رسم شده است. (ج) نسبت $2x \frac{F_1}{F_2}$ نسبت به $x$ برای آزمون کالان- گروس رسم شده است که به وضوح برای $x > 0.2$ به خوبی برقرار است. ....	۶۴
۱۱.۴	توابع توزیع کوآرک.....	۶۷
۱۲.۴	زوج کوآرک - پاد کوآرک تولید شده از گلئون.....	۶۹
۱۳.۴	نمودار فاینمن برای پراکندگی کوآرک - کوآرک.....	۷۰
۱۴.۴	نمودار فاینمن برای پراکندگی کوآرک - کوآرک.....	۷۳
۱۵.۴	نمودار فاینمن مربوط به پراکندگی کوآرک - پادکوآرک به گلئون - گلئون.....	۷۴
۱۶.۴	نمودار فاینمن مربوط به پراکندگی کوآرک - پادکوآرک در مرتبه بالای تصحیح.....	۷۷
۱۷.۴	پراکندگی کوآرکی همره با تابش گلئونی.....	۸۱
۱.۵	بیان تصویری مدل پارتونی $ep \rightarrow eX$ .....	۸۴
۲.۵	سهم $O(\alpha_s)$ مربوط به پراکندگی $ep \rightarrow en$ .....	۸۵
۳.۵	سهم پراکندگی سخت گلوئون ابتدیی.....	۸۵
۴.۵	نمودار مدل پارتونی برای $q \rightarrow q^* q$ تولید می کند .....	۸۶
۵.۵	قرار دادن $qg \rightarrow q^* q$ در $X$ .....	۸۷
۶.۵	خطوط رنگ برای $qg \rightarrow q^* q$ .....	۹۰
۷.۵	سیستم مرکز جرم برای $q_1^* q$ .....	۹۲
۸.۵	سطح مقطع دیفرانسیلی تولید هادرون مربوط به برخورد نوترینو - نوکلئون $\nu N$ نسبت به اندازه حرکت عرضی $(p_T)$ ، نمودارهای خط چین بدون در نظر گرفتن تشعشع گلئونی می باشد.عرضی .....	۹۴
۹.۵	برخورد فوتون - کوآرک و تولید گلوئون - کوآرک در سیستم مرکز جرم.....	۹۵
۱۰.۵	ساختار کوآرکی پروتون که توسط فوتون های مجازی که $Q^2$ آن افزایش یافته است دیده می شود.....	۹۸
۱.۶	نمایشی از طرح Askey .....	۱۱۰
۱.۷	تابع توزیع $u_v$ در انرژی های مختلف با استفاده از عملگر تحول و مقایسه آن با.....	۱۲۹

- ۲.۷ تابع توزیع  $d_v$  در انرژی های مختلف با استفاده از عملگر تحول و مقایسه آن با. ۱۳۰
- ۳.۷ تابع توزیع  $\bar{u}$  در انرژی های مختلف با استفاده از عملگر تحول. ۱۳۰
- ۴.۷ تابع توزیع  $\bar{d}$  در انرژی های مختلف با استفاده از عملگر تحول. ۱۳۱
- ۵.۷ تابع توزیع  $\bar{\sigma}$  در انرژی های مختلف با استفاده از عملگر تحول. ۱۳۱

## فصل ۱

# مکانیک کوانتومی نسبیتی

### ۱-۱ معادله کلاین گردن

معادله غیر نسبیتی شرودینگر را می توان با قرار دادن عملگرهای معادل انرژی و تکانه در معادله انرژی-تکانه غیر نسبیتی

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (1-1)$$

بدست آوریم یعنی

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad (2-1)$$

و

$$P \rightarrow -i\nabla \quad (3-1)$$

این عملگرهای دیفرانسیلی بدست آمده در تابع موج شرودینگر به کار می رود. برای معادله موج نسبیتی باید از رابطه صحیح جریان نسبیتی تکانه - انرژی شروع کنیم. انرژی و تکانه به عنوان مولفه های زمان و مکان چار بردار تکانه ظاهر می شوند

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) \quad (4-1)$$

که شرایط پوسته جرمی زیر را ارضاء میکند:

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (5-1)$$

چون انرژی و تکانه فقط مولفه های متفاوت یک چار بردار هستند، تلاش ما در نظریه نسبیتی براساس معادله زیر پایه گذاری می شود:

$$E = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6-1)$$

بعلاوه یک مشکل نیز در تعبیر ریشه مربعی عملگرها مشاهده می شود، کلاین - گوردن<sup>۱</sup> سعی در ساخت مکانیک کوانتوم نسبیتی (RQM) از معادله مربع انرژی کردند.

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (7-1)$$

و با استفاده از عملگرهای مربوط به  $\mathbf{p}$  و  $E$  داریم

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = (-\nabla^2 + m^2) \phi \quad (8-1)$$

این همان معادله کلاین - گوردن است. ما یک نمونه تابع موج اسکالر یک مولفه ای را در اینجا بررسی میکنیم،  $\phi(x, t)$  که برای بوزون با اسپین صفر مناسب است.

### ۱-۱-۱ جواب در مختصات فضایی

برحسب عملگر دالامبرین<sup>۲</sup>

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (9-1)$$

ما می توانیم معادله کلاین - گوردن را به شکل زیر بنویسیم

$$(\square + m^2) \phi(x, t) = 0 \quad (10-1)$$

<sup>۱</sup> Klien - Gordon

<sup>۲</sup> D'Alembertian operator

اجازه دهید که دنبال یک جواب موج تخت به شکل زیر باشیم

$$\phi(x, t) = N e^{-i\epsilon t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = N e^{-ip\cdot x} \quad (11-1)$$

که در اینجا  $\mathbf{p}$  و  $x$  چاربردار هستند.

$$p\cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \quad (12-1)$$

که در اینجا  $N$  ضریب نرمالیزه کردن است. برای اینکه این تابع موج، یکی از جواب های معادله کلاین گوردن باشد، آنرا مستقیماً با جایگذاری  $E$  که باید با  $\mathbf{p}$  در رابطه زیر صدق کند بدست خواهیم آورد:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (13-1)$$

به نظر می رسد که به اندازه کافی بی ضرر باشد اما این رابطه بر این دلالت دارد که برای یک تکانه  $\mathbf{p}$  سه مولفه ای دو جواب برای انرژی وجود دارد:

$$E = \pm (\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (14-1)$$

که شرودینگر و بقیه آن را به سرعت فهمیدند و این غیر ممکن است که از این جواب منفی بدون یافتن هیچ تناقضی صرف نظر کنیم. پس جواب انرژی منفی چه معنی می دهد؟

## ۱-۱-۲ جریان احتمال

در روش کاملاً مشابهی که برای معادله غیر نسبیتی شرودینگر داشتیم می توانیم قانون بقاء در معادله کلاین - گوردن برای جریان احتمال داشته باشیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (15-1)$$

با ضرب دور طرف در  $\phi^*$  و با کم کردن آن از حاصل ضرب  $\phi$  در معادله همیوغ خواهیم داشت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (16-1)$$

که

$$\rho = i \left[ \phi^* \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \phi \right] \quad (17-1)$$

و

$$\mathbf{j} = i^{-1}[\phi^* (\nabla\phi) - (\nabla\phi^*)\phi] \quad (18-1)$$

به طور صریح نماد گذاری چار بردار این معادله این می شود که

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (19-1)$$

با

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (20-1)$$

جریان فضایی  $\mathbf{j}$  کاملاً شبیه جریان شرودینگر است، اما برای نمونه کلاین - گوردن چگال احتمال شامل مشتق زمانی نیز است، چون معادله کلاین - گوردن نسبت به  $\frac{\partial}{\partial t}$  از درجه دوم است. این یعنی اینکه  $\rho$  دیگر الزاماً مثبت تعریف نخواهد شد. پس چگونه می توان  $\rho$  را به عنوان چگالی احتمال معرفی کنید؟ می توانیم ببینیم که این مسئله به طور کامل برای جواب های موج تخت به شکل

$$\phi(x, t) = N e^{-iEt + ip \cdot x} \quad (21-1)$$

است که

$$\rho = 2|N|^2 E \quad (22-1)$$

و  $E$  میتواند مثبت باشد یا منفی یعنی علامت  $\rho$  همان علامت انرژی است.

## ۲-۱ معادله دیراک

در مورد معادله کلاین - گوردن واضح است که چرا این مشکلات بوجود آمده است.

الف) در ساختن معادله موج از مربع رابطه انرژی-تکانه

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (23-1)$$

استفاده شده است. این رابطه اجازه می دهد که انرژی منفی داشته باشد.

ب) معادله کلاین - گوردن یک جمله  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  دارد. این به یک معادله پیوستگی با یک چگالی انرژی که شامل  $\frac{\partial}{\partial t}$  است منجر می شود و از این رو احتمال منفی می شود. برای بدست آوردن تعریف مثبت چگالی انرژی،  $\rho \geq 0$

احتیاج به یک معادله خطی بر حسب  $\frac{\partial}{\partial t}$  داشت، پس برای ناوردایی نسبیتی، معادله باید نسبت به  $\nabla$  نیز خطی باشد. معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ i \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta m \right] \psi(x, t) \quad (24-1)$$

$$= (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi$$

چيست؟ برای پیدا کردن ویژگی های  $\alpha$  و  $\beta$ ، به بررسی ویژگی های معادله موج نسبیتی می پردازیم.

الف) رابطه نسبیتی جریان بین  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{p}$

$$E = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (25-1)$$

ب) معادله باید تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باقی بماند. شرط دوم را در اینجا بررسی نمی کنیم. برای حل شرط الف در حقیقت دیراک تقاضا کرد که تابع موج  $\psi$  شرایط کلاین - گوردن را نیز ارضا کند

$$\frac{-\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2) \psi \quad (26-1)$$

ما نیز توجه می کنیم که هنوز انرژی منفی داریم. دیراک یک موفقیت قابل توجه بدست آورد که یک پیروزی برای فیزیک نظری بود. اکنون می توانیم شرایط حاکم بر  $\alpha$  و  $\beta$  را بدست آوریم.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (27-1)$$

در اینجا دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi &= (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi \\ &= -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x_i)^2} - \sum_{i,j=1}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \\ &\quad - i m \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \beta^2 m^2 \psi \end{aligned} \quad (28-1)$$

اما فرض می کنیم شرایط دیراک را نیز ارضا می کند

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + m^2 \psi \quad (29-1)$$



پس این بدیهی است که  $\alpha$  و  $\beta$  نمی توانند کمیت های معمولی کلاسیک جابجا پذیر باشند. در عوض آنها باید شرایط پاد جابجا پذیری زیر را ارضا کنند که بصورت

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (30-1)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (31-1)$$

است. بعلاوه باید داشته باشیم که

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad (32-1)$$

نمایش ماتریس های پائولی را با رابطه های پاد جابه جایی آنها برای ذرات غیر نسبیتی با اسپین  $\frac{1}{2}$  را بیاد آورید، این طبیعی است که  $\alpha$  و  $\beta$  به عنوان ماتریس روی بردار ستونی ( اسپینور<sup>۳</sup> ) اعمال شوند. پس معادله دیراک یک ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  فرد را بیان می کند. این مشکل نیست که اثبات کنیم کوچکترین بعد ممکن ماتریس که شرایط دیراک را ارضامی کند  $4 \times 4$  است. انتخاب های قراردادی برای  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت زیر است

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (33-1)$$

که این ماتریس های  $4 \times 4$  را به صورت یک ماتریس قطعه قطری  $2 \times 2$  هستند، در اینجا  $\sigma_i$  همان ماتریس های پائولی هستند و ۱ ماتریس واحد است. برای مثال

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (34-1)$$

است. اگر دقت کنید خواهید دید که ماتریس های بالا شرایط زیر را نیز ارضامی کنند

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (35-1)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (36-1)$$

$$\beta^2 = 1 \quad (37-1)$$

---

<sup>۳</sup>Spinor

که  $\{A, B\}$  مساوی  $AB + BA$  است و ۱ ماتریس واحد  $4 \times 4$  است. توجه کنید که انتخاب  $\alpha$  و  $\beta$  منحصر به فرد نیست. در حقیقت تمام ماتریس های  $4 \times 4$  که شرایط زیر را ارضاء کنند می توانند جواب ما باشند.

$$\alpha_i' = U \alpha_i U^{-1} \quad (38-1)$$

$$\beta' = U \beta U^{-1} \quad (39-1)$$

برای اغلب قسمت ها ما از بیان استاندارد بالا استفاده می کنیم، اما در برخی موارد برای راحتی از بقیه نمایش ها که در آن  $\beta$  دیگر قطری نیست استفاده می کنیم.

### ۱-۲-۱ جواب ذره آزاد

چون هامیلتونی دیراک هم اکنون شامل ماتریس های  $4 \times 4$  است، این روشن است که باید تابع موج دیراک  $\psi$  را به عنوان یک بردار ستونی ۴ مؤلفه ای بیان کنیم که به اسپینورهای دیراک مشهورند. اجازه دهید نگاهی به شکل صریح جواب ذره آزاد بیاندازیم. با مقایسه با نمونه غیر نسبیتی، اسپینور کلی اسپین -  $\frac{1}{2}$  را بر حسب مضربی از جواب ها می نویسیم.

$$\psi = \chi \cdot (\text{plane wave}) \quad (40-1)$$

که  $\chi$  یک اسپینور دو مؤلفه ای است. پس دنبال جواب های معادله دیراک به شکل زیر هستیم

$$\psi = \omega e^{-i p \cdot x} \quad (41-1)$$

که  $\omega$  یک اسپینور ۴ مؤلفه ای است و  $e^{i p \cdot x}$  با  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  یک جواب موج تخت است. آن را درون معادله دیراک

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (42-1)$$

جایگذاری می کنیم که از ماتریس های  $\alpha^i$  و  $\beta$  استفاده شده است. برای استفاده از بلوک های  $2 \times 2$ ، بصورت قرار دادی اسپینور را به اسپینور دو مؤلفه ای  $\phi$  و  $\chi$  تقسیم بندی می کنیم.

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (43-1)$$

که با جایگذاری در معادله (۴۲.۱) خواهیم داشت:

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & -mI \end{pmatrix} \quad (44-1)$$

که دو معادله جفت شده برای  $\phi$  و  $\chi$  را بیان می کند.

$$(E - m)\phi = \sigma \cdot p \chi \quad (45-1)$$

$$(E + m)\chi = \sigma \cdot p \phi \quad (46-1)$$

اگر معادله بالا را برحسب  $\chi$  بنویسیم و اسپینور چهار مؤلفه ای خود را برحسب  $\chi$  باز نویسی کنیم خواهیم داشت:

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \phi \end{pmatrix} \quad (47-1)$$

در اینجا این سوال پیش می آید که چه رابطه ای بین  $\mathbf{p}$  و  $E$  وجود داشته باشد تا این جواب معادله دیراک باشد؟ اگر شکل  $\chi$  (46.1) را در (45.1) جایگذاری کنیم و بیاد آوریم که

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 I \quad (48-1)$$

برای هر  $\phi$  ای بدست خواهیم آورد که

$$(E - m)(E + m)\phi = \mathbf{p}^2 \phi \quad (49-1)$$

پس به یک نتیجه مشابه با معادله کلاین - گوردن رسیدیم که برای یک مقدار  $\mathbf{p}$  داده شده دو مقدار  $E$  مجاز است

$$E = \pm (\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (50-1)$$

یعنی حالت انرژی مثبت و منفی هنوز قابل قبول است.

$$\rho = \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (51-1)$$

اینجا  $\psi^\dagger$  بردار سطر همیوگ هریتی بردار ستونی  $\psi$  است. بر حسب مؤلفه ها

$$\rho = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (52-1)$$

پس

$$\rho = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2 > 0 \quad (53-1)$$

بنابراین می بینیم که  $\rho$  یک چگالی اسکالر است که به طور صریح به صورت مثبت تعریف شده است، این یک ویژگی است که برای یک چگالی احتمال به آن نیاز داشتیم. بعلاوه به یک قانون پایستگی احتیاج داریم که از معادله دیراک می آید، و نیز به یک جریان احتمال مطابق آن احتیاج داریم. در حقیقت با استفاده از معادله دیراک می توانیم اثبات کنیم که

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \alpha \cdot \nabla + \beta m) \psi \quad (54-1)$$

و همیوگ هر میتی آن بصورت

$$i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger (i \alpha \cdot \bar{\nabla} + \beta m) \quad (55-1)$$

است که طبق آن یک قانون پایستگی به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (56-1)$$

این نمایش  $\psi^\dagger \bar{\nabla}$  یک خلاصه نویسی برای ماتریس سطری است

$$\psi^\dagger \bar{\nabla} = \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \quad (57-1)$$

(یادآوری می شود که  $\psi^\dagger$  یک ماتریس سطری است). جریان احتمال برای معادله بالا

$$\mathbf{j}(x) = \psi^\dagger \alpha \psi \quad (58-1)$$

که یک بردار سه مؤلفه ای با مؤلفه های

$$(\psi^\dagger \alpha_1 \psi, \psi^\dagger \alpha_2 \psi, \psi^\dagger \alpha_3 \psi) \quad (59-1)$$

می باشد. پس تعبیر

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (60-1)$$

به عنوان جریان احتمال، بر خلاف جریان برای معادله کلاین-گوردن قابل قبول است.

### ۳-۱ جواب های معادله دیراک

اینک بدنال جواب های ساده معادله دیراک هستیم. ابتدا فرض کنید که  $\psi$  مستقل از مکان باشد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (61-1)$$

از دید معادله  $p_\mu \rightarrow i \partial_\mu$  عبارت بالا حالتی با تکانه صفر ( $\mathbf{p} = 0$ ) را توصیف می کند. پس معادله دیراک به معادله

زیر تبدیل می شود: