دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده هوافضا

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ارتعاشی بال تحت شرایط اتفاقی و عوامل غیرخطی

استاد راهنما

دکتر سعید ایرانی

دانشجو

سعید سازش

زمستان ۹۰

وَلَا يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلَّا بِمَا شَاءَ

تقدیم به پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

که برای دور تر دیدن روی شانه هایشان ایستادم

با تشکر از

دکتر سعید ایرانی

استاد ارزشمندم که با سعه صدر خویش بستر لازم را برای رشد علمی حقیر فراهم نمودند.

و

دکتر امیراعلاءالدین مطلبی

دوست ارجمندم به جهت حمایت‌های معنوی بی‌دریغشان در طول مدت تحصیل و انجام این رساله.

چکیده:

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی ارتعاشات اتفاقی پرداخته و سپس پاسخ سیستم یک درجه آزادی، چند درجه آزادی و سیستم پیوسته خطی به تحریک اتفاقی بررسی می‌گردد. در ادامه به عنوان یک سیستم چند درجه آزادی از مدل بالواره‌ای که تحت اثر نیروی برآ، ممان آیرودینامیکی و تحریک اتفاقی و در حال پرواز با سرعتی معین است، استفاده کرده و خواص آماری پاسخ آن، به‌دست می‌آید. برای بررسی ارتعاشات اتفاقی سیستم‌های پیوسته تحلیل آماری بر تیر اولر برنولی با شرایط مرزی متفاوت اعمال و در مرحله بعد از مدل یک بال تحت ارتعاشات پیچشی و خمشی استفاده می‌گردد. متعاقباً یک روش جدید مبتنی بر واریانس پاسخ برای بررسی نقطه ناپایداری[۱] (سرعت ناپایداری) سیستم معرفی می‌شود. در گام بعدی پس از معرفی روش خطی سازی آماری، به بررسی رفتار ارتعاشی بالواره‌ای که دارای عامل غیرخطی سختی پیچشی می‌باشد و تحت اثر تحریک‌های آیرودینامیکی و اتفاقی قرار می‌گیرد، پرداخته می‌شود. با تحلیل این رفتار و بدست آوردن واریانس پاسخ به ازای سرعت‌های مختلف جریان، پدیده آشوب[۲] در واریانس سیستم اتفاقی مشاهده می‌شود که برای حالت فنر سخت شونده پیچشی از مسیر دوبرابر شدن پریود[۳] و برای حالت فنر نرم شونده از مسیر هروله[۴] می‌باشد. نهایتاً با استفاده از تحلیل آشوب نقطه پرش در منحنی واریانس بر حسب سرعت محاسبه شده و از روی آن پارامترهای آماری پاسخ بدست می‌آید.

کلمات کلیدی: ارتعاشات اتفاقی، چگالی احتمال، فلاتر، سیستم‌غیرخطی، خطی سازی آماری، آشوب

[1] Flutter
[2] Chaos
[3] Period-Doubling Scenario
[4] Intermittency

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه ۱

۱-۱) پیشگفتار ۲

۱-۲) ارتعاشات تصادفی ۲

۱-۳) آیروالاستیسیته ۲

۱-۳-۱) انواع ناپایداری در آیروالاستیسیته ۲

۱-۳-۲) فلاتر خطی و غیرخطی ۳

۱-۴) اثرات غیرخطی کننده‌ی سازهای ۳

۱-۵) مروری بر کارهای گذشته ۴

۱-۵-۱) تاریخچه‌ی روشهای پاسخ دقیق برای سیستمهای غیرخطی تصادفی ۴

۱-۵-۲) تاریخچه‌ی روشهای پاسخ تقریبی برای سیستمهای غیرخطی تصادفی ۴

۱-۵-۳) تاریخچه‌ی بررسی اثرات غیرخطی در آیروالاستیسیته ۶

۱-۶) اساس و اهداف کار ۹

فصل دوم: پاسخ سیستم‌های گسسته و پیوسته‌ی خطی به تحریک اتفاقی ۱۱

۲-۱) مقدمه و مفاهیم اساسی ۱۲

۲-۱-۲) ضریب خود وابستگی ۱۳

۲-۱-۳) چگالی طیفی ۱۴

۲-۱-۴) دیگر-وابستگی ۱۵

۲-۱-۵) وابستگی ۱۶

۲-۱-۶) ضریب همبستگی ۱۶

۲-۱-۷) فرآیند باند باریک ۱۶

۲-۱-۸) فرآیند باند پهن ۱۷

۲-۱-۹) نویز سفید ۱۷

۲-۲) پاسخ به نیروی تصادفی در سیستم یک درجه آزادی ۱۸

۲-۲-۱) خود همبستگی پاسخ ۱۹

۲-۲-۲) چگالی طیفی پاسخ ۲۰

۲-۲-۳) پاسخ نوسانگر به نویز سفید ۲۰
۲-۳) پاسخ به دو بار تصادفی..... ۲۲
۲-۴) پاسخ به بارهای تصادفی در سیستمهای چند درجه آزادی..... ۲۴
۲-۴-۱) پاسخ ناشی از یک نیروی تصادفی ۲۴
۲-۴-۲) پاسخ به نیروهای تصادفی چندگانه..... ۲۵
۲-۴-۳) روش پاسخ ضربه ۲۵
۲-۴-۴) روش آنالیز مودال ۲۷
۲-۵) معادلات حرکت در فضای حالت ۳۱
۲-۶) ارتعاش تصادفی سیستم پیوسته ۳۶
۲-۶-۱) ارتعاش عرضی تیرها ۳۶
۲-۶-۲) ارتعاش عرضی تصادفی ۳۷
فصل سوم: مدل‌سازی دینامیکی بالواره و بال ۴۱
۳-۱) مقدمه..... ۴۲
۳-۲) مدل‌سازی بالواره‌ی دو درجه آزادی ۴۲
۳-۳) مدل‌سازی بال..... ۴۴
۳-۴) تئوری‌های آیرودینامیکی ۴۷
۳-۴-۱) جریان آیرودینامیکی پایا ۴۷
۳-۴-۲) جریان آیرودینامیکی شبه پایا..... ۴۸
۳-۴-۳) جریان آیرودینامیکی ناپایا..... ۴۸
فصل چهارم: خطی سازی آماری معادلات غیرخطی ۴۹
۴-۱) مقدمه..... ۵۰
۴-۲) خطی سازی برای المانهای غیرخطی با حافظه صفر ۵۰
۴-۲) خطی سازی برای سیستم یک‌درجه آزادی ۵۱
۴-۲-۱) خطی سازی برای سیستم یک‌درجه آزادی با سختی غیرخطی ۵۱
۴-۲-۲) پاسخ به تحریک باند باریک ۵۴
۴-۲-۳) خطی سازی برای سیستم یکدرجه آزادی با سختی و استهلاک غیرخطی ۵۵
۴-۳) خطی سازی برای سیستم‌های غیرخطی چند درجه آزادی با پاسخ ایستا ۵۷

فصل پنجم: تحلیل اتفاقی مدل‌های خطی و غیرخطی ۶۳
۵-۱) مقدمه ۶۴
۵-۲) تحلیل بالواره دو درجه آزادی ۶۴
۵-۳) تحلیل تیر اولربرنولی ۷۰
۵-۴) تحلیل بال سه‌بعدی ۷۴
۵-۵) تحلیل بالواره غیرخطی ۸۰
۵-۵-۱) غیرخطی فنر سخت شونده ۸۲
۵-۵-۲) غیرخطی فنر نرم شونده ۹۰
فصل ششم: نتایج ۹۴
۶-۱) مقدمه ۹۵
۶-۲) نتایج بررسی بالواره‌ی دو درجه آزادی ۹۵
۶-۳) نتایج بررسی تیر اولربرنولی ۹۶
۶-۴) نتایج بررسی بال سه‌بعدی ۹۷
۶-۵) نتایج بررسی بالواره دوبعدی غیرخطی ۹۸
۶-۷) پیشنهادات برای ادامه فعالیت ۹۹
مراجع ۱۰۰
پیوست‌ها ۱۰۶
پیوست ۱ ..... ۱۰۷
پیوست ۲ ..... ۱۰۸

فهرست اشکال

شکل ۲- ۱ شکل شماتیک مقدار میانگین برای یک فرآیند تصادفی نمونه ۱۲
شکل ۲- ۲ شکل شماتیک انحراف معیار برای یک فرآیند تصادفی نمونه ۱۳
شکل ۲- ۳ نمودار شماتیک خود همبستگی برای یک فرآیند تصادفی نمونه ۱۴
شکل ۲- ۴ نمودار شماتیک چگالی طیفی بر حسب فرکانس برای یک فرآیند تصادفی نمونه ۱۴
شکل ۲- ۵ نمودار دو فرآیند تصادفی $x(t)$ و $y(t)$ نمونه ۱۵
شکل ۲- ۶ نمودار شماتیک چگالی طیفی یک فرآیند باند باریک ۱۶
شکل ۲- ۷ نمودار شماتیک خود همبستگی برای فرآیند باند باریک شکل (۲-۶) ۱۶
شکل ۲- ۸ نمودار زمانی و چگالی طیفی یک فرآیند باند پهن نمونه ۱۷
شکل ۲- ۹ نمایش چگونگی تبدیل یک فرآیند خود همبستگی برای نویز سفید به یک تابع ضربه . ۱۷

شکل ۳- ۱ نمایش هندسی شماتیک مقطع بال با دو درجه‌ی آزادی ۴۲
شکل ۳- ۲ نمودار جسم آزاد یک بال و مقطع آن ۴۴

شکل ۵- ۱ مقایسه بخش حقیقی و مختلط تقریب بهدست آمده برای $C(K)$ و معادله اصلی آن... ۶۷
شکل ۵- ۲ تابع چگالی طیفی پاسخ برای سرعتهای مختلف جریان (الف) ، واریانس پاسخ بر حسب سرعت (ب) ۶۸
شکل ۵- ۳ تابع چگالی طیفی جابهجایی بر حسب سرعت و فرکانس ۶۸
شکل ۵- ۴ تابع چگالی احتمال پاسخ (الف) پاسخ اتفاقی جابه‌جایی بر حسب زمان (ب)..... ۶۹
شکل ۵- ۵ پاسخ اتفاقی جابه‌جایی بر حسب زمان برای دو سرعت مختلف ۶۹
شکل ۵- ۶ تابع چگالی طیفی بر حسب فرکانس و در امتداد تیر – یک سرگیردار (الف) دوسرگیردار (ب) ۷۳
شکل ۵- ۷ واریانس نقاط مختلف تیر – یکسرگیردار (الف) دوسرگیردار (ب) ۷۳
شکل ۵- ۸ چگالی طیفی پاسخ بال گولند بر حسب فرکانس و به ازای نقاط مختلف بال در دو سرعت مشخص ۷۸
شکل ۵- ۹ چگالی طیفی پاسخ بال گولند بر حسب فرکانس و به ازای نقاط مختلف بال در سرعت فلاتر ۷۹
شکل ۵- ۱۰ چگالی طیفی پاسخ جابه‌جایی نوک تیر (الف) تابع چگالی احتمال جابهجایی نوک تیر(ب) ۷۹
شکل ۵- ۱۱ پاسخ اتفاقی جابه‌جایی نوک تیر در سرعت قبل و بعد از فلاتر ۷۹
شکل ۵- ۱۲ نیروی بازگرداننده فنر پیچشی در سه حالت خطی، غیرخطی سخت و نرم شونده..... ۸۱
شکل ۵- ۱۳ نمایش نگاشت معادله (۵-۶۸) و تعداد تکرار برای همگرایی پاسخ به ازای سرعتهای مختلف ۸۲

شکل ۵- ۱۴ نمایش نگاشت معادله (۵-۶۸) و تعداد تکرار برای همگرایی پاسخ به ازای سرعتهای مختلف ۸۳
شکل ۵- ۱۵ فرآیند تعداد تکرار برای همگرایی پاسخ به ازای سرعتهای مختلف ۸۴
شکل ۵- ۱۶ نمایش نگاشت (۵-۶۸) به همراه فرآیند تکرار(الف)تا(ث)، نگاشت به ازای سرعتهای مختلف جریان(ج) ۸۵
شکل ۵- ۱۷ نقطه دافع و جاذب روی نمودار نگاشت (۵-۶۸) در سرعت ۲۲/۶ متربرثانیه ۸۶
شکل ۵- ۱۸ نمودار واریانس بر حسب سرعت تا قبل از سرعت دو شاخگی..... ۸۶
شکل ۵- ۱۹ دو شاخگی‌های متوالی در واریانس پاسخ ۸۶
شکل ۵- ۲۰ نمودار واریانس پاسخ و مشخص نمودن محدودهی آشوب..... ۸۸
شکل ۵- ۲۱ نمودار واریانس پاسخ زاویه‌ای بر حسب سرعت(فنر سخت شونده) ۸۸
شکل ۵- ۲۲ واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان و پدیده پرش روی آن (فنر سخت شونده) ۸۹
شکل ۵- ۲۳ معادله (۵-۷۱) و پرش در پاسخ آن به ازای سرعت ۲۲/۴۵ متربرثانیه ۸۹
شکل ۵- ۲۴ نمایش نگاشت (۵-۶۸) به همراه فرآیند تکرار (فنر نرم شونده)..... ۹۰
شکل ۵- ۲۵ واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان و پدیده پرش روی آن (فنر نرم شونده)..... ۹۱
شکل ۵- ۲۶ واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان و محدوده آشوب روی آن (فنر نرم شونده) ۹۱
شکل ۵- ۲۷ معادله (۵-۷۱) و پرش در پاسخ آن به ازای سرعت ۲۲/۴۵ متربرثانیه ۹۲
شکل ۵- ۲۸ مقایسه نمودار واریانس بر حسب سرعت جریان در حالت فنر خطی و فنر غیرخطی نرم و سخت شونده ۹۲
شکل ۵- ۲۹ تابع چگالی احتمال زاویه پیچش و پاسخ اتفاقی آن بر حسب زمان برای سرعت‌های بحرانی - فنرخطی (الف) غیرخطی سخت شونده (ب) فنر غیرخطی نرم شونده (پ) ۹۳

شکل ۶- ۱ تابع چگالی طیفی بالواره دو درجه آزادی به ازای سرعت‌های مختلف (الف)..... ۹۵
شکل ۶- ۲ نمودار ورایانس پاسخ بالوراه دودرجه آزادی بر حسب سرعت (الف) ۹۶
شکل ۶- ۳ تابع چگالی احتمال جابه‌جای نوک تیر (الف) پاسخ اتفاقی نوک تیر بر حسب زمان (ب) ۹۶
شکل ۶- ۴ تابع چگالی طیفی در سرعت فلاتر برای بال گولند (الف) نمودار فلاتر مرجع [52] (ب) ۹۷
شکل ۶- ۵ پاسخ اتفاقی نوک بال در سرعت قبل از فلاتر و سرعت فلاتر (الف) نمودار فلاتر مرجع [52]..... ۹۷
شکل ۶- ۶ مقایسه نمودار واریانس بر حسب سرعت جریان در حالت فنر خطی و فنر غیرخطی نرم و سخت شونده ۹۸

فهرست جدول‌ها

جدول ۲- ۱ انواع توابع همبستگی و چگالی‌های طیفی[45] ۲۱

جدول ۳- ۱ مقادیر $\alpha_i L$ و β_i برای $i = ۱,...,۴$ در تیر یکسر آزاد ۴۶

جدول ۵- ۱ ماتریسهای آیرودینامیکی برای تئوریهای مختلف جریان در بالواره‌ی دودرجه آزادی... ۶۵
جدول ۵- ۲ مشخصات بالواره مورد مطالعه [50] ۶۷
جدول ۵- ۳ شرایط تکیه‌گاهی برای تیر اولربرنولی مورد مطالعه ۷۰
جدول ۵- ۴ مقادیر حل معادله مشخصه تیر یکسرگیردار ۷۱
جدول ۵- ۵ مشخصات تیر مورد مطالعه [51]..... ۷۳
جدول ۵- ۶ ماتریس‌های آیرودینامیکی بال سه‌بعدی در جریان ناپایا ۷۶
جدول ۵- ۷ مقادیر ماتریس چگالی طیفی نیروی تحریک برای بال سه‌بعدی ۷۷
جدول ۵- ۸ مقادیر ماتریس چگالی طیفی پاسخ بال سه‌بعدی ۷۷
جدول ۵- ۹ مشخصات بال گولند به عنوان بال سه‌بعدی مورد مطالعه [52]..... ۷۸
جدول ۵- ۱۰ مشخصات بالواره غیرخطی مورد مطالعه[50] ۸۱

پیوست ۱- ۱ خطی سازی آماری با فرض $E\{x\} = 0$ ۱۰۷
پیوست ۱- ۲ خطی سازی آماری با فرض $E\{x\} \neq 0$ ۱۰۷

فهرست علائم و اختصارات

مدول یانگ	E
مدول برشی	G
ممان دوم سطح	I
ممان دوم سطح	J
خودوابستگی	$\boldsymbol{K}$
فرکانس کاسته	K
نیروی برآ	L
ماتریس شکل مود	$\boldsymbol{P}$
انرژی جنبشی	T
سرعت جریان	U
انرژی کرنشی	V
ماتریس استهلاک معادل	C_e
تابع تئودرسن	$C(K)$
مقدار میانگین	$E\{\ \}$
تحریک خارجی	$F(t)$
پاسخ فرکانسی	$H(\omega)$
ممان جرمی بالواره	I_p
ماتریس سختی معادل	K_e
ماتریس جرم معادل	M_e
ممان آیرودینامیکی وارد بر یک چهارم وتر	$M_{¼}$
نیروی تعمیم یافته	$Q(t)$
خودهمبستگی	$R(\tau)$
چگالی طیفی	$S(\omega)$
مختصه جابه‌جایی	$X(t)$
مختصه جابه‌جایی	$Y(t)$
تابع شکل مود	$Y(x)$
مختصه جابه‌جایی	$Z(t)$
نصف طول وتر	b
ثابت مستهلک کننده	c
ضریب غیرخطی فنر	e
مختصه جابه‌جایی	h

سختی	k
طول تیر، طول بال	ℓ
جرم	m
شعاع ژیراسیون بی‌بعد	r
بردار شکل مود	$\boldsymbol{u}$
بردار یکه مختصات	$\hat{b}_{1,2}$
دیگروابستگی	$c(\tau)$
پاسخ به ضربه	$g(t)$
بردار یکه مختصات	$\hat{i}_{1,2}$
سختی فنر خطی	k_h
سختی فنر پیچشی	k_θ
تابع چگالی احتمال	$p(x)$
تحریک خارجی گسترده	$p(x,t)$
مختصه تعمیم یافته	q_i
اپراتور تغییرات	δ
خودهمبستگی	$\boldsymbol{\phi}$
مقدار میانگین متغیر x	μ_x
مختصه زاویه پیچشی	θ
چگالی تیر	ρ
چگالی جریان آزاد	ρ_∞
خودوابستگی	$\rho(\tau)$
انحراف معیار	σ
اختلاف زمانی	τ
فرکانس	ω
فرکانس طبیعی	ω_n
فرکانس استهلاک	ω_d
ضریب استهلاک	ζ

فصل اول:

مقدمه

۱-۱) پیشگفتار

در این فصل نگاهی اجمالی به مبانی اساسی این پایان نامه خواهیم داشت، سپس مروری بر کارهای گذشته را مورد بررسی قرار داده و در انتها اساس و اهداف انجام کار را بیان می‌کنیم. موضوعات مورد بررسی در این پایان‌نامه نیازمند آگاهی نسبت به ارتعاشات تصادفی، اثرات غیرخطی کننده‌ی سازه‌ای، ارتعاشات غیرخطی، آیروالاستیسیته و تلفیق آنها با یکدیگر می‌باشد، که به معرفی اجمالی هر یک از این مباحث خواهیم پرداخت.

۱-۲) ارتعاشات تصادفی

به طور کلی سیستم‌های دینامیکی تحت تحریک‌های معین یا تصادفی قرار می‌گیرند. پاسخ سیستم به بارهای معین را می‌توان به طور کاملاً مشخص بدست آورد، ولی در مورد ارتعاش تصادفی معمولاً داده-های آماری تحریک در دسترس است که با استفاده از آنها باید داده‌های آماری پاسخ سیستم را بدست آورد. موارد آماری مهم در کاربردهای مهندسی میانگین[۱] یا مقدار متوسط[۲]، و واریانس[۳] یا پراش[۴] می-باشد. این مفاهیم متعاقباً بطور جزئی توصیف می‌شوند.

۱-۳) آیروالاستیسیته

آیروالاستیسیته بر اساس بر هم کنش بین نیروهای آیرودینامیک، الاستیسیته و نیروهای دینامیکی بنا نهاده شده است. الاستیسیته تغییر شکل جسمی انعطاف پذیر را در مقابل نیروهای اعمال شده پیش بینی می‌کند. آیرودینامیک به بررسی نیروهای ایجاد شده در اثر عبور سیال از پیرامون هر جسم می-پردازد و در علم دینامیک نیروهای اینرسی جسم مورد توجه قرار می‌گیرد. با ترکیب این سه زمینه شاخه‌ای ایجاد خواهد شد که توانایی تحلیل سازه‌های الاستیک در حال حرکت در سیال را دارد.
مهم‌ترین کاربرد این شاخه در تحلیل و طراحی سازه‌های هوایی از جمله هواپیما، هلی‌کوپتر، موشک و شاتل فضایی است.

۱-۳-۱) انواع ناپایداری در آیروالاستیسیته

مسئله مهم در علم آیروالاستیسیته بررسی ناپایداری بال و سطوح کنترلی است. یکی از این ناپایداری-ها، ناپایداری استاتیکی و مربوط به پدیده دایورژنس[۵] و دیگری ناپایداری دینامیکی می‌باشد. مهم‌ترین ناپایداری دینامیکی فلاتر[۶] نام دارد. ناپایداری استاتیکی یا دایورژنس در اثر بر هم‌کنش بین نیروهای الاستیک و آیرودینامیکی به وجود می‌آید و هنگامی که سفتی سازه با افزایش سرعت نتواند سازه را به حالت ابتدایی باز گرداند روی می‌دهد. ناپایداری دینامیکی فلاتر بدین صورت است که با تغییر نیروی

[1] Mean
[2] Average Value
[3] Variance
[4] Scatter
[5] Divergence
[6] Flutter

آیرودینامیکی شکل سازه تغییر کرده و منجر به تغییر نیروی آیرودینامیکی می‌شود، با تکرار این عمل به صورت یک سیکل بسته[1] فرکانس یک مود ارتعاشی بال کاهش و دیگری افزایش می‌یابد، تا جاییکه میرایی مود خمشی یا پیچشی دیگر تحمل نیروی آیرودینامیکی خارجی را نداشته باشد. در واقع به علت جفت شدگی دو نوع حرکت خمشی و پیچشی این پدیده به وجود می‌آید

۱-۳-۲) فلاتر خطی و غیرخطی

در انجام تحلیل‌های آیروالاستیسیته یکی از مهم‌ترین فرضیاتی که به کار می‌رود، فرض خطی بودن سازه و آیرودینامیک است که در بررسی فلاتر از آن تحت نام فلاتر کلاسیک (خطی) یاد می‌کنند. از مهم‌ترین محدودیت‌هایی که فرض خطی بودن به وجود می‌آورد، ناتوانی در پیش بینی رفتار سیستم بعد از ناپایداری (سرعت فلاتر) است. با استفاده از تحلیل آیروالاستیک خطی می‌توان سرعت واگرایی و ناپایداری دینامیکی سازه و پاسخ خطی آیروالاستیک سازه را تا قبل از محدوده‌ی ناپایداری به دست آورد. تحلیل‌های خطی فقط شروع ناپایداری را پیش بینی می‌کرده و بیان می‌دارد که بعد از سرعت فلاتر دامنه‌ی ارتعاشی سیستم بی‌نهایت می‌شود. اما در عمل، عواملی که از بینهایت شدن دامنه‌ی نوسانات جلوگیری می‌کنند عوامل غیرخطی است.

در تحلیل آیروالاستیک غیرخطی یا فلاتر غیر کلاسیک (غیرخطی) علاوه بر موارد فوق می‌توان اطلاعات مهمی درباره‌ی نوع ناپایداری سازه و همچنین تاثیر عوامل غیرخطی بر پاسخ آیروالاستیک سازه را تا محدوده‌ی ناپایداری به دست آورد. به عبارت دیگر با استفاده از روش تحلیل غیرخطی می‌توان تعیین کرد که در کدام موارد سرعت فلاتر می‌تواند افزایش یابد، بدون آن که باعث ناپایداری یا تخریب سازه شود؛ و در کدام موارد، نوسانات نامیرا ممکن است در کمتر از سرعت فلاتر ایجاد شده و باعث تخریب سازه گردد.

در حالت کلی عوامل غیرخطی‌های اثر گذار در ارتعاشات بال هواپیما را می‌توان به دو دسته‌ی اثرات غیرخطی سازه‌ای و آیرودینامیکی طبقه بندی نمود. که در بخش بعد اثرات غیرخطی کننده‌ی سازه‌ای معرفی می‌شوند.

۱-۴) اثرات غیرخطی کننده‌ی سازه‌ای

اثرات غیرخطی سازه‌ای عمدتاً شامل مفاصل فرسوده سطح کنترل، لقی اتصالات کنترل، اصطکاک خشک در کابل‌های کنترل و یاتاقان‌ها، محدودیت‌های انرژی جنبشی سطوح کنترل، غیرخطی‌های هندسی، غیرخطی‌های مواد و تغییر شکل‌های الاستیک در اتصالات و ارتباطات و منابع متعدد دیگر می‌باشند. اثرات غیرخطی سازه‌ای را می‌توان به سه حالت کلاسیک، یعنی سختی(فنر) درجه سه[2] (در دو حالت نرم شونده و سخت شونده)، دو خطی[3]، و هیسترزیس[4] تقریب زد.

---

[1] Limit Cycle
[2] Cubic
[3] Bilinear
[4] Hysteresis

۱-۵) مروری بر کارهای گذشته

۱-۵-۱) تاریخچه‌ی روش‌های پاسخ دقیق برای سیستم‌های غیرخطی تصادفی

در مواردی محدود افرادی چون، دیمنتبرگ[۱] [1]، لین[۲] و همکارانش [2] برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه‌ی بالاتر از یک، حل معادله‌ی فوکر-پلانک[۳] کاسته را که فاقد عبارت مشتق زمانی است، بدست آورده‌اند. در حالت کلی استفاده از معادله فوکر پلانک را روش مارکوف[۴] می‌نامند. معادله فوکر-پلانک-کولموگروف یک معادله دیفرانسیل مشتقات جزیی می‌باشدکه بر فضای حالت تابع احتمال سیستم حاکم است.

یکی از اولین کسانی که یک حل دقیق و ایستای معادله‌ی فوکر-پلانک را برای سیستم‌های با یک فنر غیرخطی و میراکننده‌ای خطی تحت تحریک‌های تصادفی خارجی بدست آورد، کرامر[۵] [3] بود. در سال‌های بعد، یانگ[۶] و لین [2] و کای[۷] و لین [4] روشی را برای بررسی حل دقیق سیستم تحت تحریک‌های خارجی و پارامتریک ارائه نمودند.

۱-۵-۲) تاریخچه‌ی روش‌های پاسخ تقریبی برای سیستم‌های غیرخطی تصادفی

رابرتز[۸] [5] یک روش عددی ساده و کارآمد را برای تعیین تابع چگالی احتمال وابسته به زمان از حل کردن معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگروف[۹] ارائه نمود. البته، این روش فقط می‌تواند برای معادلات فوکر-پلانک-کولموگروف یک بعدی به کار رود، و قابل کاربرد در سیستم‌های چند درجه‌ی آزادی نمی‌باشد.

کوشی [6]و[7]، و اسپانُس[۱۰] [8]، از روش خطی‌سازی استفاده کرده‌اند، که در این روش سیستم اصلی با یک سیستم خطی معادل جایگزین می‌شود. پارامتر جایگزین در سیستم خطی با استفاده از کمینه کردن میانگین مجذور تفاضل بین پاسخ سیستم خطی و غیرخطی تعیین می‌گردد. اینگار[۱۱] [9] نیز روش خطی‌سازی مراتب بالاتر را برای یک سیستم با غیرخطی فنر درجه ۳ و تحریک خارجی نویز سفید ارائه نمود.

کراندال [10]، لین [11] و نایفه[۱۲] [12] سیستم‌های غیرخطی اتفاقی را با استفاده از روش اغتشاشات[۱۳] بررسی نموده‌اند. ایده‌ی اصلی در این روش بسط دادن حل معادلات غیرخطی بر حسب یک پارامتر کوچک می‌باشد، که مقدار تأثیر عبارت غیرخطی در معادلات را مشخص می‌کند.

---

[1] Dimentberg
[2] Lin
[3] Fokker-Planck
[4] Markov
[5] Kramer
[6] Yong
[7] Cai
[8] Roberts
[9] Kolmogrov
[10] Spanos
[11] Iyengar
[12] Nayfeh
[13] Perturbations

استراتونوویچ[1] [13] روش میانگین‌گیری اتفاقی[2] را برای سیستم‌های غیرخطی با میرایی ضعیف و تحریک اتفاقی باند پهن پیشنهاد داد. سپس، روش استراتونوویچ با دقت زیاد توسط کاسمینسکی[3] [14] و پاپانیکولا[4] و همکارانش [15] توجیه و تفسیر شد. ایده‌ی اساسی این روش استفاده از تقریب مارکوف برای پاسخ است، به طوری که تابع چگالی احتمال در آن توسط معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگروف توصیف می‌شود.

کای و لین [16] روش توازن اتلاف انرژی[5] را ارائه کردند. این روش نتایجی دقیق‌تر از روش‌های دیگر می‌دهد، حتی زمانیکه چند نوع تحریک بر روی سیستم عمل نماید. در این روش، سیستم غیرخطی اصلی با یک سیستم غیرخطی متعلق به دسته‌ی پتانسیل ایستای تعمیم یافته[6] جایگزین می‌گردد. در این جایگزینی میانگین انرژی مستهلک شده در سیستم جایگزین با سیستم اصلی برابر می‌باشد.

کای و الیشاکوف[7] [17]، روش دیگری به نام باقیمانده‌ی وزنی[8] را نیز پیشنهاد دادند، که در این روش هم سیستم غیرخطی اصلی توسط یک سیستم غیرخطی متعلق به دسته‌ی پتانسیل ایستای تعمیم یافته جایگزین می‌گردد. در این روش، یک مقدار باقیمانده برای اختلاف بین دو سیستم تعریف می‌گردد. با در نظر گرفتن باقیمانده به عنوان خطا در معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگروف، سیستم جایگزین به طور تقریبی با سیستم اصلی معادل می‌شود.

گو-کانگ اِر[9] [18] روش کلاسور نمایی[10] را پیشنهاد نمود. رانگ[11] و همکارانش [19] این روش را ساده‌سازی کردند. در این روش، فرض می‌شود که تابع چگالی احتمال سیستم غیرخطی اتفاقی، یک تابع نمایی با نمای چند جمله‌ای از متغیرهای حالت است. با جایگذاری این تابع در معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگروف و انجام عملیات جبری، ضرایب چند جمله‌ای یافت می‌شود و تقریبی از تابع چگالی احتمال بدست می‌آید.

رابینشتاین [20] به عنوان یکی از روش‌های بررسی از روش شبیه سازی مونت‌کارلو[12] استفاده نمود، در این روش از تولید داده‌های اتفاقی استفاده می‌شود و مبنای تئوریک این روش بر این اصل استوار است که یک معادله دیفرانسیل اتفاقی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای نامحدود از معادلات دیفرانسیل معین(غیراتفاقی) نوشت. در این صورت برای هر عضو این مجموعه، ورودی یک نمونه از داده‌های اتفاقی می‌باشد و برای آن، یک نمونه از داده‌های اتفاقی به عنوان خروجی بدست می‌آید و از آن به عنوان ورودی عضو بعدی این مجموعه استفاده می‌شود.

---

[1] Stratonovich
[2] Stochastic Averaging
[3] Khasminskii
[4] Papanicolau
[5] Energy Dissipation Balancing
[6] Generalized Stationary Potential
[7] Elishakoff
[8] Weighted Residual
[9] Gou-Kang Er
[10] Exponential Closure
[11] Rong
[12] Monte Carlo Simulation

در بررسی‌های اخیر عبدل ناصر[1] و سینگ[2]، در تحلیل یک تیر کامپوزیتی، بارگذاری اتفاقی را با متوسط صفر در نظر گرفتند (این فرض حل معادلات تیر را ساده تر می نماید) و متوسط مجذور پاسخ تیر را به ورودی اتفاقی ایستا مورد بررسی قرار داده اند[21].
داس[3] و دی[4]، رفتار یک تیر چند دهنه را که تحت توزیع فشار اتفاقی قرار دارد مورد بررسی قرار داده اند. در این تحقیق بار گذاری فشاری به صورت ورودی وایت نویز در نظر گرفته شده است. نتیجه این تحقیق بررسی احتمال شکست تیر می باشد[22].
زیبده[5]، یک تیر الاستیک که دارای تکیه گاه مفصلی در دو انتها می باشد و تحت بار عرضی متحرک و اتفاقی قرار دارد بررسی نموده است. در این مدل از تیر، اثر بار محوری مشخص (غیر اتفاقی) نیز در نظر گرفته شده است. ورودی اتفاقی در این تحقیق به صورت وایت نویز می باشد. نتیجه و خروجی تحقیق به صورت متوسط و واریانس تغییر شکل ها می باشد. اثرات دمپینگ بر روی خروجی ها نیز مورد بررسی قرار داده شده است[23].
لی‌جون[6] و جین ژیاندینگ[7]، پاسخ یک تیر خمشی-پیچشی را که تحت بارگذاری اتفاقی ایستا و ارگودیک قرار گرفته است مورد بررسی قرار داده اند. در این تحقیق فرض ایستا و ارگودیک بودن بارگذاری مسئله را ساده نموده است همچنین تابع توزیع احتمال به صورت تابع گوسی در نظر گرفته شده است. نتیجه این تحقیق، استخراج متوسط مجذور تغییر شکل جانبی، و متوسط مجذور دوران تیر می باشد. این تحقیق به منظور بررسی ارتباط بین رفتار خمشی و پیچشی تیر تحت شرایط اتفاقی ایستا و ارگودیک می باشد[24].

۱-۵-۳) تاریخچه‌ی بررسی اثرات غیرخطی در آیروالاستیسیته

اثر غیرخطی سازه‌ای ابتدا توسط ولستون[8] و همکارانش [25] در سال ۱۹۵۷ مورد مطالعه قرار گرفت. آنها اثر متمرکز غیرخطی سازه‌ای را به صورت تابعی درجه‌ی سه برای بالواره‌ی دو درجه آزادی مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که با افزایش سرعت، بعد از سرعت فلاتر خطی نوساناتی با دامنه و فرکانس ثابتی به وجود می‌آید. وی همچنین با اضافه کردن سطح کنترلی به سیستم فوق اثر انواع غیرخطی‌های دیگر همچون لقی[9] و هیسترزیس را علاوه بر غیرخطی درجه‌ی سه مورد تحقیق قرار داد و توانست نتایج خود را با نتایج حاصل از تونل باد تطبیق دهد؛ و همچنین متوجه شد که پایداری به شرایط اولیه بسیار وابسته است. شن[10] [26] مسئله‌ی فلاتر غیرخطی را دوباره بر اساس روش

[1] Abdelnaser
[2] Singh
[3] Das
[4] Dey
[5] Zibdeh
[6] Li Jun
[7] Jin Xianding
[8] Woolsten
[9] Freeplay
[10] Shen

بالانس هارمونیکی مورد بررسی قرار داد. در این روش مدل غیرخطی به مدل خطی معادلش بر اساس پارامتری از دامنه‌ی نوسان سیکل محدود تبدیل شد.

اهمیت اثرات غیرخطی در رفتار هواپیما به طور گسترده‌ای به وسیله‌ی بریباخ[۱] [27] که انواع رفتار غیرخطی سازه‌ای هواپیما را مرور کرد، مطرح شد. قسمتی از تحلیل او مربوط به تئوری و قسمت دیگر مربوط به مشاهدات و آزمایشات بود.

مکینتاش[۲] [28] رفتار بالواره[۳]ی دو درجه‌ی آزادی با سفتی سازه‌ای غیرخطی در هر دو درجه‌ی آزادی پیچش و خمش به صورت تحلیلی و تجربی بررسی نمود و آزمایش تونل باد برای یک بالواره‌ی نمونه دارای فنرهای غیرخطی درجه‌ی سه نرم و سخت شونده صورت داد و دامنه‌ی نوسانات را، هم به صورت نوسان سیکل محدود و هم نوسانی واگراشونده (فلاتر) مشاهده کرد.

لی[۴] و لی‌بلانک[۵] [29] پاسخ زمانی بالواره‌ی دو درجه آزادی را که شامل اثر غیرخطی سازه‌ای بود بر اساس جریان ناپایا طبق تئوری وگنر[۶] به دست آوردند. آنها نشان دادند که در حالت سفتی نرم شونده غالباً با پدیده‌ی دوشاخه‌ای شدن مماسی روبرو خواهیم شد و ناپایداری غالباً زیر سرعت بحرانی خطی روی می‌دهد و این مسئله بسیار مرتبط با شرایط اولیه است.

داول[۷] و ایلگاموف[۸] [30] مروری دیگر بر اثرات غیرخطی سازه‌ای و آیرودینامیکی داشتند و همچنین روشی کلی برای حل مسائل سیستم‌های غیرخطی ارائه کردند. یانگ[۹] و ژائو[۱۰] [31] بالواره‌ای دو درجه آزادی را در جریان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفتند. آنها در حالت دورانی اثر غیرخطی کننده‌های متفاوتی را به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کردند. نتایجی بر اساس شبیه‌سازی عددی در حوزه‌ی لاپلاس و همچنین استفاده از روش بالانس هارمونیکی بدست آوردند. نیروهای آیرودینامیکی غیرخطی را بر اساس تابع تئودورسن[۱۱] بنا نهادند. آنها با در نظر گرفتن پارامتر غیرخطی لقی زیر سرعت فلاتر خطی به نوسانات چرخه‌ی محدود رسیدند که نتایج تجربی نیز چنین مسئله‌ای را تایید کرد.

هانشتاین[۱۲] و همکارانش [32] بررسی‌های آزمایشگاهی و تحلیلی را برای تعداد مختلفی از اثرات غیرخطی کننده انجام دادند. آنها دریافتند که پاسخ سیستم به شدت به شرایط اولیه وابسته می‌باشد و می‌توان پاسخ سیستم را به اشکال میراشونده، ناپایدار، نوسانات سیکل محدود و در نهایت رفتار

---

[1] Brietbach
[2] McIntosh
[3] Airfoil
[4] Lee
[5] LeBlanc
[6] Wagner
[7] Dowell
[8] Ilgamov
[9] Yang
[10] Zhao
[11] Theodorsen
[12] Hauenstein et al