دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان

حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل- تفاضلی خطی و معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه بالا با استفاده از روش هم محلی

تدوین

فاطمه چیت ساز اصفهانی

استاد راهنما

دکتر اسماعیل بابلیان

خرداد ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

امام علی (ع): هر کس به من کلمه ای بیاموزد، مرا بنده خود ساخته است.

بدینوسیله از جناب آقای دکتر اسمعیل بابلیان به خاطر رهنمودهایی که در تدوین پایان نامه ام داشته اند، سپاسگزاری می کنم و خداوند منان را شاکرم که افتخار شاگردی ایشان را به من عطا فرمود.

من در این مدت دو سال و اندی به اندازه وسعت اندیشه خویش و نه به قدر علم ایشان از دانش این استاد فرزانه بهره بردم.

همچنین از آقای دکتر یدالله اردوخانی به خاطر پذیرفتن داوری پایان نامه کمال تشکر را دارم.

همچنین از آقای دکتر شهنام جوادی که از محضر درسشان آموخته ها فراگرفتم و نیز داوری پایان نامه را به عهده گرفتند، سپاسگزارم.

و با تشکر از همه کسانی که از ابتدا تا کنون مرا آموختند که چگونه بیاموزم ...

چکیده

در این پایان نامه یک روش هم محلی چبیشف برای حل معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل-تفاضلی خطی آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{s=0}^{n} P_s^*(x)y^{(s)}(x-\tau) = g(x) + \int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)\,dt, \qquad (1)$$

به طوری که $-\tau \leq x \leq 0$ و $m \geq n$، تحت شرایط آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}y^{(k)}(a) + b_{ik}y^{(k)}(b) + c_{ik}y^{(k)}(c)) = \mu_i, \qquad i = 0, 1, ..., m-1, \qquad (2)$$

به طوری که $-\tau \leq a < c < b \leq 0$ و همچنین یک روش هم محلی لژاندر برای حل معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه بالا

$$\sum_{k=0}^{m} F_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)\,dt, \qquad -1 \leq x,t \leq 1, \qquad (3)$$

تحت شرایط آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(-1) + b_{jk}y^{(k)}(1) + c_{jk}y^{(k)}(0)) = \mu_j, \qquad j = 0, 1, ..., m-1, \qquad (4)$$

ارائه شده است. در این دو روش معادله‌ی (۱) با شرایط (۲) و معادله‌ی (۳) با شرایط (۴) به معادله ماتریسی که متناظر با یک دستگاه معادله جبری خطی است، تبدیل می شوند. بنابراین با حل معادله ماتریسی، ضرایب مجهول و در نتیجه جواب تقریبی حاصل می شود. اعتبار و کارایی روش های ارائه شده به وسیله چندین آزمایش عددی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: چند جمله ای های چبیشف، چند جمله ای های لژاندر، روش های تقریب، معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل فردهلم، معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل-تفاضلی خطی آمیخته، نقاط هم محلی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 65R20,45J05,42C10.

مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل در بسیاری از زمینه های کاربردی مانند مهندسی، مکانیک، فیزیک، الکترونیک، اقتصاد، نجوم و ... ظاهر می شوند [۳۰، ۴۲، ۳۸، ۲۰].
حل این گونه معادلات با استفاده از روش های تحلیلی اغلب بسیار مشکل و حتی غیرممکن بوده و بنابراین ریاضی دانان توجه خود را به استفاده از روش های عددی معطوف داشتند. از جمله روش های عددی مورد استفاده می توان روش تجزیه آدومین [۱] ، روش موجک هار [۲]، روش سری های والش [۳]، روش تائو [۴]، روش موجک-گلرکین [۵]، روش تکنیک تکراری یکنواخت [۶]، روش چندجمله ای تیلور [۷]، و ... را نام برد [۱۹، ۷، ۲۹، ۱۶، ۳۱، ۲۸]. روش چندجمله ای تیلور ابتدا توسط کانوال [۸] و لیو [۹] جهت حل معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفت [۱۷]، سپس سیزر [۱۰] این روش را توسعه داد و از آن برای حل معادلات انتگرال ولترا [۳۳]، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم [۳۲] و معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه بالا [۲۶] استفاده کرد. همچنین سیزر روش های هم محلی تیلور و چبیشف [۱۱] را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل خطی [۱۸]، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه بالا با ضرایب متغیر [۳]، معادلات تفاضلی خطی مرتبه بالا [۱۲]، ارائه کرد. سپس وی توانست یک روش ماتریسی تیلور را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل-تفاضلی فردهلم خطی [۳۴] ارائه کند.
معادلات انتگرال-دیفرانسیل به وسیله روش های عددی دیگر نظیر روش توابع ترکیبی فوریه و قطعه ای ثابت [۴]، روش موجک های سینوس-کسینوس [۱۲] [۳۷]، روش تفاضلات متناهی فشرده [۴۱]، روش توابع هار [۱۳] [۲۱]، روش مونت کارلو [۱۴] [۱۰] و ... نیز حل شده اند.

[۱] Adomian decomposition method
[۲] Haar Wavelet method
[۳] Walsh series method
[۴] Tau method
[۵] Wavelet-Galerkin method
[۶] monotone iterative technique method
[۷] Taylor polynomial method
[۸] Kanwal
[۹] Liu
[۱۰] Sezer
[۱۱] Chebyshev and Taylor collocation methods
[۱۲] sine-cosine wavelets method
[۱۳] Haar functions method
[۱۴] Monte Carlo method

از طرفی چندجمله ای های لژاندر و چبیشف [۱۵] توابع ویژه مسأله اشتورم-لیوویل منفرد هستند که به طور وسیعی در جواب مسائل مقدار مرزی و در دینامیک سیالات به کار می روند [۲۴، ۸]. لذا روش های بر پایه چندجمله ای های لژاندر و چبیشف برای حل معادلات انتگرال فردهلم [۳۶]، معادلات انتگرال نوع دوم [۲۲] و معادلات دیفرانسیل لژاندر مرتبه دوم [۹] استفاده شده اند.

در این پایان نامه ابتدا با استفاده از روابط ماتریسی بین چندجمله ای های چبیشف و مشتقاتشان به حل معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل-تفاضلی خطی آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{s=0}^{n} P_s^*(x)y^{(s)}(x-\tau) = g(x) + \int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)\,dt,$$
$$m \geq n,\ \tau > 0,\ -\tau \leq x \leq 0,$$

تحت شرایط آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik}y^{(k)}(a) + b_{ik}y^{(k)}(b) + c_{ik}y^{(k)}(c)) = \mu_i, \qquad i = 0, 1, ..., m-1,$$

می پردازیم، به طوری که $-\tau \leq a < c < b \leq 0$. سپس با استفاده از روابط ماتریسی بین چندجمله ای های لژاندر و مشتقاتشان به حل معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه بالا

$$\sum_{k=0}^{m} F_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda\int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)\,dt, \qquad -1 \leq x, t \leq 1,$$

تحت شرایط آمیخته

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk}y^{(k)}(-1) + b_{jk}y^{(k)}(1) + c_{jk}y^{(k)}(0)) = \mu_j, \qquad j = 0, 1, ..., m-1,$$

می پردازیم.

این پایان نامه شامل چهار فصل است که خلاصه ی هر یک به شرح زیر است:

فصل اول: مقدمات و پیش نیازها

این فصل شامل قضایا، تعاریف و مطالب مورد نیاز فصل های بعدی است.

فصل دوم: حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل-تفاضلی خطی آمیخته

در این فصل بعد از توضیح سیمای کلی روش هم محلی چبیشف، قضایا و روابط اصلی روش را بیان کرده و سپس به ارائه و توضیح دقیق روش می پردازیم، در انتها نیز به تحلیل خطا پرداخته ایم.

[۱۵] Chebyshev and Legendre polynomials

فصل سوم: حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی مرتبه بالا

این فصل شامل سیمای کلی روش هم محلی لژاندر، قضایا و روابط اصلی روش، ارائه و توضیح دقیق روش و تحلیل خطا است.

فصل چهارم: مثال های عددی

در این فصل برای هر دو نوع معادلات ارائه شده در فصل های دوم و سوم چند مثال عددی بیان کرده و روش های توضیح داده شده را روی آن ها پیاده سازی کرده ایم. هم چنین جواب های تقریبی به دست آمده و خطاها را در جداولی با جواب واقعی و جواب های تقریبی به دست آمده از روش های دیگر مقایسه کرده ایم.

در این پایان‌نامه از مقاله‌های زیر به عنوان مقاله‌های اصلی استفاده شده است:

M. Gulsu, Y. Ozturk, M. Sezer, *A new collocation method for solution of mixed linear integro-differential-difference equations*, Appl. Math. Comput. 216 (2010) 2183–2198.

S. Yalcinbas, M. Sezer and H.H. Sorkon, *Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations*, Appl. Math. Comput. 210 (2009) 334–349.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

این فصل را به بیان تعاریف و مطالبی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز داریم، اختصاص می‌دهیم. در ابتدا با استفاده از [۲۵] به ارائه تعاریف اولیه می پردازیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری X روی میدان $\mathbb{F}$ را یک فضای نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ نامند هرگاه به ازای هر $x \in X$، یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$نظیر شود به‌طوری‌که:

۱. به ازای هر $x \in X$، $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲. به ازای هر $x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

۳. به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. ضرب داخلی روی X تابعی مانند $\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$ است به‌طوری‌که به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

۲. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.

۳. $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$.

۴. $\langle x,x\rangle \geq ۰$

۵. $\langle x,x\rangle = ۰ \iff x = ۰$.

زوج $(X,\langle .,.\rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی نامند.
هر فضای ضرب داخلی با نرم $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ یک فضای خطی نرم دار است.

تعریف ۳.۱.۱. خانواده ی $\{\phi_i(x), i = ۰,۱,۲,...\}$ که ϕ_i چندجمله ای از درجه i است، متعامد نامیده می شود اگر برای هر $i \neq j$ داشته باشیم:

$$\langle \phi_i,\phi_j\rangle = ۰.$$

خانواده متعامد $\{\phi_i(x), i = ۰,۱,۲,...\}$ متعامد نرمال نامیده می شود اگر به ازای هر i داشته باشیم:

$$\| \phi_i \| = ۱.$$

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه همه توابع f که $\int_{-۱}^{۱} |f(x)|^p\, dx$ موجود و متناهی است، یک فضای برداری تشکیل می دهد که آن را با $L^p(-۱,۱)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای برداری نرم دار، کوشی گفته می شود اگر

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} \|x_{n+p} - x_n\| = ۰.$$

تعریف ۶.۱.۱. فضای برداری نرم دار X، کامل گفته می شود اگر هر دنباله کوشی در X به یکی از عناصر X همگرا باشد.

تعریف ۷.۱.۱. یک فضای ضرب داخلی کامل، فضای هیلبرت نامیده می شود.

حال با استفاده از [۶، ۱، ۳۵، ۲۵] مطالب بخش های ۲.۱ ، ۳.۱ و ۴.۱ را ارائه می کنیم و سپس در بخش ۵.۱ با استفاده از [۵] به ارائه تعاریف مقدماتی می پردازیم.

۲.۱ فضاهای سوبولف[۱]

در این قسمت فضاهای هیلبرتی را معرفی می کنیم که در تحلیل عددی مسائل مقدار مرزی ظاهر می شوند. آن ها فضاهای توابع انتگرال پذیری هستند که دارای تعداد مشخصی از مشتقات قابل نمایش به صورت توابع مربع- انتگرال پذیر هستند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید (a,b) یک بازه کراندار از خط حقیقی و $m \geq ۰$ یک عدد صحیح باشد. فضای سوبولف $H^m(a,b)$ را فضای برداری از توابع $\nu \in L^۲(a,b)$ تعریف می کنیم که همه مشتقات ν تا مرتبه m متعلق به $L^۲(a,b)$ باشند. به عبارت دیگر

$$H^m(a,b) = \{\nu \in L^۲(a,b) | \frac{d^k \nu}{dx^k} \in L^۲(a,b),\ ۰ \leq k \leq m\}.$$

فضای $H^m(a,b)$ با ضرب داخلی

$$(u,\nu)_m = \sum_{k=۰}^{m} \int_a^b \frac{d^k u}{dx^k}(x) \frac{d^k \nu}{dx^k}(x)\, dx,$$

یک فضای هیلبرت ایجاد می کند. نرم سوبولف [۲] به صورت:

$$\|\nu\|_{H^m(a,b)} = \left(\sum_{k=۰}^{m} \|\frac{d^k \nu}{dx^k}\|^۲_{L^۲(a,b)} \right)^{۱/۲},$$

تعریف می شود. فضاهای سوبولف $H^m(a,b)$ سلسله مراتبی از فضاهای هیلبرت به شکل

$$...H^{m+۱}(a,b) \subset H^m(a,b) \subset ... \subset H^۰(a,b) \equiv L^۲(a,b),$$

تشکیل می دهند که هر نگاشت شمول پیوسته است [۶]. واضح است که اگر تابع u دارای m مشتق پیوسته در $[a,b]$ باشد، آنگاه u متعلق به $H^m(a,b)$ است، یعنی

$$C^m[a,b] \subset H^m(a,b).$$

بر عکس، اگر برای $m \geq ۱$، u متعلق به $H^m(a,b)$ باشد، آنگاه u دارای $m-۱$ مشتق پیوسته در $[a,b]$ است [۶]، یعنی

$$H^m(a,b) \subset C^{m-۱}[a,b].$$

---

[۱] Sobolev spaces

[۲] Sobolev norm

در واقع $H^m(a,b)$ به صورت

$$H^m(a,b) = \{\nu \in C^{m-1}[a,b] : \frac{d}{dx}\nu^{(m-1)} \in L^2(a,b)\},$$

نیز تعریف می شود.

۱.۲.۱ نامساوی پوانکاره [۳]

فرض کنید ν تابعی از $H^1(a,b)$ باشد. می دانیم که ν روی بازه $[a,b]$ پیوسته است. نامساوی پوانکاره می گوید که اگر در یک نقطه $x_0 \in [a,b]$، $\nu(x_0) = 0$ باشد آنگاه عدد ثابت C (وابسته به طول بازه یعنی، $b-a$) وجود دارد به طوری که

$$\|\nu\|_{L^2(a,b)} \le C\|\nu'\|_{L^2(a,b)},$$

یعنی L^2-نرم تابع به وسیله L^2-نرم مشتقش کراندار است.

۳.۱ روش هم محلی [۴]

روش هم محلی راهبردی فراهم می کند که توسط آن می توانیم بسیاری از مسائل را در ریاضیات کاربردی حل کنیم. حال یک توصیف کلی ارائه می دهیم. فرض کنید یک عملگر خطی L داشته باشیم (مانند یک عملگر انتگرال یا عملگر دیفرانسیل) و بخواهیم معادله تابعی زیر را حل کنیم:

$$LU = W, \tag{۱.۱}$$

در این معادله W مفروض و U مجهول است. برخی روش های تقریبی برای حل معادله (۱.۱) با انتخاب یک مجموعه پایه ای $\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n\}$ شروع می کنند و سپس سعی می کنند معادله (۱.۱) را با یک U به شکل زیر حل کنند:

$$U = c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + ... + c_n\nu_n, \tag{۲.۱}$$

[۳] Poincare inequality

[۴] collocation method

چون L یک عملگر خطی است، داریم:

$$LU = \sum_{j=1}^{n} c_j L\nu_j,$$

و بنابراین معادله (۱.۱) منجر به معادله زیر می شود:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j L\nu_j = W. \tag{۳.۱}$$

به طور کلی، ما قادر به حل دستگاه (۳.۱) نسبت به ضرایب c_1، c_2، ... ، c_n نخواهیم بود. ولی احتمالاً می توانیم معادله (۳.۱) را تقریباً حل کنیم. در روش هم محلی U، W و ν_j ها همگی توابعی بر روی یک دامنه مشترک هستند. بنابراین نیاز داریم که مقادیر توابع W و $\sum_{j=1}^{n} c_j L\nu_j$ در n نقطه از پیش تعیین شده یکسان باشند:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L\nu_j)(t_i) = W(t_i), \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{۴.۱}$$

این یک دستگاه با n معادله خطی است که از آن می توانیم مقادیر n ضریب مجهول c_j را محاسبه کنیم. البته توابع ν_j و نقاط t_i باید به گونه ای انتخاب شوند که ماتریس با درایه های $(L\nu_j)(t_i)$ نامنفرد باشد.

۴.۱ تقریب چندجمله ای

بسط تابع u برحسب دنباله نامتناهی از توابع متعامد $\{\phi_k\}$، یعنی $u = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k \phi_k$، زیربنای بسیاری از روش های عددی تقریبی است.

۱.۴.۱ مسائل اشتورم-لیوویل [5]

از آنجایی که تقریبی از جواب معادله دیفرانسیل معمولاً به صورت یک بسط متناهی از توابع ویژه یک مسأله اشتورم-لیوویل مناسب است، مسائل اشتورم-لیوویل دارای اهمیت اند.

[5] Sturm-Liouville problems

مسأله اشتورم-لیوویل یک مسأله مقدار ویژه در بازه $(-۱,۱)$ به شکل زیر است:

$$-(pu^{'})^{'}+qu=\lambda wu,$$

و شرایط مرزی مناسب برای u، (۵.۱)

که ضرایب p، q و w توابع حقیقی-مقدار معلوم اند به طوری که:
تابع p در بازه $(-۱,۱)$ به طور پیوسته مشتق پذیر و اکیداً مثبت و در نقاط $x=\pm ۱$ پیوسته است،
تابع q در $(-۱,۱)$ پیوسته، نامنفی و کراندار است،
تابع وزن w در $(-۱,۱)$ پیوسته، نامنفی و انتگرال پذیر است.

مثال ۱.۴.۱. *مسأله اشتورم-لیوویل*

$$\begin{cases} u^{''}+\lambda u=۰, \\ u^{'}(-۱)=u^{'}(۱)=۰, \end{cases}$$

را در بازه $(-۱,۱)$ در نظر بگیرید، این مسأله دارای مقادیر ویژه $\lambda_k=(\pi k)^۲/۲$ *و توابع ویژه متناظر* $\phi_k(x)=\cos(\frac{k\pi}{۲}(x+۱))$، $k=۱,۲,\ldots$*است* [۶].

تعریف ۲.۴.۱. یک مسأله اشتورم-لیوویل منفرد نامیده می شود در صورتی که تابع p برای حداقل یک نقطه در مرز صفر شود.

۲.۴.۱ دستگاه های متعامد از چند جمله ای ها

حال می خواهیم نظریه بسط یک تابع بر حسب دستگاهی از چند جمله ای های متعامد را بررسی کنیم.
فضای چندجمله ای های از درجه کوچکتر یا مساوی N را با $\mathbb{P}_N$ نمایش می دهیم.
فرض کنید که $\{p_k\}_{k=۰,۱,\ldots}$ دستگاهی از چندجمله ای های جبری (p_k از درجه k) است، که در بازه $(-۱,۱)$ نسبت به تابع وزن w دو به دو متعامدند:

$$\int_{-۱}^{۱} p_k(x)p_m(x)w(x)\,dx=۰, \qquad m\neq k. \tag{۶.۱}$$

می دانیم که $L^۲_w(-۱,۱)$ فضای توابع ν ای با ضرب داخلی به صورت

$$(u,\nu)_w=\int_{-۱}^{۱} u(x)\nu(x)w(x)\,dx, \tag{۷.۱}$$

است به طوری که نرم

$$\|\nu\|_w = (\int_{-1}^{1} |\nu|^2 w(x)\,dx)^{1/2}, \tag{۸.۱}$$

متناهی است. در صورتی که $w \equiv 1$ (تابع وزن لژاندر)، از نمایش ساده تر $L^2(-1,1)$ به جای $L^2_w(-1,1)$ استفاده می کنیم. $u \in L^2_w(-1,1)$ بر حسب جملاتی از دستگاه $\{p_k\}$ به صورت سری

$$Su = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k p_k,$$

بسط داده می شود، که در آن $\hat{u}_k$، ضرایب بسط، به صورت

$$\hat{u}_k = \frac{1}{\|p_k\|_w^2} \int_{-1}^{1} u(x) p_k(x) w(x)\,dx, \tag{۹.۱}$$

تعریف می شوند. معادله (۹.۱) تبدیل چندجمله ای [۶] از u را نشان می دهد. برای عدد صحیح $N > 0$، مجموع برشی u از مرتبه N چندجمله ای

$$\mathcal{P}_N u = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k p_k \in \mathbb{P}_N, \tag{۱۰.۱}$$

است. از (۶.۱) نتیجه می شود که $\mathcal{P}_N u$ تصویر متعامد u روی $\mathbb{P}_N$ با ضرب داخلی (۷.۱) است، یعنی

$$(\mathcal{P}_N u, \nu)_w = (u, \nu)_w, \qquad \forall \nu \in \mathbb{P}_N. \tag{۱۱.۱}$$

کامل بودن دستگاه $\{p_k\}$ معادل با این است که برای هر $u \in L^2_w(-1,1)$ وقتی $N \to \infty$ داشته باشیم:

$$\|u - \mathcal{P}_N u\|_w \to 0. \tag{۱۲.۱}$$

۳.۴.۱ چندجمله ای های لژاندر

چندجمله ای های لژاندر $L_k(x)$، $k = 0, 1, \ldots$، توابع ویژه مسأله اشتورم-لیوویل منفرد

$$((1 - x^2) L'_k(x))' + k(k+1) L_k(x) = 0, \tag{۱۳.۱}$$

[۶] polynomial transform

هستند که با توجه به (۵.۱)، $p(x) = ۱ - x^۲$، $q(x) = ۰$ و $w(x) = ۱$ است. $L_k(x)$ فرد (زوج) است، اگر k فرد (زوج) باشد. برای هر $k \geq ۰$ داریم:

$$L_k(x) = \frac{۱}{۲^k} \sum_{i=۰}^{\lfloor k/۲ \rfloor} (-۱)^i \binom{k}{i} \binom{۲k - ۲i}{k} x^{k-۲i}, \tag{۱۴.۱}$$

به طوری که $\lfloor k/۲ \rfloor$ نشان دهنده قسمت صحیح $k/۲$ است.

لم ۳.۴.۱. *چندجمله ای های لژاندر با جملات اولیه $L_۰(x) = ۱$ و $L_۱(x) = x$ در روابط بازگشتی*

$$L_{k+۱}(x) = \frac{۲k+۱}{k+۱} x L_k(x) - \frac{k}{k+۱} L_{k-۱}(x), \tag{۱۵.۱}$$

$$(۲k+۱) L_k(x) = L'_{k+۱}(x) - L'_{k-۱}(x), \tag{۱۶.۱}$$

صدق می کنند.

برهان. به [۱] رجوع شود. □

لم ۴.۴.۱. *برای چندجمله ای های لژاندر رابطه*

$$\int_{-۱}^{۱} L_m(t) L_n(t)\, dt = \begin{cases} \frac{۲}{۲m+۱}, & m = n, \\ ۰, & m \neq n, \end{cases}$$

برقرار است.

برهان. به [۳۵] رجوع شود. □

با توجه به این که $w(x) = ۱$، از لم ۴.۴.۱ می توان نتیجه گرفت که چندجمله ای های لژاندر $\{L_k(x)\}_{k=۰,۱,\dots}$روی بازه $(-۱, ۱)$ دوبه دو متعامدند.

بسط لژاندر تابع $u \in L^۲(-۱, ۱)$ به صورت

$$u(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} \hat{u}_k L_k(x),$$

است که در آن

$$\hat{u}_k = (k + \frac{۱}{۲}) \int_{-۱}^{۱} u(x) L_k(x)\, dx.$$

۴.۴.۱ چندجمله ای های چبیشف

چندجمله ای های چبیشف نوع اول [۷]، $T_n(x)$، $n=0,1,\ldots$، توابع ویژه مسأله اشتورم-لیوویل منفرد

$$(\sqrt{1-x^2}T_n'(x))' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x) = 0,$$

هستند که با توجه به (۵.۱)، $p(x)=(1-x^2)^{1/2}$، $q(x)=0$ و $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ است.

تعریف ۵.۴.۱. چندجمله ای چبیشف نوع اول $T_n(x)$، یک چندجمله ای از درجه n بر حسب x است که به وسیله رابطه

$$T_n(x) = \cos n\theta, \qquad x = \cos\theta, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{۱۷.۱}$$

تعریف می شود. اگر $-1 \le x \le 1$ آنگاه $0 \le \theta \le \pi$ است.

واضح است که $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ و $|T_n(x)| \le 1$ و اگر n زوج(فرد) باشد، آنگاه $T_n(x)$ زوج(فرد) است.

لم ۶.۴.۱. *چندجمله ای های چبیشف نوع اول با جملات اولیه $T_0(x)=1$ و $T_1(x)=x$ در رابطه بازگشتی*

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{۱۸.۱}$$

صدق می کنند.

برهان. به [۲۵] رجوع شود. □

تعریف ۷.۴.۱. چندجمله ای چبیشف نوع دوم [۸]، $U_n(x)$، یک چندجمله ای از درجه n برحسب x است که به وسیله رابطه بازگشتی

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad x = \cos\theta, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{۱۹.۱}$$

تعریف می شود. به طور مشابه اگر $-1 \le x \le 1$ باشد، آنگاه $0 \le \theta \le \pi$ است.

[۷] first-kind Chebyshev polynomials

[۸] secend-kind Chebyshev polynomial

لم ۱.۴.۸. *چندجمله ای های چبیشف نوع دوم با شرایط اولیه* $U_\circ(x) = 1$ *و* $U_1(x) = 2x$ *در رابطه بازگشتی*

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, ..., \tag{۱.۲۰}$$

صدق می کنند.

برهان. به [۲۵] رجوع شود. □

با توجه به اتحاد مثلثاتی

$$\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta = 2\sin\theta\cos n\theta,$$

رابطه بین چندجمله ای های چبیشف نوع اول و دوم به صورت

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \qquad n = 2, 3, ..., \tag{۱.۲۱}$$

است. با مشتق گیری از $T_n(x)$ در (۱.۱۷) نسبت به x و استفاده از (۱.۱۹) داریم:

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x),$$

بنابراین با استفاده از شرایط اولیه $U_\circ(x) = 1$ و $U_1(x) = 2x$ و (۱.۲۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = 2n \sum_{\substack{r=\circ, \\ \text{فرد } n-r}}^{n-1}{}' \; T_r(x), \qquad n \geq \circ, \tag{۱.۲۲}$$

که در آن $\sum{}'$ نشان دهنده مجموعی است که جمله اول آن نصف شده است.

لم ۱.۴.۹. *برای چندجمله ای های چبیشف نوع اول رابطه*

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \pi, & i = j = \circ, \\ \frac{\pi}{2}\,\delta_{ij}, & i, j > \circ, \end{cases}$$

برقرار است.

برهان. به [۲۵] رجوع شود. □