IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

روابط بین نمایش‌های فوک- بارگمن و توموگرافیک حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا بذرافکن

استاد مشاور:

دکتر الهه نحوی فرد

دانشجو:

الهام رفیعی‌پور

اسفند ۹۰

تقدیم به آستان پاک جانان

که سرمنشا هستی است و نامش هستی بخش

تقدیم به پدر و مادرم

آنانکه توانشان رفت تا به توانایی برسم

مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنانکه فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان

سرمایه ی جاودانی زندگی من است

تقدیم به همسرم

که روشنی بخش زندگی من است

تقدیر و تشکر

اکنون که برگ دیگری از صفحه زندگی ورق خورده و مرحله دیگری از کسب علم و معرفت را پشت سر گذاشتم، خدا را شاکرم و سپاس می گویم که مرا لایق آموختن گردانید. چرا که بی لطف و عنایت آن یگانه بی همتا این مهم فراهم نمی شد.

همراهانی که مرا در طی این راه پر مشقت یاری کرده اند بسیارند و ابزاری جز قدردانی و سپاس در دست نیست تا گوشه ای از محبت هایشان را جبران کنم.

از دو گوهر گرانمایه زندگی ام، پدر و مادر عزیزم که اسوه ایثار و عشق اند، سپاسگذارم و هزاران بار دستان پر مهرشان را می بوسم.

از اساتید بزرگوارم؛ جناب آقای دکتر محمدرضا بذرافکن و سرکار خانم دکتر الهه نحوی فرد کمال تشکر و قدردانی را به جا می آورم که متعهدانه و با بزرگواری، با راهنمایی های ارزنده در طی مدت تحصیل و انجام این پایان نامه همواره مرا تحت حمایت و پشتیبانی خود قرار دادند و برایشان سلامتی و توفیق روزافزون از درگاه خداوند متعال خواستارم.

همچنین از اعضای محترم هیات داوران جناب آقای دکتر سعید باطبی و دکتر احمد مهرآمیز که در جلسه دفاعیه با ارائه نظرات ارزشمند خود در زمینه رفع نقایص پایان نامه و پربارتر شدن آن را فراهم نمودند، تشکر و قدردانی می نمایم.

چکیده

در نمایش فوک- بارگمن حالت‌های یک نوسانگر کوانتومی توسط توابع تحلیلی بر صفحه مختلط نمایش داده می‌شوند. مشاهده پذیرها نیز با توابع دو متغیره مختلط متناظر خواهند شد. به این شکل کل جبر عملگری به روابط بین توابع اسکالر تقلیل می‌یابد که از نظر محاسباتی امری مفید محسوب می‌شود. از طرف دیگر نمایش توموگرافیک نیز ابزار جدیدی برای نمایش حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها در اپتیک کوانتمی است. با این وجود هیچ مطالعه‌ای برای رابطه متقابل بین نمایش های فوک- بارگمن و توموگرافیک گزارش نشده است . پایان نامه حاضر تلاشی برای یافتن رابطه متقابل بین نمایش های فوک- بارگمن و توموگرافیک است، برای این منظور از تریس اپراتورها بر حسب نمایش بارگمن اپراتورها و نیز ارتباط بین تابع ویگنر با نمایش بارگمن اپراتور چگالی استفاده کردیم و برای نگاشت بارگمن به توموگرافیک و نیز نگاشت بارگمن به توموگرافیک دوگان فرم‌های متفاوتی بدست آوردیم که می‌تواند به عنوان متد محاسباتی برای محاسبه نماد توموگرافیک و نماد توموگرافیک دوگان به کار رود.

کلمات کلیدی : توابع شبه احتمال، نمایش بارگمن، نمایش توموگرافیک، نمایش توموگرافیک دوگان، نماد توموگرافیک ، نماد توموگرافیک دوگان

فهرست

فهرست شکل‌ها

مقدمه

مفهوم حالت کوانتومی یک سیستم همواره یکی از بحث بر انگیزترین موضوعات در مکانیک کوانتوم بوده است. در ابتدا شرودینگر حالت یک سیستم را به صورت یک تابع موج در نظر می‌گرفت که این تصور خیلی زود کنار گذاشته شد. سپس مفهوم حالت کوانتومی به صورت تعمیم یافته تری با عملگر چگالی نمایش داده شد. سپس ویگنر آنچه را که امروزه نماد وایل- ویگنر عملگر چگالی نامیده می‌شود معرفی کرد. تابع ویگنر یکی از اعضای مجموعه‌ای از نمایش ها به شکل توابع اسکالر تعریف شده بر " فضای فاز " است که به طور معکوس با عملگر چگالی مربوط هستند. توابع شبه احتمال گلاوبر- سودارشان و تابع هوسیمی کانو مثال هایی از این نوع توابع شبه احتمال هستند. در معرفی همه این نمادها ایده بسیار ساده‌ای نهفته است. همان طور که یک بردار را می‌توان بر حسب عناصر یک مجموعه پایه بسط داد، فرایند مشابهی نیز برای عملگرها می‌توانیم به کار بریم. برخی از پایه ها برای برخی دیگر نقش پایه دوگان را دارند. این پایه های دوگان امکان تعریف نمادهای دوگان را فراهم می‌کنند.

نمایش توموگرافیک ابزاری برای نمایش حالت ها و مشاهده پذیرهای یک سیستم کوانتومی است. در این نمایش کلاسی از عملگرهای $\hat{X}_{\mu,\nu}$ را به عنوان ترکیب های خطی از دو اپراتور مکان و تکانه بی بعد تعریف می‌کنیم و با با استفاده از عنصر ماتریسی قطری هر اپراتور بر پایه ویژه پایه عملگر $\hat{X}_{\mu,\nu}$ به هر عملگر نماد توموگرافیک نظیر آن را نسبت می‌دهیم. در حالت خاصی که با عملگر چگالی سر وکار داریم نماد توموگرافیک عملگر چگالی را توموگرام حالت کوانتومی مذکور می‌نامیم، توموگرام همواره تابعی حقیقی و مثبت است. با تعویض جای پایه مستقیم و دوگان در نمایش توموگرافیک به نمایش جدیدی از حالت ها و مشاهده پذیرها به نام نمایش توموگرافیک دوگان دست می‌یابیم. یکی دیگر از ابزارهای نمایش حالت‌های کوانتومی و عملگرها نمایش فوک- بارگمن است، در این نمایش حالت‌های یک سیستم کوانتومی توسط توابع تحلیلی بر صفحه مختلط و مشاهده پذیرها با توابع دو متغیره مختلط که نسبت به هر کدام از ورودی ها تام می‌باشند نمایش داده می‌شوند. این توابع با

نوعی ضرب داخلی یک فضای هیلبرت می‌سازند که با فضای هیلبرت سیستم کوانتومی هم ریخت است. به این شکل کل جبر عملگری به روابط بین اسکالرها تقلیل می‌یابد که از نظر محاسباتی امری مفید محسوب می‌شود. این درک از فضای هیلبرت توسط توابع تام اولین بار در سال ۱۹۶۱ توسط بارگمن معرفی شد.

پایان نامه حاضر تلاشی است تا ارتباط متقابل بین نمایش های فوک- بارگمن و توموگرافیک را بدست آوریم. در فصل نخست پایان نامه تعاریف توابع شبه احتمال ویگنر، هوسیمی کانو و گلاوبر سودارشان را در قالب کلاس بزرگ توابع شبه احتمال S- پارامتری بیان می‌کنیم. خواهیم دید همه این توابع شبه احتمال نمادهای عملگر چگالی هستند که چنین نمادهایی برای هرعملگر دیگری نیز قابل تعریف اند. درفصل دوم به تعریف نمایش فوک- بارگمن حالت ها و عملگرها بر اساس حالت های همدوس نرمالیزه شده (حالت های همدوس گلاوبر) می‌پردازیم و سپس نمایش فوک- بارگمن حالت های همدوس چلانده [1] و عملگرهای $\hat{1}, \hat{a}, \hat{a}^{\dagger}, \hat{D}(w)$ را محاسبه می‌کنیم و در انتها به بررسی ارتباط بین نمایش فوک- بارگمن با نمایش مکان و تکانه می‌پردازیم. در فصل سوم به تعریف اپراتور توموگرافیک و نماد توموگرافیک عملگرها می‌پردازیم و فرم نرمال اپراتور توموگرافیک را می‌یابیم و سپس نماد توموگرافیک حالت های همدوس و حالت های فوک و عملگر واحد را می‌یابیم.درانتهای این فصل با تعویض جای پایه مستقیم و دوگان نمایش توموگرافیک، به نمایش جدیدی از حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها

که نمایش توموگرافیک دوگان نامیده می‌شود دست می‌یابیم و سپس به محاسبه نمایش توموگرافیک دوگان عملگر واحدو حالت‌های همدوس و حالت‌های فوک می‌پردازیم. در فصل چهارم تعریف جدیدی از نمایش بارگمن

حالت‌ها و عملگرها ارائه می‌دهیم که البته معادل تعریف بیان شده در فصل دوم می‌باشد ولی مبنای تعریف در این فصل حالت‌های همدوس غیر نرمالیزه شده است. در این فصل ابتدا رابطه اولیه‌ای برای ارتباط کلاس توابع شبه احتمال با نمایش بارگمن اپراتور چگالی می‌یابیم و سپس با استفاده از گروه $SU(1,1)$ تکنیکی برای جداسازی اپراتورهای مختلف در کوانتوم ارائه می‌دهیم و به نتیجه نهایی برای ارتباط کلاس توابع شبه احتمال با نمایش بارگمن اپراتور چگالی دست می‌یابیم و در انتها کلاس توابع شبه احتمال حالت‌های همدوس و حالت‌های همدوس

[1] Squeezed states

گرمایی و حالت‌های همدوس فاز را می‌یابیم. در فصل پنجم که در واقع قسمت اصلی پایان نامه است قصد داریم تا رابطه متقابل بین نمایش‌های فوک- بارگمن و توموگرافیک را بدست آوریم. در این فصل ابتدا با استفاده از تریس دو اپراتور بر حسب نمایش بارگمن اپراتورها، نمایش توموگرافیک اپراتورها را بر حسب نمایش بارگمن اپراتورها می‌یابیم و با استفاده از رابطه بدست آمده نمایش توموگرافیک اپراتور انتقال را می‌یابیم. در بخش بعدی با استفاده از ارتباط بین تابع ویگنر با نمایش بارگمن اپراتور چگالی، توموگرام یک حالت را بر حسب نمایش بارگمن اپرتور چگالی، توموگرام یک حالت را بر حسب نمایش بارگمن اپراتور چگالی نظیر آن حالت می‌یابیم و سپس با استفاده از این روش توموگرام حالت‌های همدوس گرمایی را بدست می‌آوریم. در انتها کلیه روابط بدست آمده را برای نمایش توموگرافیک دوگان نیز می‌یابیم و با استفاده از روابط بدست آمده نمایش توموگرافیک دوگان اپراتور انتقال و توموگرام دوگان حالت‌های همدوس گرمایی را می‌یابیم.

فصل اول

نمایش های فضای فاز

برای مکانیک کوانتمی

دراین فصل تعاریف توابع شبه احتمال ویگنر، هوسیمی- کانو و گلاوبر- سودارشان را در قالب کلاس بزرگ توابع شبه احتمال s- پارامتری بیان می‌کنیم. خواهیم دید تمام توابع شبه احتمال نمادهای عملگر چگالی هستند که چنین نمادهایی برای هر عملگر دیگر نیز قابل تعریف‌اند. در انتها نیز ارتباط بین نمادهای مرتبط با ترتیب‌های مختلف را بیان خواهیم کرد.

۱-۱ تابع نماد s- پارامتری عملگرها

فرض می‌کنیم که $\hat{F}$ یک عملگر دلخواه باشد. در صورتی که مجموعه بردارهای $\{|v_i\rangle\}$ یک مجموعه راست هنجار و کامل بسازند در این صورت هر عملگر $\hat{F}$ را می‌توانیم به صورت زیر بسط دهیم

$$\hat{F} = \hat{1}\hat{F}\hat{1} = \sum_{i.j=0}^{\infty} |v_i\rangle\langle v_i|\hat{F}|v_j\rangle\langle v_j| = \sum_{i,j=0}^{\infty} F_{i,j}|v_i\rangle\langle v_j| = \sum_{i.j=0}^{\infty} F_{i,j}\hat{U}_{i,j}$$

که $\hat{U}_{i,j}$ ها را به صورت $\hat{U}_{i,j} \triangleq |v_i\rangle\langle v_j|$ تعریف کرده‌ایم. عناصر ماتریسی $F_{i,j}$ را می‌توانیم به صورت زیر بیابیم

$$F_{i,j} = \langle v_i|\hat{F}|v_j\rangle = \mathrm{Tr}\Big(|v_j\rangle\langle v_i|\hat{F}\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\hat{U}_{i,j}^{\dagger}\hat{F}\Big)$$

همان طور که مشاهده می‌شود می‌توان عملگر $\hat{F}$ را بر حسب مجموعه پایه $\left\{\hat{U}_{i,j}\right\}$ با مولفه‌های $F_{i,j}$ بسط داد. در آنالیز برداری فرایندی مشابه را در مورد بردارها نیز بکار می‌بریم و یک بردار را بر حسب عناصر یک پایه بسط می‌دهیم. البته در آنجا مولفه‌های بردار مذکور را از طریق ضرب داخلی همان بردار در پایه دوگان بدست می‌آوریم. در تشابه با آنالیز برداری، در مکانیک کوانتمی، $\hat{F}$ نقش بردار و $\left\{\hat{U}_{i,j}\right\}$ نقش پایه و $\left\{\hat{U}_{i,j}^{\dagger}\right\}$ نقش پایه دوگان و ترکیب ضرب عملگری با عمل تریس نقش ضرب داخلی را بازی می‌کند. در اپتیک کوانتمی، برای توصیف عملگر چگالی نظیر حالت میدان تک مد، یک مجموعه عملگری (مجموعه عملگرهای ویگنر تعمیم یافته) با پارامتر ترتیب s به صورت زیر تعریف می‌کنند

$$\hat{U}_s(\alpha) = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\ \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi)\,\hat{D}(\xi,s) \qquad \alpha,\xi \in \mathbb{C} \tag{۱.۱}$$

که در آن $\hat{D}(\xi,s)$ بر حسب عملگر انتقال در فضای فاز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{D}(\xi,s) \equiv e^{\frac{s|\xi|^2}{2}}\hat{D}(\xi) = e^{\frac{s|\xi|^2}{2}}\exp\Big(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^* a\Big)$$

و $\hat{D}(\xi) = \exp\Big(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^* a\Big)$ همان اپراتور انتقال در فضای فاز است. می‌توان ثابت کرد که این مجموعه یک پایه برای بسط همه عملگرهای یک سیستم کوانتمی یک بعدی می‌سازند. یعنی هر عملگر دلخواه $\hat{F}$ را می‌توان به شکل زیر بر حسب آنها بسط داد

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\varphi_{\hat{F}}(\xi,s)\,\hat{D}(\xi,s) \tag{۲.۱}$$

" ضرب داخلی" بین $\hat{D}(\xi,s)$ ها با قاعده زیر (ضمیمه ج)

$$\mathrm{Tr}\Big\{\hat{D}(\alpha,s)\,\hat{D}^\dagger(\beta,-s)\Big\} = \pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta) \tag{۳.۱}$$

بدست می‌آید و معلوم می‌کند که دو خانواده $\hat{D}(\alpha,s)$ و $\hat{D}^\dagger(\beta,-s)$ نقش پایه دوگان را برای یکدیگر بازی می‌کنند. از اینجا معلوم می‌شود که ضرایب بسطی که در فرمول (۲.۱) ظاهر شده‌اند به شکل زیر قابل محاسبه هستند

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{D}^\dagger(\gamma,-s)\hat{F}\Big\} &= \int \frac{d^2\xi}{\pi}\varphi_{\hat{F}}(\xi,s)\,\mathrm{Tr}\Big\{\hat{D}^\dagger(\gamma,-s)\,\hat{D}(\xi,s)\Big\},\\ &= \int \frac{d^2\xi}{\pi}\varphi_{\hat{F}}(\xi,s)\,\pi\delta^{(2)}(\gamma-\xi),\\ &= \varphi_{\hat{F}}(\gamma,s)\end{aligned}$$

بنابر این هر عملگر دلخواه $\hat{F}$ را می‌توان به شکل زیر بسط داد

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\hat{D}^\dagger(\xi,-s)\Big\}\hat{D}(\xi,s) = \int \frac{d^2\xi}{\pi}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\hat{D}(\xi,s)\Big\}\hat{D}^\dagger(\xi,-s).$$

وقتی با عملگر چگالی سروکار داریم عبارت $\mathrm{Tr}\Big\{\hat{\rho}\hat{D}(\xi,s)\Big\}$ معنی مهمی از نظر تئوری احتمالات دارد. مثلا اگر $s = +1$ باشد آنگاه

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{D}(\xi,+1)\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\exp\left[\frac{1}{2}|\xi|^2 + \xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}\right]\right\},$$
$$= \left\langle : e^{\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}} : \right\rangle_{\hat{\rho}}$$

یعنی $\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{D}(\xi,+1)\right\}$ تابع مولد چشمداشتی های $\left\langle : \hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n : \right\rangle_{\hat{\rho}}$ است. به همین ترتیب

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{D}(\xi,-1)\right\} = \left\langle \vdots\, e^{\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a}} \,\vdots \right\rangle_{\hat{\rho}}$$

تابع مولد چشمداشتی‌های $\left\langle \vdots\, \hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n \,\vdots \right\rangle_{\hat{\rho}}$ است. در واقع با تعمیم تعریف ترتیب، به کلاس بزرگ ترتیب sپارامتری می‌توان نتایج فوق را به حالت کلی تعمیم داد. تعریف می‌کنیم

$$\left\{\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n\right\}_s \equiv \partial_\xi^m \partial_{-\xi^*}^n \hat{D}(\xi,s)\Big|_{\xi=0=\xi^*}, \qquad \hat{D}(\xi,s) = \exp\left(\frac{s}{2}\xi\xi^* + \xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right) \quad (٤.١)$$

یا بطور معادل

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\xi^m(-\xi^*)^n}{m!n!}\left\{\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n\right\}_s = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\xi^m(-\xi^*)^n}{m!n!}\partial_\alpha^m\partial_{-\alpha^*}^n\hat{D}(\alpha,s)\Big|_{\alpha=0=\alpha^*}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right)\right\}_s \equiv \hat{D}(\xi,s) \quad (٥.١)$$

به این ترتیب

$$\left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right)\right\}_{+1} \equiv \hat{D}(\xi,+1) = \exp\left(\xi\hat{a}^\dagger\right)\exp\left(-\hat{\xi}^*\hat{a}\right)$$
$$\left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right)\right\}_{-1} \equiv \hat{D}(\xi,-1) = \exp\left(-\hat{\xi}^*\hat{a}\right)\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger\right)$$
$$\left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right)\right\}_{0} \equiv \hat{D}(\xi,0) = \exp\left(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right)$$

که همان تعاریف مقدماتی ترتیب های نرمال، پاد نرمال و متقارن (یا وایل) است. بنابراین

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{D}(\xi,s)\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger - \hat{\xi}^*\hat{a}\right)\right\}_s\right\},$$
$$= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\xi^m(-\xi^*)^n}{m!n!}\left\langle\left\{\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n\right\}_s\right\rangle_{\hat{\rho}}.$$

یعنی $\mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{D}(\xi,s)\right\}$ تابع مولد چشمداشتی های $\left\langle\left\{\hat{a}^{\dagger m}\hat{a}^n\right\}_s\right\rangle_{\hat{\rho}}$ است و از دید تئوری احتمالات یک تابع مشخصه برای عملگر چگالی محسوب می‌شود. البته برخلاف آمار کلاسیک آنها لزوما به یک تابع

توزیع احتمال واقعی مربوط نمی‌شوند. با تبدیل فوریه این توابع مشخصه، می‌توان توزیع احتمال ها را پیدا کرد. از طرف دیگر چون جای عملیات تریس و محاسبه تبدیل فوریه قابل تعویض است می‌توان ابتدا تبدیل فوریه $\hat{D}(\xi,s)$ را محاسبه کرد و سپس عملیات تریس را برای حاصلضرب نتیجه و یک عملگر چگالی انجام داد. همانطور که دیدیم مجموعه عملگرهای ویگنر تعمیم یافته تبدیل فوریه کلاس $\hat{D}(\xi,s)$ است، یعنی

$$\hat{U}_s(\alpha)=\int\frac{d^2\xi}{\pi}\ \exp(\alpha\xi^*-\alpha^*\xi)\,\hat{D}(\xi,s),$$

است. بنابر این با توجه به اینکه $\left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger-\hat{\xi}^*\hat{a}\right)\right\}_s\equiv\hat{D}(\xi,s),$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\hat{U}_s(\alpha)&=\int\frac{d^2\xi}{\pi}\ \exp(\alpha\xi^*-\alpha^*\xi)\left\{\exp\left(\xi\hat{a}^\dagger-\xi^*\hat{a}\right)\right\}_s\\&=\left\{\int\frac{d^2\xi}{\pi}\exp\left(\xi\left[\hat{a}^\dagger-\alpha^*\right]-\xi^*\left[\hat{a}-\alpha\right]\right)\right\}_s\\&=\left\{\pi\delta^{(2)}\left(\hat{a}-\alpha,\hat{a}^\dagger-\alpha^*\right)\right\}_s\end{aligned}\tag{۶.۱}$$

اکنون با استفاده از این کلاس تابع نماد s- پارامتری عملگر $\hat{F}$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$W_{\hat{F}}(\alpha,s)\equiv\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s(\alpha)\hat{F}\right\}\tag{۷.۱}$$

در حالت ویژه‌ای که عملگر چگالی مورد بحث است این نماد، تابع ویگنر تعمیم یافته با پارامتر s (که یک تابع توزیع شبه احتمال است) نامیده می‌شود. به چنین نمایشی از عملگرها و حالت، نمایش بر فضای فاز گوییم. در ادامه به اختصار برخی از ویژگی های اساسی این نوع نمایش را مرور می‌کنیم. ابتدا از رابطه تعامد شروع می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که عملگرهای ویگنر تعمیم یافته در شرط

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s(\alpha)\hat{U}_{-s}(\beta)\right\}=\pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta)\tag{۸.۱}$$

صدق می‌کنند. برای اثبات از تعاریف شروع می‌کنیم

$$\mathrm{Tr}\Big\{\hat{U}_s(\alpha)\hat{U}_{-s}(\beta)\Big\} = \mathrm{Tr}\Bigg[\Bigg\{\int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\hat{D}(\xi,s)\Bigg\}\Bigg\{\int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{\beta\eta^*-\beta^*\eta}\hat{D}(\eta,-s)\Bigg\}\Bigg]$$
$$= \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\, e^{\beta\eta^*-\beta^*\eta}\,\mathrm{Tr}\Big\{\hat{D}(\xi,s)\hat{D}^\dagger(-\eta,-s)\Big\},$$

از طرفی با توجه به (۳.۱) داریم

$$\mathrm{Tr}\Big\{\hat{D}(\alpha,s)\hat{D}^\dagger(\beta,-s)\Big\} = \pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta)$$

پس

$$\mathrm{Tr}\Big\{\hat{U}_s(\alpha)\hat{U}_{-s}(\beta)\Big\} = \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\, e^{\beta\eta^*-\beta^*\eta}\,\pi\delta^{(2)}(\xi+\eta),$$
$$= \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\, e^{-\beta\xi^*+\beta^*\xi} = \pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta).$$

چون عملگرهای ویگنر تعمیم یافته، با تبدیل فوریه که یک تبدیل خطی معکوس پذیر است، به کلاس $\hat{D}(\xi,s)$ مربوط می‌شوند لذا آنها نیز پایه می‌سازند و هر عملگر $\hat{F}$ را می‌توانیم بر پایه عملگرهای $\hat{U}_{-s}(\alpha)$ به صورت زیر بسط دهیم

$$\hat{F} = \int \vartheta(\alpha,s)\,\hat{U}_{-s}(\alpha)\,\frac{d^2\alpha}{\pi}$$

برای محاسبه $\vartheta(\alpha,s)$ می‌توانیم از رابطه تعامد (۸.۱) بهره بگیریم و بنویسیم

$$\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\hat{U}_s(\beta)\Big\} = \int \vartheta(\alpha,s)\,\mathrm{Tr}\Big\{\hat{U}_s(\beta)\hat{U}_{-s}(\alpha)\Big\}\,\frac{d^2\alpha}{\pi}$$
$$= \int \vartheta(\alpha,s)\,\delta^{(2)}(\beta-\alpha)\,d^2\alpha = \vartheta(\beta,s) = W(\beta,s)$$

بنابراین هر عملگر دلخواه $\hat{F}$ را می‌توانیم به صورت زیر بسط دهیم

$$\hat{F} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}\Big\{\hat{F}\,\hat{U}_s(\alpha)\Big\}\,\hat{U}_{-s}(\alpha) \tag{۹.۱}$$

تریس حاصلضرب دو عملگر را می‌توان بر حسب نمادهای آنها به شکل زیر بدست آورد. اگر $\hat{G},\hat{F}$ دو عملگر دلخواه باشند آنگاه قضیه تریس حاصلضرب می‌گوید