دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

مونوئیدهای توپولوژی خودنگاشت‌های جزئی یک‌به‌یک از اعداد صحیح مثبت

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

سعید بزمانی

دی ماه ۹۱

تقدیر و تشکر

مَنّ لَمْ یَشْکُر الَمخْلوق لَمْ یَشکُر الخٰالِق

سپاس خدای مهربان را که اندیشه‌ام داد.

حمد و ستایش بی قیاس خدای را که سزاست که از الطاف خود در انسان دمیده و او را اشرف المخلوقات خود قرار داد. حال که به لطف او تحصیل کسب علم و دانش را پیدا نمودم، از خدای متعال خواهانم که راه خدمت به جامعه قدومم را استوار گرداند تا بتوانم انچه را که در این سال ها اندوخته‌ام در مسیر پیشرفت و آبادانی کشور استفاده نمایم.

در این جا شایسته است از استاد راهنمای گرانقدر خود جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی که مسئولیت راهنمایی و مساعدت اینجانب را بر عهده داشتند و در طول مراحل تحصیل و تحقیق همواره بنده را مورد محبت خود قرار داده سپاس گذاری می‌نمایم.

از دوستان عزیزم آقایان کیوان کریمی،یونس قلندرزهی، میثم محمدی، اسماعیل شیخ ملاهی، عثمان بلوچی، ابراهیم هاشمزهی، محمد محمدی و سایر دوستان بزرگواری که ذکر اسامی آن‌ها در این مجال نمی گنجد به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان سپاس گذاری می‌نمایم.

در پایان بر خود واجب و لازم می‌دارم از همه اساتید گروه ریاضی که به مدت شش سال در محضر ایشان کسب علم نمودم صمیمانه تشکر نمایم.

چکیده

در این پانامه اطلاعاتی در مورد و نیم‌گروه خودنگاشت‌های جزئی یک‌به‌یک تقریباً همه‌جا همانی φ_λ^∞ و نیم‌گروه تبدیلات جزئی یک‌به‌یک هم متناهی تقریباً یکنوا از اعداد صحیح مثبت $\varphi_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ بدست می آوریم و ثابت می‌کنیم هر توپولوژی بئر موروثی τ روی φ_λ^∞ در صورتیکه $(\varphi_\lambda^\infty, \tau)$ نیم‌گروه نیم‌توپولوژی باشد گسسته است. همچنین نشان می‌دهیم برای عدد اصلی λ نیم‌گروه φ_λ^∞ به یک نیم‌گروه توپولوژی هاسدورف نشانده نمی‌شود. نشان می‌دهیم که نیم‌گروه $\varphi_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ خاصیتی شبیه نیم‌گروه‌های دودوری دارد و هر توپولوژی بئر τ روی $\varphi_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ در صورتیکه $(\varphi_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژی باشد، گسسته است. بستار $(\varphi_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ را در یک نیم‌گروه توپولوژی بیان می‌کنیم.

کلمات کلیدی : نیم‌گروه توپولوژی، نیم‌گروه نیم‌توپولوژی، نیم‌گروه تبدیلات جزئی یک‌به‌یک، بستار، نیم‌گروه معکوس توپولوژی، نیم‌شبکه، ایدآل، همنهشتی، نیم‌گروه با F−خاصیت، بئر موروثی، نشاندن.

فهرست مندرجات

تاریخچه

مطالعه روی نیم‌گروه‌های توپولوژی در سال ۱۹۲۶ توسط بور[۱] کلید زده شد و مطالعات در این زمینه گسترش یافت در سال ۱۹۵۵ کلیفورد نیم‌گروه‌های معکوس را تعریف کرد. در همان سال والیس[۲] با قرار دادن توپولوژی روی نیم‌گروه‌های معکوس، نیم‌گروه توپولوژی معکوس و نیم‌گروه معکوس‌توپولوژی را تعریف کرد. او سعی کرد خواص توپولوژی را روی نیم‌گروه‌های توپولوژی معکوس و نیم‌گروه‌های معکوس‌توپولوژی بررسی کند. در سال ۲۰۰۵ گوتیک[۳] و پاولیک[۴] خواص توپولوژی بسیار مهمی از نیم‌گروه توپولوژی یکال‌های ماتریسی را بیان کردند و در ادامه، طی مقالاتی برخی خواص توپولوژی نیم‌گروه توپولوژی معکوس‌متقارن تبدیلات از رتبه متناهی، φ_{λ}^{n} را بیان کردند.

همچنین در ادامه گوتیک[۵] و چاکمن[۶] خواص جبری و توپولوژی نیم‌گروه تبدیلات جزئی یک‌به‌یک تقریباتقریباً یکنوا از اعداد صحیح مثبت $\varphi_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ و نیم‌گروه خودنگاشت‌های جزئی یک‌به‌یک تقریباً همه‌جا همانی، $\varphi_{\lambda}^{\infty}$ را بیان کردند. این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. ما در فصل اول مقدماتی را در مورد فضاهای توپولوژی بیان می‌کنیم. در فصل دوم نیم‌گروه‌ها و نیم‌گروه‌های توپولوژی را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم توجه خود را به بیان برخی خواص جبری و توپولوژی نیم‌گروه خودنگاشت‌های جزئی یک‌به‌یک تقریباً همه‌جا همانی، $\varphi_{\lambda}^{\infty}$ می‌پردازیم. در فصل چهارم نیز به معرفی و بیان برخی خواص توپولوژی نیم‌گروه تبدیلات جزئی یک‌به‌یک تقریباتقریباً یکنوا از اعداد صحیح مثبت $\varphi_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ معطوف می‌کنیم.

---

[۱] Bohr
[۲] Wallace
[۳] Gutik
[۴] Pavlyk
[۵] Gutik
[۶] Chuchman

فصل ۱

مقدماتی از فضاهای توپولوژی

۱—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم و تعاریف اساسی فضاهای توپولوژی را بیان می‌کنیم و مطالبی در مورد خانواده‌های موضعاً متناهی، اصول جداسازی، پیوستگی و تورها می آوریم و در ادامه نکاتی را در مورد فضاهای فشرده و فشرده‌سازی فضاهای توپولوژی بیان می‌کنیم و در انتها به اختصار به فضاهای تابعی می‌پردازیم. مفاهیم توپولوژی در این کتاب برگرفته از کتاب توپولوژی عمومی اینگلکینگ ([۴]) می باشد.

۱—۲ فضاهای توپولوژی و مجموعه‌های باز، بسته و چگال

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنید X یک مجموعه باشد. گردایه τ از زیرمجموعه‌های X، ($\tau \subseteq P(X)$) را یک توپولوژی روی X گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $\emptyset, X \in \tau$؛

(۲) τ تحت اشتراک متناهی بسته باشد. یعنی اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$، n عضو τ باشند، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$؛

(۳) τ تحت اجتماع بسته باشد. یعنی اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک گردایه از اعضای τ باشند، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$.

اعضای τ را مجموعه‌های باز و زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژی گویند.

مثال ۲.۲.۱: فرض کنید X یک مجموعه و τ گردایه همه زیرمجموعه‌های آن باشد. به وضوح τ در سه شرط تعریف ۱.۲.۱ صدق می‌کند و لذا (X, τ_d) تشکیل یک فضای توپولوژی می‌دهد، که آن را فضای گسسته می‌نامند.

مثال ۳.۲.۱: فرض کنید τ گردایه همه زیرمجموعه‌های X که متمم آنها متناهی است، به همراه مجموعه تهی باشد. آنگاه τ یک توپولوژی بر X است که به آن توپولوژی متمم—متناهی گویند.

تعریف ۴.۲.۱: فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد. خانواده $\beta \subseteq \tau$ را یک پایه برای فضای توپولوژی X نامند، هرگاه هر زیرمجموعه باز ناتهی از X را بتوان به صورت

اجتماعی از اعضای β نوشت. به عبارت دیگر خانواده β را یک پایه برای فضای توپولوژی X نامند، هرگاه $\beta \subseteq \tau$ و برای هر $x \in X$ و هر همسایگی از x مانند V، $U \in \beta$ موجود باشد بطوریکه $x \in U \subseteq V$.

تعریف ۵.۲.۱: خانواده $\beta(x)$ از همسایگی‌های شامل x را یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x نامند، هرگاه برای هر همسایگی V از x، $U \in \beta(x)$ موجود باشد بطوریکه $x \in U \subseteq V$.
به وضوح اگر $\beta(x)$ یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x باشد، آنگاه $\bigcup_{x\in X} \beta(x)$ یک پایه برای فضای توپولوژی X است.

تعریف ۶.۲.۱ ([۴]): فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژی و برای هر $x \in X$، $\beta(x)$ یک پایه برای فضای توپولوژی X در نقطه x باشد. گردایه $\{\beta(x)\}_{x\in X}$ را یک سیستم همسایگی [۱] برای فضای توپولوژی X می‌نامند، هرگاه شرایط زیر برقرارباشند:

(۱) برای هر $x \in X$، $\beta(x) \neq \emptyset$ و هر $U \in \beta(x)$، $x \in U$.

(۲) هرگاه $x \in U \in \beta(y)$، آنگاه یک $V \in \beta(x)$ موجود است بطوریکه $V \subset U$.

(۳) برای هر $U_1, U_2 \in \beta(x)$، یک $U \in \beta(x)$ موجود است بطوریکه $U \subset U_1 \cap U_2$.

تعریف ۷.۲.۱: فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد. $E \subseteq X$ را در X بسته گویند، هر گاه $X - E$ در X باز باشد. به عبارت دیگر $E \subseteq X$ را در X بسته گویند، هرگاه $X - E \in \tau$.

قضیه ۸.۲.۱ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت:

(۱) $\emptyset$ و X در X بسته‌اند؛

(۲) اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته در X، بسته است؛

(۳) اشتراک هر خانواده دلخواه از مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

تعریف ۹.۲.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$ و $\mathcal{C}_A$ خانواده همه

---

[۱] System neighbordhood

مجموعه‌های بسته شامل A باشد. با توجه به قسمت (۱) قضیه ۸.۲.۱، $\mathcal{C}_A \neq \emptyset$ و با توجه به قسمت (۳) قضیه ۸.۲.۱، $\bigcap \mathcal{C}_A$ بسته است. $\bigcap \mathcal{C}_A$ را بستار A نامند و آن را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر بستار A کوچکترین مجموعه بسته شامل A است.

به وضوح $A \subseteq X$ بسته است اگر و فقط اگر $A = \overline{A}$.

قضیه ۱۰.۲.۱ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A, B \subseteq X$ باشد. در این صورت:

(۱) $\overline{\emptyset} = \emptyset$؛

(۲) $A \subseteq \overline{A}$؛

(۳) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$؛

(۴) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\overline{A} \subseteq \overline{B}$؛

(۵) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

تعریف ۱۱.۲.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A \subseteq X$ باشد. اجتماع همه مجموعه‌های باز مشمول در A را درون A می‌نامند و آن را با $Int(A)$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر درون A بزرگترین مجموعه باز مشمول در A است.

به وضوح $A \subseteq X$ باز است اگر و فقط اگر $A = Int(A)$.

قضیه ۱۲.۲.۱ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $A, B \subseteq X$ باشد. در این صورت:

(۱) $Int(X) = X$؛

(۲) $Int(A) \subseteq A$؛

(۳) $Int(Int(A)) = Int(A)$؛

(۴) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

تعریف ۱.۲.۱۳: فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. نقطه $x \in X$ را یک نقطه حدی $A \subseteq X$ گویند، هرگاه $x \in \overline{A - \{x\}}$. مجموعه همه نقاط حدی A را مجموعه مشتق A می‌نامند و آن را با A^d نمایش می‌دهند و نقاط مجموعه $A - A^d$ را نقاط منفرد مجموعه A می‌نامند.

قضیه ۱.۲.۱۴ ([۴]): نقطه x در فضای توپولوژی X منفرد است اگر و فقط اگر یک همسایگی مانند U از x در X موجود باشد بطوریکه $U \cap X = \{x\}$، اگر و فقط اگر مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ باز باشد، اگر و فقط اگر $\{x\} = X - \overline{X - \{x\}}$، بدین معنی که $x \notin \overline{X - \{x\}}$.

قضیه ۱.۲.۱۵ ([۴]): مجموعه مشتق دارای خواص زیر می‌باشد:

(۱) $\overline{A} = A \cup A^d$؛

(۲) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A^d \subseteq B^d$؛

(۳) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$؛

(۴) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^d \subset (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^d$.

تعریف ۱.۲.۱۶ ([۴]): فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد.

(۱) $Y \subseteq X$ را در X چگال گویند، هرگاه $\overline{Y} = X$.

(۲) $Y \subseteq X$ را در X هم‌چگال گویند، هرگاه $X - Y$ در X چگال باشد.

(۳) $Y \subseteq X$ را در X هیچ‌جاچگال گویند، هرگاه $\overline{Y}$ در X هم‌چگال باشد.

قضیه ۱.۲.۱۷ ([۴]) : فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $Y \subseteq X$ هیچ‌جاچگال در X باشد. آنگاه $Int\ \overline{Y} = \phi$.

قضیه ۱.۲.۱۸ ([۴]): اجتماع متناهی از مجموعه‌های هیچ جاچگال، هیچ‌جاچگال است.

تعریف ۱۹.۲.۱ ([۴]): فضای توپولوژی X را فضای بئر[۲] نامند، هرگاه دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های هیچ‌جاچگال X مانند $\{A_i\}_{i\geqslant 1}$ موجود باشد بطوریکه $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ یک زیرمجموعه هم‌چگال از X باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱ ([۴]) : فضای توپولوژی X را فضای بئر موروثی [۳] نامند، هرگاه هر زیر مجموعه بسته از X یک فضای بئر باشد.

۱—۳ خانواده بطور موضعی متناهی

تعریف ۱.۳.۱: خانواده $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژی X را بطور موضعی متناهی گویند، هرگاه برای هر نقطه $x \in X$، همسایگی باز U از x در X موجود باشد بطوریکه مجموعه $\{i \in I \ : \ U \cap A_i \neq \phi\}$ متناهی باشد.

قضیه ۲.۳.۱ ([۴]): برای هر خانواده بطور موضعی متناهی مانند $\{A_i\}_{i\in I}$ داریم:

$$\overline{(\cup_{i\in I} A_i)} = \cup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

قضیه ۳.۳.۱ ([۴]): فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده بطور موضعی متناهی باشد. اگر همه اعضای $\mathcal{F}$ بسته باشند، آنگاه $F = \bigcup \mathcal{F}$ بسته است و اگر همه اعضای $\mathcal{F}$ هم باز و هم بسته باشند، آنگاه $F = \bigcup \mathcal{F}$ نیز هم باز و هم بسته است.

قضیه ۴.۳.۱ ([۴]): فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده بطور موضعی متناهی باشد. آنگاه خانواده $\{\overline{A_\alpha}\}_{\alpha\in I}$ نیز بطور موضعی متناهی است.

[۲] Baire spcce

[۳] Baire hereditary space

۱—۴ اصول جداسازی

ما در این بخش پنج اصل جداسازی T_0، T_1، T_2، T_3 و T_4 و همچنین فضای تیخونوف [۴] را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای T_0 گویند، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن، یک مجموعه باز موجود باشد بطوریکه یک و تنها یکی از آن‌ها را شامل شود.

تعریف ۲.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای T_1 گویند، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن مانند x و y، مجموعه باز U شامل x موجود باشند بطوریکه $y \notin U$.

تعریف ۳.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای T_2 یا هاسدورف[۵] گویند، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز آن مانند x و y، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

تعریف ۴.۴.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی و $\{x_n\}$ دنباله ای از نقاط X باشد و $x \in X$. در این صورت گوییم $\{x_n\}$ همگرا به X است، هرگاه به ازای هر مجموعه باز شامل x مانند U، عدد طبیعی مانند n، $n \geq N$، $x_n \in U$.

قضیه ۵.۴.۱ ([۴]): در فضاهای هاسدورف، حد دنباله‌ای منحصر بفرد است.

تعریف ۶.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای T_3 یا منظم گویند، هرگاه X یک فضای T_1 باشد و برای $x \in X$ و هر مجموعه بسته مانند F در X که x را شامل نشود، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$x \in U, \quad F \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

[۴] Tychonof space

[۵] Hausdorff space

تعریف ۷.۴.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ یا تیخونوف گویند، هرگاه X یک فضای T_1 باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته $F \subseteq X$ در X که x را شامل نشود، تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ موجود باشد بطوریکه:

$$f(x) = 0, \quad f(F) = 1.$$

تعریف ۸.۴.۱: فضای توپولوژی (X, τ) را یک فضای T_4 یا نرمال گویند، هرگاه X یک فضای T_1 باشد و برای هر دو مجموعه بسته جدا از هم F و E در آن، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند بطوریکه:

$$F \subseteq U, \quad E \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

۱ — ۵ پیوستگی و همانسانی‌ها

تعریف ۱.۵.۱: فرض کنید (X, τ) و (Y, τ') دو فضای توپولوژی باشند. نگاشت $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ را پیوسته گویند، هرگاه برای هر $U \in \tau'$ داشته باشیم $f^{-1}(U) \in \tau$. به عبارت دیگر نگاشت $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ را پیوسته گویند، هرگاه نقش معکوس هر مجموعه باز در Y یک مجموعه باز در X باشد.

تعریف ۲.۵.۱: فرض کنید (X, τ) و (Y, τ') دو فضای توپولوژی باشند. نگاشت $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ را باز (بسته) گویند، هر گاه تصویر هر مجموعه باز (بسته) در X ، یک مجموعه باز (بسته) در Y باشد.

قضیه ۳.۵.۱ ([۴]): فرض کنید (X, τ) و (Y, τ') دو فضای توپولوژی باشند و $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ یک تناظر یک‌به‌یک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) f باز است.

(۲) f بسته است.

(۳) f^{-1} پیوسته است.

تعریف ۴.۵.۱: نگاشت دوسویی پیوسته f را که در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند، یک همانسانی یا یک همیومورفیسم گویند.

قضیه ۵.۵.۱ ([۴]): فرض کنید (X,τ) و (Y,τ') دو فضای توپولوژی باشند. برای نگاشت $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(۱) f پیوسته است.

(۲) تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y، مجموعه‌ای باز در X است.

(۳) تصویر معکوس هر مجموعه بسته در Y، مجموعه‌ای بسته در X است.

(۴) به ازای هر $A\subseteq X$ داشته باشیم:

$$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}.$$

(۵) به ازای هر $B\subseteq Y$ داشته باشیم:

$$\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

قضیه ۶.۵.۱ ([۴]) **:** نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ بسته است اگر و فقط اگر برای هر $B\subset Y$ و هر مجموعه باز $A\subset X$ که شامل $f^{-1}(B)$ است، مجموعه بازی چون $C\subset Y$، شامل B موجود باشد بطوریکه $f^{-1}(C)\subset A$.

تعریف ۷.۵.۱ : فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. $A\subseteq X$ را در X، یک مجموعه F_σ نامند، هرگاه A به صورت اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های بسته باشد.

قضیه ۸.۵.۱ ([۴]):

فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. زیر مجموعه‌ی A از فضای نرمال X یک مجموعه F_σ باز است، اگر و تنها اگر یک تابع پیوسته $f:X\longrightarrow I$ موجود باشد بطوریکه $A=f^{-1}((0,1])$.

۱–۶ تورها

تعریف ۱.۶.۱: فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد. یک رابطه دوتایی روی X یک زیرمجموعه مانند ρ از $X \times X$ می‌باشد. اگر $(a,b) \in \rho$، می‌نویسیم $a\rho b$ و می‌گوییم a تحت رابطه ρ، در رابطه است با b. مجموعه تمام روابط دوتایی روی X را با β_X نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۶.۱: رابطه دوتایی w روی مجموعه X (یعنی زیرمجموعه w از $X \times X$) را یک رابطه ترتیب جزئی گویند، هرگاه:

(۱) برای هر $x \in X$، $(x,x) \in w$، در این حالت w را انعکاسی گویند.

(۲) برای هر $x,y \in X$ اگر $(x,y) \in w$ و $(y,x) \in w$، آنگاه $x = y$، در این حالت w را پادمتقارن گویند.

(۳) برای هر $x,y,z \in X$ اگر $(x,y) \in w$ و $(y,z) \in w$، آنگاه $(x,z) \in w$، در این حالت w را متعدی گویند.

در این صورت (X,w) را یک مجموعه مرتب جزئی می‌نامند.

تعریف ۳.۶.۱: یک تور در فضای توپولوژی X یک تابع دلخواه از مجموعه مرتب جزئی ناتهی Σ به فضای X است. معمولاً یک تور را به صورت $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ نمایش می‌دهند، جایی که x_σ نقطه‌ای از X است و σ عنصری از مجموعه مرتب جزئی Σ می‌باشد.

تعریف ۴.۶.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد. گوییم تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ به $x \in X$ همگراست، هرگاه برای هر همسایگی U از x، $\sigma_\circ \in \Sigma$ موجود باشد بطوریکه برای هر $\sigma \geq \sigma_\circ$ داشته باشیم:

$$x_\sigma \in U.$$

یک تور ممکن است به تعداد زیادی نقطه همگرا باشد. مجموعه حدود تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ را با $\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$ نمایش می‌دهند. اگر تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ تنها یک حد داشته باشد، آنگاه می‌نویسند:

$$x = \lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma.$$

قضیه ۵.۶.۱ ([۴]): $x \in \overline{A}$ است اگر و فقط اگر توری از عناصر A، همگرا به x موجود باشد.

قضیه ۶.۶.۱ ([۴]): مجموعه A بسته است اگر و فقط اگر برای هر تور موجود در A مجموعه حدود آن تور نیز در A باشد.

قضیه ۷.۶.۱ ([۴]): نگاشت $f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\tau')$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر تور $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ در فضای X داشته باشیم $f(\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma) \subseteq \lim_{\sigma\in\Sigma} f(x_\sigma)$.

قضیه ۸.۶.۱ ([۴]): فضای توپولوژی X هاسدورف است اگر و فقط اگر هر تور در X حداکثر یک حد داشته باشد.

۱−۷ فضاهای فشرده

ما در این قسمت با مفاهیم فشردگی، فشرده شمارایی، فشرده‌نمایی، بطور مجزا فشرده‌نمایی، فشرده دنباله‌ای و فشرده موضعی آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۷.۱: فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژی X باشد. این گردایه را یک پوشش برای X می‌نامند، هرگاه $X = \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$.

این پوشش را یک پوشش باز (بسته) نامند، هرگاه همه A_αها باز (بسته) باشند.

در صورتی که همه A_αها هم باز و هم بسته باشند، آنگاه این پوشش را یک پوشش هم باز و هم بسته نامند.

تعریف ۲.۷.۱: فضای توپولوژی X را یک فضای فشرده نامند، هرگاه هر پوشش باز X، یک زیرپوشش متناهی داشته باشد.

قضیه ۳.۷.۱ ([۴]): هر زیرمجموعه بسته از یک فضای توپولوژی فشرده، فشرده است.

قضیه ۴.۷.۱ ([۴]): فرض کنید $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای توپولوژی فشرده X به فضای توپولوژی Y باشد. آنگاه $f(X)$ در Y فشرده است.

قضیه ۵.۷.۱ ([۴]): فضای توپولوژی X یک فضای تیخونوف است اگر و فقط اگر قابل نشاندن در یک فضای فشرده باشد.

تعریف ۶.۷.۱: فضای توپولوژی X را فشرده شمارا گویند، هرگاه X یک فضای هاسدورف و هر پوشش باز شمارا از X دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

تذکر ۷.۷.۱: هر فضای توپولوژی فشرده، فشرده شمارا می‌باشد.

تعریف ۸.۷.۱: فضای توپولوژی X را لیندلوف [۶] گویند، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک زیرپوشش شمارا باشد.

قضیه ۹.۷.۱ ([۴]): فضای توپولوژی X فشرده است اگر و فقط اگر X یک فضای فشرده شمارا با خاصیت لیندلوف باشد.

قضیه ۱۰.۷.۱ ([۴]): هر زیرفضای بسته از یک فضای فشرده شمارا، فشرده شمارا است.

قضیه ۱۱.۷.۱ ([۴]): فرض کنید $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ یک نگاشت پیوسته از فضای فشرده شمارای X به فضای هاسدرف Y باشد، آنگاه Y یک فضای فشرده شمارا است.

قضیه ۱۲.۷.۱ ([۴]): هر تابع پیوسته حقیقی‌مقدار روی یک فضای فشرده شمارا، بسته

---
[۶] Lindeloff