دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

کاربرد توابع فوق هندسی بر مبنای طرح Askey در فیزیک انرژی های بالا

توسط:

حمید رضا شریفی نژاد

اساتید راهنما

ابوالفضل میرجلیلی

مهرداد قمی نژاد

بهمن ۱۳۸۹

دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک

تحت عنوان

کاربرد توابع فوق هندسی بر مبنای طرح Askey در فیزیک انرژی های بالا

ارائه شده توسط:

حمید رضا شریفی نژاد

در تاریخ ۲۷ بهمن ماه ۱۳۸۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت:

۱- اساتید راهنما	دکتر ابوالفضل میرجلیلی
	دکتر مهرداد قمی نژاد
۲- استاد مشاور	دکتر حسین مهربان
۳- استاد داور داخلی	دکتر علی نقی خرمیان
۴- استاد مدعو	دکتر نصرت الله جعفری

قدردانی

جا دارد در اینجا از اساتید راهنمایم جناب آقای دکتر میرجلیلی و آقای دکتر مهرداد قمی نژاد که زحمت راهنمایی پایانامه اینجانب را صبورانه به عهده گرفتند تشکر نمایم.

همچنین از قبول زحمت داوری این پایان نامه توسط اعضای هیئت محترم داوران جناب آقای دکتر علی خرمیان و دکتر نصرت الله جعفری قدر دانی نمایم.

کاربرد توابع فوق هندسی بر مبنای طرح Askey در **فیزیک انرژی های بالا**

چکیده

معادلات تحولی DGLAP برای بخش غیر یکتا ، یکتا و همچنین توزیع های گلئونی در فضای بیورکن بر اساس بسط چند جمله ای لاگر بعنوان یکی از چند جمله ائی های فوق هندسی حل گردیده است. دقت بالای عددی در محاسبات با در نظر گرفتن حدود ۳۰ عدد از این چندجمله ای به دست می آید. نتیجه توزیع های پارتونی تحول یافته به مقیاس بالای انرژی در توافق خوبی با نتایج مدل پدیده شناسی GRV است .

واژه های کلیدی:معادله تحولی آلترالی – پاریسی ، چند جمله ای های لاگر، پدیده شناسی

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مکانیک کوانتومی نسبیتی

۱-۱ معادله کلاین گردن

معادله غیر نسبیتی شرودینگر را می توان با قرار دادن عملگرهای معادل انرژی و تکانه در معادله انرژی -تکانه غیر نسبیتی

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \tag{۱-۱}$$

بدست آوریم یعنی

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \tag{۱-۲}$$

و

$$P \rightarrow -i\nabla \tag{۱-۳}$$

این عملگرهای دیفرانسیلی بدست آمده در تابع موج شرودینگر به کار می رود. برای معادله موج نسبیتی باید از رابطه صحیح جریان نسبیتی تکانه - انرژی شروع کنیم. انرژی و تکانه به عنوان مولفه های زمان و مکان چار بردار تکانه ظاهر می شوند

$$p^{\mu} = \left(E, \mathbf{p}\right) \qquad (۱-۴)$$

که شرایط پوسته جرمی زیر را ارضاء میکند:

$$p^2 = p_{\mu}p^{\mu} = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \qquad (۱-۵)$$

چون انرژی و تکانه فقط مولفه های متفاوت یک چار بردارهستند، تلاش ما درنظریه نسبیتی براساس معادله زیر پایه گذاری می شود:

$$E = +\left(\mathbf{p}^2 + m^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱-۶)$$

بعلاوه یک مشکل نیز در تعبیر ریشه مربعی عملگرها مشاهده می شود، کلاین- گوردن[۱] سعی در ساخت مکانیک کوانتوم نسبیتی(RQM) از معادله مربع انرژی کردند.

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \qquad (۱-۷)$$

و با استفاده از عملگرهای مربوط به p وE داریم

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = \left(-\nabla^2 + m^2\right)\phi \qquad (۱-۸)$$

این همان معادله کلاین - گوردن است. ما یک نمونه تابع موج اسکالر یک مولفه ای را در اینجا بررسی میکنیم، $\phi(x,t)$ که برای بوزون با اسپین صفر مناسب است.

۱-۱-۱ جواب در مختصات فضایی

برحسب عملگر دالامبرین[۲]

$$\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \qquad (۱-۹)$$

ما می توانیم معادله کلاین - گوردن را به شکل زیر بنویسیم

$$\left(\Box + m^2\right)\phi\left(x,t\right) = 0 \qquad (۱-۱۰)$$

[۱] Klien – Gordon
[۲] D'Alembertian operator

اجازه دهید که دنبال یک جواب موج تخت به شکل زیر باشیم

$$\phi(x,t) = N\, e^{-i\varepsilon t + i\mathbf{p}.\mathbf{x}} = N\, e^{-ip.x} \qquad (۱۱-۱)$$

که در اینجا p و x چاربردار هستند.

$$p.x = p_\mu x^\mu = Et - p.x \qquad (۱۲-۱)$$

که در اینجا N ضریب نرمالیزه کردن است. برای اینکه این تابع موج، یکی از جواب های معادله کلاین گوردن باشد، آنرا مستقیما با جایگذاری Eکه باید با **p**در رابطه زیر صدق کند بدست خواهیم آورد:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \qquad (۱۳-۱)$$

به نظر می رسد که به اندازه کافی بی ضرر باشد اما این رابطه بر این دلالت دارد که برای یک تکانه **p** سه مولفه ای دو جواب برای انرژی وجود دارد:

$$E = \pm\left(\mathbf{p}^2 + m^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۴-۱)$$

که شرودینگر و بقیه آن را به سرعت فهمیدند واین غیر ممکن است که از این جواب منفی بدون یافتن هیچ تناقضی صرف نظر کنیم. پس جواب انرژی منفی چه معنی می دهد؟

۱-۱-۲ جریان احتمال

در روش کاملا مشابهی که برای معادله غیر نسبتی شرودینگر داشتیم می توانیم قانون بقاء در معادله کلاین – گوردن برای جریان احتمال داشته باشیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0 \qquad (۱۵-۱)$$

با ضرب دور طرف در $\phi^\star$ و با کم کردن آن از حاصل ضرب ϕ در معادله همیوغ خواهیم داشت

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \nabla.\mathbf{j} = 0 \qquad (۱۶-۱)$$

که

$$\rho = i\,[\phi^\star\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\phi^\star}{\partial t}\right)\phi] \qquad (۱۷-۱)$$

و

$$\mathbf{j} = i^{-1}[\phi^\star\left(\nabla\phi\right) - \left(\nabla\phi^\star\right)\phi] \tag{۱۸-۱}$$

به طور صریح نماد گذاری چار بردار این معادله این می شود که

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{۱۹-۱}$$

با

$$j^\mu = \left(\rho, \mathbf{j}\right) \tag{۲۰-۱}$$

جریان فضایی $\mathbf{j}$ کاملا شبیه جریان شرودینگر است، اما برای نمونه کلاین – گوردن چگال احتمال شامل مشتق زمانی نیز است، چون معادله کلاین - گوردن نسبت به $\frac{\partial}{\partial t}$ ازدرجه دوم است. این یعنی اینکه ρ دیگر الزاما مثبت تعریف نخواهد شد. پس چگونه می توان ρ رابه عنوان چگالی احتمال معرفی کنید؟ می توانیم ببینیم که این مسئله به طور کامل برای جواب های موج تخت به شکل

$$\phi(x,t) = N\, e^{-iEt + i\mathbf{p}.\mathbf{x}} \tag{۲۱-۱}$$

است که

$$\rho = 2\,|N|^2\, E \tag{۲۲-۱}$$

و E میتواند مثبت باشد یا منفی یعنی علامت ρ همان علامت انرژی است.

۱-۲ معادله دیراک

در مورد معادله کلاین - گوردن واضح است که چرا این مشکلات بوجودآمده است.

الف) در ساختن معادله موج از مربع رابطه انرژی- تکانه

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{۲۳-۱}$$

استفاده شده است. این رابطه اجازه می دهد که انرژی منفی داشته داشته باشد.

ب) معادله کلاین - گوردن یک جمله $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$دارد. این به یک معادله پیوستگی با یک چگالی انرژی که شامل $\frac{\partial}{\partial t}$ است منجر می شود و از این رو احتمال منفی می شود.برای بدست آوردن تعریف مثبت چگالی انرژی، $\rho \geq 0$،

احتیاج به یک معادله خطی بر حسب $\frac{\partial}{\partial t}$داشت، پس برای ناوردایی نسبیتی، معادله باید نسبت به ∇نیز خطی باشد. معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[i\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)+\beta m\right]\psi(x,t)$$
$$=\left(-i\,\alpha.\nabla+\beta m\right)\psi \qquad (۲۴-۱)$$

چیست؟ برای پیدا کردن ویژگی های α و β، به بررسی ویژگی های معادله موج نسبیتی می پردازیم.

الف) رابطه نسبیتی جریان بین E و $\mathbf{p}$

$$E=+\left(\mathbf{p}^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۵-۱)$$

ب) معادله باید تحت تبدیلات لورنتس ناوردا باقی بماند.شرط دوم را در اینجا بررسی نمی کنیم.برای حل شرط الف در حقیقت دیراک تقاضا کرد که تابع موج ψشرایط کلاین - گوردن را نیز ارضا کند

$$\frac{-\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(-\nabla^2+m^2\right)\psi \qquad (۲۶-۱)$$

ما نیز توجه می کنیم که هنوز انرژی منفی داریم. دیراک یک موفقیت قابل توجه بدست آورد که یک پیروزی برای فیزیک نظریبود. اکنون می توانیم شرایط حاکم بر α و β را بدست آوریم.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-i\,\alpha.\nabla+\beta m\right)\psi \qquad (۲۷-۱)$$

دراینجا دو طرف را به توان ۲ میرسانیم.

$$(i\frac{\partial}{\partial t})^2\psi=\left(-i\,\alpha.\nabla+\beta m\right)\left(-i\,\alpha.\nabla+\beta m\right)\psi$$
$$=-\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\frac{\partial^2\psi}{\left(\partial x_i\right)^2}-\sum_{i,j=1}^{3}\left(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j} \qquad (۲۸-۱)$$
$$-im\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\beta^2m^2\psi$$

اما فرض می کنیم شرایط دیراک را نیز ارضا می کند

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^{\,2}}+m^2\psi \qquad (۲۹-۱)$$

پس این بدیهی است که α و β نمی توانند کمیت های معمولی کلاسیک جابجا پذیر باشند. در عوض آنها باید شرایط پاد جابجا پذیری زیر را ارضا کنند که بصورت

$$\alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0 \qquad i=1,2,3 \tag{۳۰-۱}$$

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0 \qquad i,j=1,2,3, i\neq j \tag{۳۱-۱}$$

است. بعلاوه باید داشته باشیم که

$$\alpha_i^2=\beta^2=1 \tag{۳۲-۱}$$

نمایش ماتریس های پائولی را با رابطه های پاد جابه جایی آنها برای ذرات غیر نسبیتی با اسپین $\frac{1}{2}$ را بیاد آورید، این طبیعی است که α و β به عنوان ماتریس روی بردار ستونی (اسپینور[۳] (اعمال شوند. پس معادله دیراک یک ذره بااسپین $\frac{1}{2}$ فرد را بیان می کند.این مشکل نیست که اثبات کنیم کوچکترین بعد ممکن ماتریس که شرایط دیراک را ارضامی کند 4×4 است.انتخاب های قراردادی برای α و β به صورت زیر ا ست

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix} \qquad \beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{۳۳-۱}$$

که این ماتریس های 4×4 را به صورت یک ماتریس قطعه قطری 2×2 هستند، در اینجا σ_i همان ماتریس های پائولی هستند و ۱ ماتریس واحد است. برای مثال

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \tag{۳۴-۱}$$

است. اگر دقت کنید خواهید دید که ماتریس های بالا شرایط زیر را نیز ارضامی کنند

$$\{\alpha_i,\beta\}=0 \tag{۳۵-۱}$$

$$\{\alpha_i,\alpha_j\}=2\delta_{ij} \tag{۳۶-۱}$$

$$\beta^2=1 \tag{۳۷-۱}$$

---

[۳] Spinor

که $\{A,B\}$ مساوی $AB+BA$ است و۱ ماتریس واحد 4×4است. توجه کنید که انتخاب α و β منحصر به فرد نیست. در حقیقت تمام ماتریس های 4×4 که شرایط زیر را ارضاء کنند می توانند جواب ما باشند.

$$\alpha_{i'} = U\alpha_i U^{-1} \tag{۳۸-۱}$$

$$\beta' = U\beta U^{-1} \tag{۳۹-۱}$$

برای اغلب قسمت ها ما از بیان استاندارد بالا استفاده می کنیم، اما در برخی موارد برای راحتی از بقیه نمایش ها که در آن β دیگرقطری نیست استفاده می کنیم.

۱-۲-۱ جواب ذره آزاد

چون هامیلتونی دیراک هم اکنون شامل ماتریس های 4×4 است، این روشن است که باید تابع موج دیراک ψ را به عنوان یک بردار ستونی ۴ مؤ لفه ای بیان کنیم که به اسپینورهای دیراک مشهورند. اجازه دهید نگاهی به شکل صریح جواب ذره آزاد بیاندازیم. با مقایسه با نمونه غیر نسبیتی،اسپینور کلی اسپین - $\frac{1}{2}$ را بر حسب مضربی از جواب ها می نویسیم.

$$\psi = \chi.(plane\,wave) \tag{۴۰-۱}$$

که χ یک اسپینور دو مؤلفه ای است. پس دنبال جواب های معادله دیراک به شکل زیر هستیم

$$\psi = \omega e^{-i\,p.x} \tag{۴۱-۱}$$

که ω یک اسپینور ۴مؤلفه ای است و $e^{i\,p.x}$ با $p^\mu = (E,\mathbf{p})$ یک جواب موج تخت است. آن را درون معادله دیراک

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\,\alpha.\nabla + \beta m\right)\psi \tag{۴۲-۱}$$

جایگذاری می کنیم که از ماتریس های α^iو β استفاده شده است. برای استفاده از بلوک های 2×2، بصورت قرار دادی اسپینور را به اسپینوردو مؤلفه ای ϕ و χ تقسیم بندی می کنیم.

$$\omega = \begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{۴۳-۱}$$

که با جایگذاری در معادله (۴۲.۱) خواهیم داشت:

$$E\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & \sigma.p\\ \sigma.p & -mI\end{pmatrix} \tag{۴۴-۱}$$

که دو معادله جفت شده برای ϕ و χ را بیان می کند.

$$(E-m)\phi=\sigma.p\chi \tag{۴۵-۱}$$

$$(E+m)\chi=\sigma.p\phi \tag{۴۶-۱}$$

اگر معادله بالا را برحسب χ بنویسیم و اسپینور چهار مؤلفه ای خود را برحسب χ باز نویسی کنیم خواهیم داشت:

$$\omega=\begin{pmatrix}\phi\\ \dfrac{\sigma.p}{E+m}\phi\end{pmatrix} \tag{۴۷-۱}$$

در اینجا این سوال پیش می آید که چه رابطه ای بین $\mathbf{p}$ و E وجود داشته باشد تا این جواب معادله دیراک باشد؟ اگر شکل χ (۴۶.۱) را در(۴۵.۱) جایگذاری کنیم و بیاد آوریم که

$$(\sigma.\mathbf{p})^2=\mathbf{p}^2.I \tag{۴۸-۱}$$

برای هر ϕ ای بدست خواهیم آورد که

$$(E-m)(E+m)\phi=\mathbf{p}^2\phi \tag{۴۹-۱}$$

پس به یک نتیجه مشابه با معادله کلاین - گوردن رسیدیم که برای یک مقدار $\mathbf{p}$ داده شده دو مقدار Eمجازاست

$$E=\pm\left(\mathbf{p}^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۵۰-۱}$$

یعنی حالت انرژی مثبت و منفی هنوز قابل قبول است.

$$\rho=\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \tag{۵۱-۱}$$

اینجا $\psi^{\dagger}$ بردار سطری همیوغ هرمیتی بردار ستونی ψ است. بر حسب مؤلفه ها

$$\rho=\left(\psi_1^{\star},\psi_2^{\star},\psi_3^{\star},\psi_4^{\star}\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \tag{۵۲-۱}$$

پس

$$\rho=\sum_{i=1}^{4}|\psi_i|^2>0 \tag{۵۳-۱}$$

بنابراین می بینیم که ρ یک چگالی اسکالر استکه به طور صریح به صورت مثبت تعریف شده است، این یک ویژگی است که برای یک چگالی احتمال به آن نیاز داشتیم. بعلاوه به یک قانون پایستگی احتیاج داریم که از معادله دیراک می آید، ونیز به یک جریان احتمال مطابق آن احتیاج داریم. در حقیقت با استفاده از معادله دیراک می توانیم اثبات کنیم که

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(-i\,\alpha.\nabla+\beta m)\psi \qquad (۵۴-۱)$$

و همیوغ هرمیتی آن بصورت

$$i\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial t}=\psi(i\,\alpha.\overleftarrow{\nabla}+\beta m) \qquad (۵۵-۱)$$

است که طبق آن یک قانون پایستگی به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\nabla.\mathbf{j}=0 \qquad (۵۶-۱)$$

این نمایش $\psi^{\dagger}\overleftarrow{\nabla}$ یک خلاصه نویسی برای ماتریس سطری است

$$\psi^{\dagger}\overleftarrow{\nabla}=\frac{\partial\psi^{\dagger}}{\partial x} \qquad (۵۷-۱)$$

(یادآوری می شود که $\psi^{\dagger}$ یک ماتریس سطری است).جریان احتمال برای معادله بالا

$$\mathbf{j}(x)=\psi^{\dagger}\alpha\psi \qquad (۵۸-۱)$$

که یک بردار سه مولفه ای با مؤلفه های

$$\left(\psi^{\dagger}\alpha_1\psi,\psi^{\dagger}\alpha_2\psi,\psi^{\dagger}\alpha_3\psi\right) \qquad (۵۹-۱)$$

می باشد. پس تعبیر

$$j^{\mu}=\left(\rho,\mathbf{j}\right) \qquad (۶۰-۱)$$

به عنوان جریان احتمال، بر خلاف جریان برای معادله کلاین-گوردن قابل قبول است.

۳-۱ جواب های معادله دیراک

اینک بدنبال جواب های ساده معادله دیراک هستیم. ابتدا فرض کنیدکه ψ مستقل از مکان باشد:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \qquad (۶۱-۱)$$

از دید معادله $p_{\mu}\rightarrow i\,\partial_{\mu}$ عبارت بالا حالتی با تکانه صفر($\mathbf{p}=0$) را توصیفمی کند. پس معادله دیراک به معادله زیر تبدیل می شود: