بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک

گروه فیزیک

عنوان:

تصحیحات گرانش کوانتومی بر روی میدان‌های مادی در حضور یک کمینه طول

پایان‌نامه دکتری فیزیک

(گرایش نظری)

استاد راهنما :

دکتر سید کامران مویدی

استاد مشاور :

دکتر محمدرضا ستاره

تحقیق و نگارش :

حمزه معیری

سال ۱۳۹۱

تقدیم به همسرم

زیباترین بهانه برای زیستنم

نهایت سپاس و تشکر خود را نسبت به استاد راهنمای گرانقدرم

جناب آقای دکتر سید کامران مویدی

و

استاد مشاور فرهیخته‌ام

جناب آقای دکتر محمدرضا ستاره

ابراز می‌دارم که در طول تحقیق و نگارش پایان نامه مرا مورد لطف خویش قرار داده و حمایت‌های ایشان هموار کننده راه من بوده است .

همچنین زیباترین فرداها را برای تمامی دوستان و عزیزانم بویژه آقای بهروز خسروپور آرزومندم که خالق بهترین خاطراتم بوده‌اند.

چکیده

یکی از مسائل بنیادین در فیزیک نظری وحدت بخشی میان نظریه نسبیت عام اینشتین با مکانیک کوانتومی است. یکی از جالب توجه‌ترین پیامدهای این وحدت بخشی پیشگویی وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر از مرتبه بزرگی طول پلانک است. امروزه فیزیکدان‌های نظری می‌دانند که وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در اندازه گیری فواصل منجر به تعمیم اصل عدم قطعیت هایزنبرگ می‌گردد. در سال ۲۰۰۶ میلادی کوئیزنی (Quesne) و تکاچوک (Tkachuk) یک جبر لورنتس ناوردای دگرگون شده دو پارامتری (β, β') را در یک فضا—زمان $D+1$ بعدی معرفی نمودند که در آن وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در اندازه گیری فواصل پیشگویی شده بود. در این پایان نامه فرمول بندی لاگرانژی میدان اسپینوری در یک فضا—زمان $3+1$ بعدی بر اساس جبر کوئیزنی—تکاچوک در حالت $\beta' = 2\beta$ و تا مرتبه اول بر حسب پارامتر دگرگونش β مطالعه می‌شود. نشان می‌دهیم که معادله دیراک تعمیم یافته حاصل از این فرمول بندی که مشتقات مراتب بالاتر تابع موج را شامل می‌شود، دو ذره جرم دار با جرم های متفاوت را پیشگویی می‌کند. حالت های جرمی فیزیکی منجر به اعمال شرط $\beta < \frac{1}{8m^2c^2}$ بر روی پارامتر دگرگونش β می‌گردد. با به کار بردن این شرط برای الکترون کران بالایی برابر $3 \times 10^{-13}m$ برای کمینه طول همسانگرد در نظریه میدان اسپینوری تعمیم یافته بدست می آید.

در یک مجموعه از مقالات کمپف $(Kempf)$ و همکارانش یک جبر هایزنبرگ دگرگون شده دو پارامتری (β, β') را در یک فضای D بعدی معرفی نمودند که به یک کمینه طول مشاهده پذیر در اندازه گیری فواصل منجر می‌گردید. در این پایان نامه فرمول بندی لاگرانژی میدان الکتروستاتیک در فضای ۳ بعدی بر اساس جبر کمپف در حالت $\beta' = 2\beta$ و تا مرتبه اول بر حسب پارامتر دگرگونش β بررسی می‌شود. نشان می‌دهیم که میان الکتروستاتیک در حضور یک کمینه طول (الکتروستاتیک تعمیم یافته) و الکتروستاتیک با مشتقات مراتب بالاتر پودولسکی (Podolsky) مشابهت وجود دارد. یکی از ویژگی های مهم الکتروستاتیک تعمیم یافته آن است که خود—انرژی کلاسیک مربوط به یک بار نقطه‌ای در آن مقداری متناهی می‌گردد.

در این الکتروستاتیک تعمیم یافته دو کران بالای مختلف برای کمینه طول همسانگرد بدست می آید. نخستین کران بالا با در نظر گرفتن الکتروستاتیک تعمیم یافته به شکل یک سیستم الکترومغناطیسی کلاسیک بدست می آید در حالی که دومین کران بالا با در نظر گرفتن الکتروستاتیک تعمیم یافته به شکل یک نظریه میدان کوانتومی حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که کران بالای کوانتومی بر روی کمینه طول همسانگرد در الکتروستاتیک تعمیم یافته به مقیاس طول الکتروضعیف ($\ell_{electroweak} \sim ۱۰^{-۱۸} m$) نزدیک است.

واژه‌های کلیدی:

پدیده شناسی گرانش کوانتومی؛ اصل عدم قطعیت تعمیم یافته؛ کمینه طول؛ میدان اسپینوری؛ نظریه های میدان کلاسیک؛ الکترودینامیک کوانتومی

فهرست مطالب

فصل ۱ : فرضیه وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در فیزیک ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ مدل جهان شبکه ای هایزنبرگ ۵

۳.۱ تاثیر گرانش بر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و پیدایش کمینه طول ۷

فصل ۲ : تصحیحات گرانش کوانتومی بر روی میدان اسپینوری در حضور یک کمینه طول مشاهده‌پذیر بر اساس جبر کوئیزنی–تکاچوک ۱۲

۱.۲ مقدمه ۱۳

۲.۲ مروری بر جبر کمپف و جبر کوئیزنی–تکاچوک ۱۴

۳.۲ فرمول بندی لاگرانژی میدان اسپینوری بر اساس جبر کوئیزنی–تکاچوک ۲۳

۴.۲ پاسخ‌های موج تخت برای معادله دیراک تعمیم یافته ۲۷

۵.۲ برآورد مقدار عددی کمینه طول مشاهده‌پذیر در نظریه میدان اسپینوری تعمیم یافته ۳۳

فصل ۳ : تصحیحات گرانش کوانتومی بر روی میدان الکتروستاتیک در حضور یک کمینه طول مشاهده‌پذیر بر اساس جبر کمپف ۳۵

۱.۳ مقدمه ۳۶

۲.۳ فرمول‌بندی لاگرانژی میدان الکتروستاتیک با یک چگالی بار خارجی بر اساس جبر کمپف ۳۸
۳.۳ تابع گرین برای بار نقطه ای در الکتروستاتیک تعمیم یافته ۴۶
۴.۳ محاسبه انرژی پتانسیل کل برای یک توزیع بار پیوسته در الکتروستاتیک تعمیم یافته ۴۹
۵.۳ مثال ۵۳
۶.۳ برآورد مقدار عددی کمینه طول مشاهده‌پذیر در الکتروستاتیک تعمیم یافته ۵۵

فصل ۴ : نتیجه‌گیری ۵۸
ضمائم : مقالات مستخرج از پایان نامه ۶۱

کتاب نامه ۷۸

فصل ۱

فرضیه وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در فیزیک

امروزه فیزیکدانان، طبیعت را بوسیله نظریه های میدان کوانتومی در یک فضا—زمان چهار بعدی پیوستار توصیف می کنند. اگر چه مدت ها قبل از پیدایش نظریه کوانتومی برخی از فیزیکدانان و فلاسفه به عدم تقسیم پذیری فضا—زمان تا بی نهایت و وجود یک ساختار گسسته برای فضا—زمان باور داشتند اما برای نخستین بار در اوایل قرن بیستم میلادی بود که ایده وجود کوچک ترین بازه زمانی ممکن که به آن کرونون [۱] گفته می شود در فرضیه های فیزیکی مطرح گردید.

در این فصل مروری بر تاریخچه فرضیه وجود یک کمینه طول مشاهده پذیر در اندازه گیری فواصل خواهیم داشت [۱—۵]. از میان نظریه های گوناگونی که به وجود یک کمینه طول در اندازه گیری فواصل اشاره دارند می‌توان به نظریه ارائه شده توسط فیزیکدان آلمانی ورنر هایزنبرگ و فیزیکدان اتریشی آرتور مارچ [۲] اشاره کرد که در این فصل در کنار سایر نظریه ها، نظریه ارائه شده توسط این دو فیزیکدان را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار می دهیم.

---

[۱] chronon

[۲] Arthur March

۱.۱ مقدمه

بعد از توسعه سریع و موفقیت آمیز مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی فیزیکدانان تلاش کردند تا یک نظریه کوانتومی نسبیتی برای توصیف اندرکنشهای الکترومغناطیسی پایه گذاری کنند و در این جا بود که آنان با دور تازه ای از مسائل و معضلات روبرو گردیدند که قبلاً با آنها مواجه نشده بودند. بسیاری از فیزیکدانان باور داشتند که وقوع یک انقلاب کوانتومی جدیدی بر پایه برخی مفاهیم ریشه ای و نوین در راه است. مشکلات تا حدی به ویژگی منطقی و مفهومی آن و تا حدی به عدم توانایی نظریه برای توضیح وقایع جدید باز می گشت. دسته اول از مشکلات همان بحث نمادین بی نهایت شدن خود–انرژی بار نقطه ای بود. اگرچه بی نهایت شدن خود–انرژی بار نقطه ای همتایی نیز در فیزیک کلاسیک داشت، اما بعضی از این واگراییها دارای ماهیت غیر کلاسیک بودند و برای اولین بار بود که فیزیکدانان با آنها مواجه می شدند. برای مثال، رابرت اپنهایمر [۱] در سال ۱۹۲۹ یک خود–انرژی کوانتومی جدیدی را کشف کرد که به صورت درجه دو واگرا می شد و سبب تغییر مکان نامتناهی خطوط طیفی می گردید. بعلاوه نوع دیگری از واگرایی (فاجعه فرو سرخ) در اواخر دهه ۱۹۳۰ در ارتباط با تلاشهای انجام شده برای توضیح گسیل فوتون نرم در طی پراکندگی ذرات باردار از یکدیگر کشف گردید. دسته دوم از مشکلاتی که فیزیکدانان با آنها مواجه گردیدند مربوط به ناسازگاریهای آزمایشگاهی بود. کشف نوترون در سال ۱۹۳۲ و مزون در سال ۱۹۳۷ این امید را بوجود آورد که شاید پدیده های انرژی بالا بر پایه نظریه رایج قابل درک باشند. در اواخر دهه ۱۹۳۰ بسیاری از فیزیکدانان باور داشتند که الکترودینامیک کوانتومی در مقیاس های انرژی بالاتر از $۱۳۷mc^۲$ که m جرم الکترون می باشد، نظریه ای ناکارآمد خواهد بود.

بسیاری از فیزیکدانان برجسته از جمله بوهر، دیراک، هایزنبرگ، پائولی و لاندائو [۲] به یک رویکرد انقلابی اعتقاد داشتند. از دیدگاه آنان معضلات بوجود آمده در چارچوب نظریه کوانتومی موجود قابل حل نبوده و باید نظریه ای نوین بنا گردد که تفاوت این نظریه جدید با

---

[۱] Robert Oppenheimer

[۲] Landau

نظریه کوانتومی موجود شاید به اندازه تفاوت میان نظریه کوانتومی موجود با فیزیک کلاسیک باشد. دسته‌ای دیگر از فیزیکدانان که شاید بتوان آنها را فیزیکدانان عملگرا نامید، ضمن پذیرفتن نظریه کوانتومی به شکل موجود آن کوشیدند با معرفی روش های جدید تکنیکی و یا ارائه یک فرمول بندی مجدد و مناسب از نظریه کوانتومی موجود به پاسخ های قابل درک برای مسائل یافت شده دست یابند.

بطور کلی دیدگاه فیزیکدانان دهه ۱۹۳۰ میلادی نسبت به معضلات موجود در نظریه کوانتومی را می‌توان به چهار دسته به شرح زیر تقسیم کرد [۱]:

۱) گروهی از فیزیکدانان با افکار انقلابی ضمن پذیرفتن معضلات نظریه کوانتومی به عنوان حقایقی غیر قابل اجتناب کوشیدند که از این حقایق به عنوان سرنخی برای دستیابی به نظریه کوانتومی آرمانی اشان بهره جویند.

۲) گروه دیگری از فیزیکدانان بر روی اجتناب از واگراییها بدون تغییر در چارچوب نظریه موجود متمرکز شدند. یک راه انجام این کار صرفنظر کردن از سهم ناشی از فرکانسهای بالا در هنگام انجام محاسبات بود. فرآیندهای قطع [۱] در محاسبات عملی بسیار مفید بودند، اما از آنجایی که فاقد توجیه نظری بودند و ناوردایی نسبیتی نظریه را از بین می بردند به عنوان روشهایی صرفاً عملگرایانه دیده می شدند. روش دیگر برای استخراج نتایج قابل قبول فیزیکی مبتنی بر حذف یا تفریق جملات ناخواسته بوسیله تکنیکهای مناسب محاسباتی بود. این رویکرد در ابتدا توسط دیراک و هندریک کرامرز [۲] معرفی و سرانجام منجر به روشهای بازبهنجارش شوینگر، فاینمن و توموناگا [۳] گردید.

۳) دسته سوم فیزیکدانهایی بودند که می کوشیدند از طریق دست بردن مستقیم در نظریه

---

[۱] cutoff procedures

[۲] Hendrik Kramers

[۳] Tomonaga

کوانتومی یا تغییر در مبانی بنیادی نظریه های کلاسیک به نظریه هایی عاری از واگرایی دست یابند.

۴) دسته چهارم فیزیکدانهایی بودند که می گفتند بهتر است الکترودینامیک کوانتومی را رها کرده و بطور موقت از یک نظریه ساده تر یا حتی دسته ای از قواعد که به نتایج سازگار با تجربه می انجامند استفاده کرد.

کلیه تلاش های انجام شده در جهت معرفی یک کمینه طول در اندازه گیری فواصل یا ایده فضا—زمان گسسته را می توان به عنوان تلاش هایی در جهت حذف واگراییها از نظریه های میدان به شمار آورد. چنین تلاش هایی متعلق به دسته سوم طبقه بندی ذکر شده در بالا می باشند. بسیاری از فیزیکدانان بر این باور هستند که پاسخ به این پرسش که آیا یک مقیاس طول بنیادین در اندازه گیری فواصل وجود دارد یا خیر مستلزم پاسخ به این پرسش است که آیا الکترون ذره ای نقطه ای است؟ در حالی که در فیزیک کلاسیک الکترون را به صورت یک توزیع بار گسترده در نظر می گیرند به نظر می رسد که چنین برداشتی از الکترون در مکانیک کوانتومی راهگشا نباشد. یاکوف فرنکل [۱] اعتقاد داشت که الکترون نه فقط به لحاظ فیزیکی بلکه از جنبه هندسی نیز تقسیم ناپذیر بوده و فاقد گستردگی فضایی است. از آن پس دیدگاه الکترون نقطه ای به یک باور رایج در مکانیک کوانتومی تبدیل شد و نتیجه چنین برداشتی از الکترون ما را با معضلاتی نظیر نامتناهی شدن خود انرژی الکترون مواجه ساخت. اگر چه فرض وجود الکترون به عنوان یک ذره گسترده در مکانیک کوانتومی بی معنا به نظر می‌رسد اما بسیاری از تلاش های صورت گرفته برای حذف یا تعدیل واگراییها در نظریه کوانتومی به نوعی مستلزم در نظر گرفتن ساختار برای الکترون است. در اینجا بد نیست که اشاره ای به نظریه ارائه شده توسط ماکس بورن داشته باشیم. ماکس بورن پیشنهاد کرد که اگر چگالی لاگرانژی ماکسول در دستگاه آحاد طبیعی یعنی

---

[۱] Yakov Frenkel

$$\mathcal{L} = \frac{۱}{۲}(\vec{E}^{۲} - \vec{B}^{۲})\,,$$

را با چگالی لاگرانژی تعمیم یافته ای به شکل

$$\mathcal{L} = \frac{۱}{a^{۲}}\left[۱ - \sqrt{۱ - a^{۲}(\vec{E}^{۲} - \vec{B}^{۲})}\right]\,,$$

جایگزین کنیم که a یک پارامتر ثابت مخالف صفر است آنگاه به یک جرم متناهی برای الکترون دست می یابیم. نشان داده می شود که در نظریه بورن برای بار نقطه‌ای در فواصل $r \gg r_{۰}$ که $r_{۰} = \sqrt{ea}$ است قانون کولن در نظریه ماکسول حاصل می گردد در حالی که به ازای $\frac{r}{r_{۰}} \ll ۱$ میدان الکتریکی مربوط به بار نقطه ای بر خلاف نظریه ماکسول مقداری متناهی بدست می آید.

۲.۱ مدل جهان شبکه ای هایزنبرگ

امروزه اغلب نظریه وجود یک مقیاس طول بنیادین در طبیعت به ورنر هایزنبرگ کاشف سرشناس مکانیک کوانتومی نسبت داده می شود و در این بین کمتر سخنی از نقش فیزیکدان گمنام اتریشی آرتور مارچ در پیدایش این نظریه به میان می‌آید. به نظر می‌رسد که مارچ نخستین شخصی است که اهمیت وجود یک مقیاس طول بنیادین در فیزیک را خاطر نشان کرده است [۳]. در یک سلسله از مقالات او کوشید ضمن حفظ ناوردایی نسبیتی، هندسه بازه های فضا—زمانی بسیار کوچک را اصلاح نماید. با این رهیافت او امیدوار بود که بتواند معضل واگراییهای موجود در الکترودینامیک کوانتومی را برطرف سازد. ایراد اساسی کارهای مارچ آن بود که او نتوانست میان فرضیات خود و نتایج آزمایشگاهی فیزیک هسته‌ای یک ارتباط منطقی برقرار سازد و همین امر موجب گردید که نظریات او در میان فیزیکدانان کمتر مورد توجه واقع گردد. از سوی دیگر در یک سری از مکاتبات غیر رسمی صورت گرفته در سال ۱۹۳۰ میان هایزنبرگ و بوهر، هایزنبرگ

کوشید تا نشان دهد که چگونه می‌توان نظریه کوانتومی را با فرض وجود یک کمینه طول در اندازه گیری فواصل فرمول بندی کرد [۱و۲]. در این مکاتبات هایزنبرگ خاطر نشان کرده بود که اگر معادلات دیفرانسیل پاره‌ای پیوسته را با معادلات تفاضلی جایگزین سازیم، یعنی

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &\longrightarrow \frac{(\phi_{n+1}-\phi_n)}{a}, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &\longrightarrow \frac{(\phi_{n+1}-2\phi_n+\phi_{n-1})}{a^2}, \end{aligned}$$

که a طول بنیادین نظریه و ϕ تابع موج دستگاه است به یک نظریه کوانتومی با کمینه طول a در اندازه گیری فواصل دست خواهیم یافت. او فرض کرد که کمینه طول a برابر با $a=\frac{h}{Mc}\approx 10^{-15}m$ باشد که M جرم پروتون است. امروزه این رهیافت هایزنبرگ به فرضیه وجود یک کمینه طول در اندازه گیری فواصل به مدل جهان شبکه ای هایزنبرگ معروف است. در این جا خواننده علاقه مند را برای مطالعه بیشتر پیرامون مدل جهان شبکه ای هایزنبرگ به مرجع [۲] ارجاع می‌دهیم.

از جمله راهکارهای دیگری که برای رفع معضل واگراییها در نظریه میدان ارائه گردیده‌اند می‌توان به نظریه‌های میدان با مشتقات مراتب بالاتر اشاره کرد [۳]. در یک نظریه میدان ناوردای نسبیتی باید قوانین فیزیک در تمام چارچوب‌های اینرسی صورت یکسانی داشته باشند. ساده‌ترین مثال از یک معادله میدان که شرط ناوردایی نسبیتی را برآورده می‌سازد معادله زیر است

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\nabla^2\psi=0\ .$$

این معادله تحت اثر تبدیلات لورنتس ناوردا می‌باشد. اکنون به جای این معادله، معادله میدان تعمیم یافته‌ای به شکل

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+l_0^2\nabla^2\nabla^2\psi-\nabla^2\psi=0\ ,$$

را در نظر بگیرید که $l_\circ$ یک مقیاس طول بنیادین در نظریه بوده و مقدار عددی آن برابر $l_\circ \approx ۱۰^{-۱۳} cm$ است [۳]. وجود جمله دوم در سمت چپ معادله بالا سبب نقض تقارن لورنتس می‌گردد. به بیان دیگر افزودن جمله شامل مشتق مرتبه چهارم میدان ψ سبب می‌گردد که دیگر تقارن لورنتس یک تقارن تقریبی دستگاه باشد. در عوض این معادله میدان تعمیم یافته برای بار نقطه‌ای دارای پاسخهای با تقارن کروی می‌باشد که این پاسخ‌ها در مبدا غیر تکین می‌باشند. بنا بر این معرفی جمله در برگیرنده کمینه طول $l_\circ$ در معادله میدان به حذف تکینگی بار نقطه‌ای در مبدا می‌انجامد.

۳.۱ تاثیر گرانش بر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و پیدایش کمینه طول

ماکس پلانک ثابت $\hbar$ را زمانی کشف کرد که در حال مطالعه تابش جسم سیاه در ۱۹۰۰ میلادی بود. او فوراً دریافت که ثابتهای $\hbar$، c و G یک مقیاس طبیعی را تعیین می‌کنند که اکنون مقیاس پلانک نامیده می‌شوند. طول پلانک L_P، جرم پلانک M_P، انرژی پلانک E_P و زمان پلانک T_P بر حسب ثابت های بنیادی $\hbar$، c و G به ترتیب چنین می‌باشند [۴و۵]

$$
\begin{aligned}
L_P &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^۳}} \simeq ۱.۶ \times ۱۰^{-۳۵} m\,, \\
M_P &= \frac{\hbar}{cL_P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq ۲.۲ \times ۱۰^{-۸} kg\,, \\
E_P &= \sqrt{\frac{\hbar c^۵}{G}} \simeq ۲.۰ \times ۱۰^{۹} J = ۱.۲ \times ۱۰^{۱۹} GeV\,, \\
T_P &= \frac{L_P}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^۵}} \simeq ۰.۵۴ \times ۱۰^{-۴۳} sec\,.
\end{aligned}
$$

در شرایطی که دستگاه فیزیکی مورد مطالعه در حالتی قرار بگیرد که اثرات مکانیک کوانتومی ($\hbar$) غیر قابل اغماض بوده و ذرات تشکیل دهنده دستگاه ذراتی پر انرژی و دارای سرعت های بالا (c) و در وضعیت تاثیر گذار گرانشی (G) باشند استفاده از دستگاه آحاد پلانک

اجتناب ناپذیر می‌گردد. از جمله دستگاه‌هایی که می‌توانند شرایط بالا را دارا باشند می‌توان به جهان بسیار آغازین و یا تصادم ذرات بنیادی هم چون کوارکها که دارای انرژی از مرتبه بزرگی انرژی پلانک هستند اشاره نمود هر چند برای دستیابی به انرژی پلانک در یک آزمایشگاه احتمالا به یک شتابدهنده در حدود اندازه یک کهکشان نیاز خواهیم داشت. از دیگر دستگاه‌هایی که در آن استفاده از دستگاه آحاد پلانک ضروری به نظر می‌رسد ابری از ذرات مجازی احاطه کننده اطراف هر ذره حقیقی است، زیرا چنین ذرات مجازی‌ای می‌توانند بطور دلخواه انرژیهای بالایی داشته باشند.

هر چند تا کنون تلاش های فراوانی برای فرمول بندی یک نظریه سازگار گرانش کوانتومی صورت گرفته است اما در عمل موفقیت چندانی حاصل نگردیده است. در حال حاضر به نظر می‌رسد تنها کاندیدای معقول برای گرانش کوانتومی نظریه ریسمان است. در سال ۱۹۲۷ هایزنبرگ اصل عدم قطعیت را با استفاده از اصول کلی اپتیک و کوانتش تابش الکترومغناطیسی به شکل فوتونها بدست آورد. اکنون نشان می‌دهیم که چگونه در نظر گرفتن پاره‌ای از اثرات گرانشی در مکانیک کوانتومی سبب می‌گردد که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دستخوش تغییر گردد. حال با استفاده از نظریه گرانش نیوتونی به بررسی تاثیر گرانش بر روی روابط عدم قطعیت هایزنبرگ می‌پردازیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که فوتون ذره‌ای کلاسیک با جرم مؤثر $\frac{E}{c^2}$ است. الکترونی را در نظر بگیرید که در داخل یک محدودهٔ آزمایشگاهی با طول مشخصه L قرار گرفته و در این ناحیه با فوتونی در اندرکنش باشد. اگر اندازه فاصله میان الکترون و فوتون را r در نظر بگیریم الکترون شتابی گرانشی به میزان

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(\frac{E}{c^2})}{r^2}\hat{r}\,,$$

را احساس خواهد کرد. در بازه زمانی مشخصه $\frac{L}{c}$ که میان الکترون و فوتون اندرکنش انجام می‌گیرد به سبب وجود گرانش الکترون سرعتی برابر با

$$\Delta v \approx \frac{GE}{c^۲ r^۲}\left(\frac{L}{c}\right)$$

یافته و مسافتی به میزان

$$\Delta x_G \approx \frac{GE}{c^۲ r^۲}\left(\frac{L}{c}\right)^۲$$

را طی می‌کند. از آنجایی که الکترون می‌تواند در هر مکانی در داخل محدوده آزمایشگاهی واقع باشد از این رو فاصله الکترون—فوتون باید از مرتبه $r \approx L$ باشد (لازم به ذکر است که طول مشخصه L تنها مقیاس فاصله در مسئله است). با استفاده از رابطه انرژی—تکانه برای فوتون، یعنی $E = p\,c$ می‌توان نوشت

$$\Delta x_G \approx \frac{Gp}{c^۳}\,.$$

نظر به این که عدم قطعیت در تکانه برای الکترون باید از مرتبه تکانه فوتون باشد، می توان نوشت

$$\Delta x_G \approx \frac{G\Delta p}{c^۳} = \left(\frac{G\hbar}{c^۳}\right)\frac{\Delta p}{\hbar} = L_P^۲\frac{\Delta p}{\hbar}\,.$$

از افزودن Δx_G به Δx_H ($\Delta x_H \approx \frac{\hbar}{\Delta p}$) میزان عدم قطعیت کل در مکان الکترون خواهد شد

$$\Delta x \approx \Delta x_H + \Delta x_G$$

یا

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p} + L_P^2 \frac{\Delta p}{\hbar} .$$

رابطه فوق به اصل عدم قطعیت گسترش یافته [۱] یا اصل عدم قطعیت گرانشی [۲] موسوم است [۴]. رابطه GUP تحت اثر تبدیل

$$\frac{\Delta p L_P}{\hbar} \longleftrightarrow \frac{\hbar}{\Delta p L_P} ,$$

ناورداست.

رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته پیامدهای جالب توجهی به دنبال دارد. اگر تکانه فوتون و Δp بسیار کوچک باشند در این صورت مکان الکترون نامعین خواهد شد زیرا برای فوتونی با طول موج بلند، ما با جابایی ضعیفی از مکان الکترون مواجه می‌گردیم. از سوی دیگر اگر تکانه فوتون و Δp بسیار بزرگ باشند در این صورت میدان گرانشی حاصل از فوتون سبب می‌گردد که مکان الکترون به شدت نامعین گردد. سرانجام آن که رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته کمینه طولی به میزان

$$\Delta x_{min} \approx 2\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 2L_P$$

به ازای

$$\Delta p \approx \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}} = \frac{E_P}{c}$$

را پیشگویی می‌کند. این امر بدان معنی است که ما هرگز قادر به اندازه گیری بازه های مکانی کوچک تر از Δx_{min} در نظریه‌امان نخواهیم بود. در این جا متذکر می‌گردیم که برای بدست

[۱] Extended Uncertainty Principle

[۲] Gravitational Uncertainty Principle (GUP)

آوردن اصل عدم قطعیت تعمیم یافته به جز رهیافت ذکر شده در این بخش رهیافت های متعدد دیگری نیز وجود دارند که برای مطالعه این رهیافت ها می توان به مراجع [۴و۵] مراجعه کرد.

فصل ۲

تصحیحات گرانش کوانتومی بر روی میدان اسپینوری در حضور یک کمینه طول مشاهده‌پذیر بر اساس جبر کوئیزنی–تکاچوک

بطور خلاصه آنچه در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد فرمول بندی لاگرانژی میدان اسپینوری در یک فضا–زمان (۱+۳)–بعدی بر اساس جبر کوئیزنی [۱]–تکاچوک [۲] می‌باشد. جبر کوئیزنی–تکاچوک یک جبر همموردای لورنتس (D+1)–بعدی با دو پارامتر دگرگونش [۳] (β', β) است که ما از آن در حالت خاص $\beta' = ۲\beta$ و تا مرتبه اول β بهره می‌گیریم. خواهیم دید که معادله دیراک تعمیم یافته که شامل مشتقات مراتب اول و بالاتر برای تابع موج است، دو ذره با جرمهای متفاوت را توصیف می‌کند که حالتهای جرمی قابل قبول، منجر به اعمال شرط $\beta < \frac{۱}{۸m^۲c^۲}$ بر روی پارامتر دگرگونش β می‌گردد. با اعمال این شرط برای یک الکترون، کران

[۱] Quesne
[۲] Tkachuk
[۳] deformation