فصل اول

نانولوله های کربنی

۱-۱) تاریخچه مختصری ازکشف نانوتیوب ها:

علم وتکنولوژی درقرن جدید با سرعت زیادی رو به پیشرفت است.که دراین میان نانوتکنولوژی به عنوان یک علم نوپاوجدید مورد توجه بسیاری از محققین وپژوهشگران در سراسر دنیا واقع شده است. واین به دلیل سعی وتلاش دانشمندان جهت انجام تحقیقات روی مواد از مقیاس میکرو به مقیاس نانواست.ازجمله عناصری که درجدول تناوبی مورد توجه واقع شده است کربن می باشد. دراین میان نانولوله های کربنی به عنوان یک موضوع ویژه در فیزیک حالت جامد مطرح وبررسی می شوند. نانولوله های کربنی درسال 1991به طور اتفاقی توسط آقای ایجیما[۱] درهنگام مطالعه سطوح الکترودهای گرافیتی مورد استفاده در تخلیه قوس الکتریکی، کشف شدند.[26] نانوتیوب های کربنی به صورت لوله هایی کاملا" مستقیم با طولی درحدود چند میکرومتر وقطری درحد چندنانومتر می باشند.

نانوتیوب ها بدلیل خواص منحصر به فردی که بدلیل آرایش شش ضلعی های کربنی روی یک شبکه لانه زنبوری قرار دارندو بهHelicity معروف است اهمیت دارندوHelicity توسط تقارن وقطرلوله (که هردو تعیین کننده اندازه واحدساختاری تکرار شونده هستند) تعریف می شود.نوع هندسه یا توپولوژی این نانولوله ها باعث می شود آنها ازخواص الکتریکی(رسانایی ،نیمه رسانایی و...) ،مکانیکی(استحکام،پایداری،سختی ،تغییر شکل پذیری الاستیک و...) استثنایی برخوردار شوند [16].تا کنون دوشکل مختلف ازاین نانولوله های کربنی شناخته شده است .یک نوع آن نانو لوله های کربنی تک جداره [۲] ونوع دیگری نانولوله های چند جداره[۳] می باشد که از لحاظ ساختار با هم تفاوت دارند. این نانولوله ها به ترتیب درسالهای 1991و 1993 کشف شدند.از زمان کشف این مواد کاربرد های مختلفی برای آنها پیشنهاد شده است.که می توان به استفاده ازنانولوله های چند جداره به عنوان نانوپروب برای اتصال به نوک،AFM حامل کارآمد در کاتالیز هتروژن ودر مورد نانولوله های تک دیواره می توان به استفاده ازاین نانولوله ها درقطعات ووسایل الکترونیکی یا به عنوان محیط مناسب برای ذخیره هیدروژن اشاره نمود.و اخیرا" ازاین مواد در ساخت حافظه های RAM استفاده می شود.که با استفاده از فناوری ملکولی موفق به ساخت تراشه هایی به جای تراشه های حافظه ای امروز شده اند. ودانشمندان به دنبال ساخت حافظه هایی ازاین نوع می باشند.

---

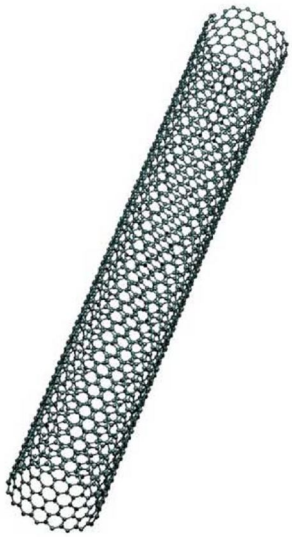
۱ - S.Ijima

۲ - Signal-wall carbon nanotubes

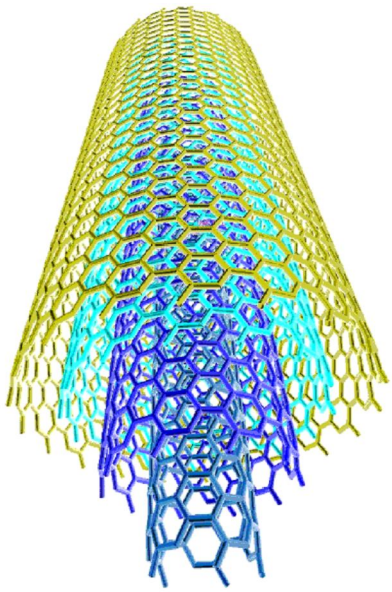
۳ - Multi - wall carbon nanotubes

۱-۲) ساختار نانوتیوب ها

نانولوله های تک جداره از یک صفحه گرافنی به صورت استوانه های باقطر درحدود 1تا 2 نانومترساخته می شوند. نانولوله های چند جداره دارای دیواره ضخیم تر هستند که از چندین استوانه هم محور گرافنی تشکیل شده اندو استوانه ها با فاصله حدود 34 نانومتر (فاصله بین صفحات گرافن) ازهم جدا شده اند، قطر خارجی نانولوله های کربنی در حدود 2 تا 25 نانومتر است وقطرداخلی آنها درحدود 1تا 8 نانومتر می باشد. میان لایه های منفرد گرافیت هیچ گونه نظم خاصی وجود نداردوطول متوسط نانولوله ها می تواند درحدودچند میکرون باشد. هریک از نانوتیوب های تک جداره دارای قطر یکسانی هستندهرچند وقتی تشکیل می شوند تمایل زیادی به جمع شدن به صورت دسته های بزرگ را دارند. در شکل(۱-۱) تصویر یک نانوتیوب تک جداره وچند جداره نمایش داده شده است.



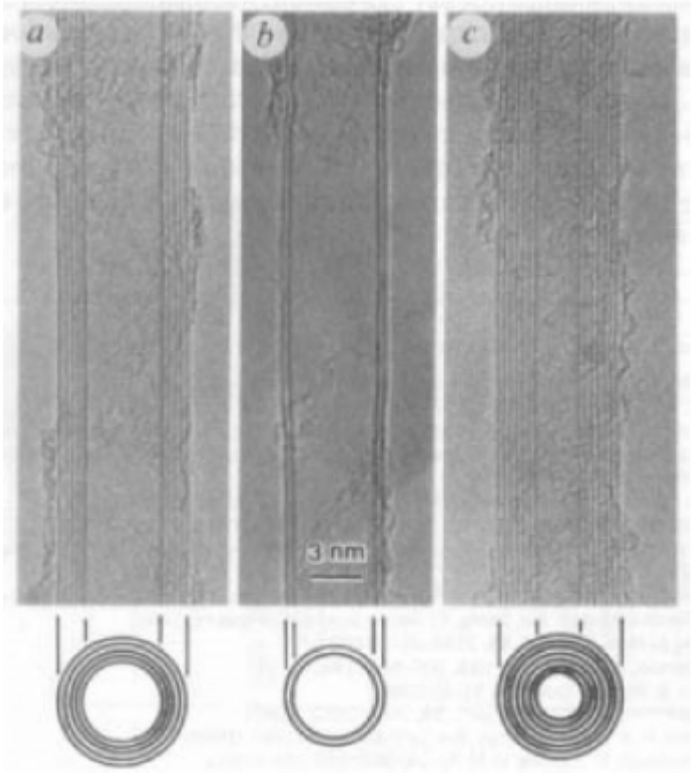
(a)



(b)

شکل۱- ۱) (a) یک نانولوله کربنی تک جداره را نشان می دهد .این نانولوله ها به دلیل اینکه قطرآنها نسبت به طولشان خیلی کمتر است عملا" یک بعدی هستند. (b) یک نانولوله کربنی چند جداره رانشان می دهد. که ازچندین صفحه گرافنی استوانه ای شکل مستقل از هم تشکیل شده است .

همچنین درشکل (۱-۲) سه میکروگراف الکترونی از نانوتیوب چند جداره نشان داده شده است که توسط آقای ایجیما در سال 1991 تهیه وگزارش گردید[1]. همانطور که از شکل پیداست در تصویری که با برچسب **(a)** مشخص شده است تعداد 5 استوانه با قطر خارجی در حدود 67 آنگستروم را نشان می دهد. ودر تصویربا برچسب **(b)** دواستوانه با قطر خارجی 55 آنگستروم را نشان می دهد. همچنین در تصویر بابرچسب **(c)** تعداد 7 استوانه با قطر داخلی 23 آنگستروم وقطر خارجی 67 آنگستروم مشخص است[9].



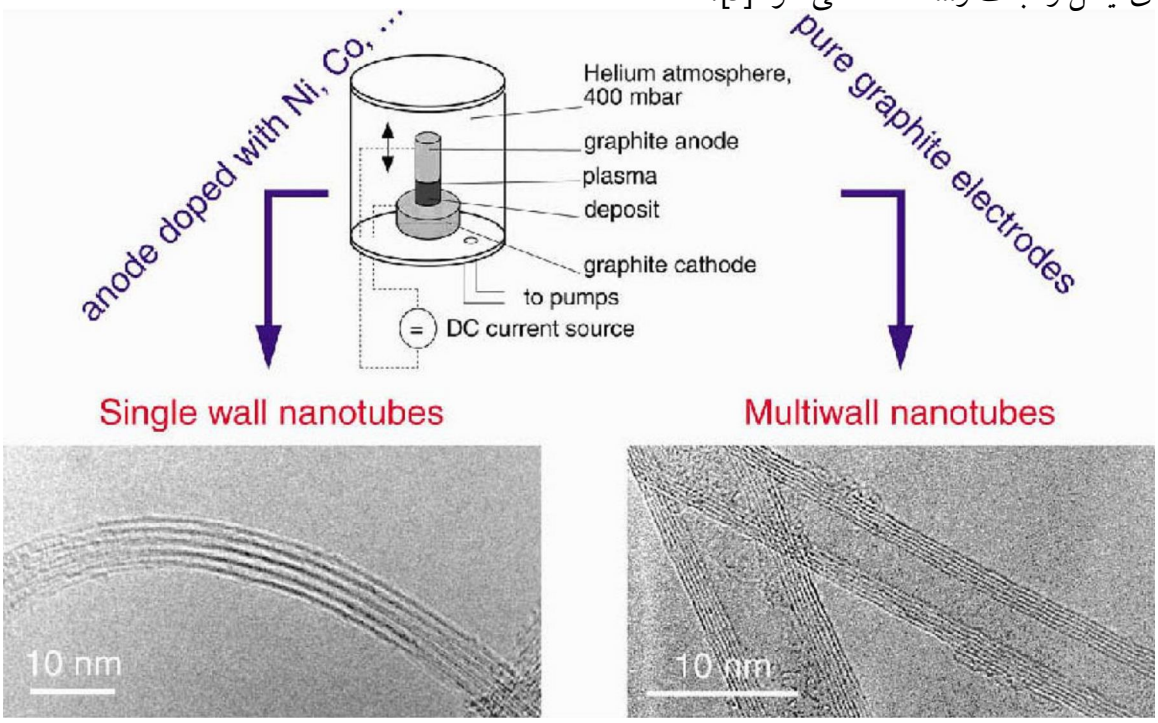
شکل ۱-۲) سه میکروگراف الکترونی از نانوتیوب های چند جداره که با برچسب های (a)،(b)و(c) نشان داده شده اند[9].

۱-۳)روش های تولید نانوتیوب های کربنی

برای تولید نانولوله های کربنی روش های مختلفی وجود دارد. همانطورکه قبلا" گفته شداین مواد اولین بار در نوک الکترود های گرافیتی در هنگام تخلیه قوس الکتریکی که برای سنتز فولرن استفاده شده بود مشاهده شدند. با تنظیم شرایط قوسیDC مقادیرگرمی ازنانوتیوب نوع چند دیواره تهیه گردیدو درادامه به دو روش تولید نانوتیوب ها اشاره می کنیم.

۱-۳-۱) روش تخلیه قوس الکتریکی[1]

در این روش مطابق شکل زیرنانولوله ها به صورت لایه هایی بر روی سطح کاتد حاصل از آند تبخیر شده در خلال قوس میان الکترودهای گرافیتی به دست می آید. این لایه ها ازیک پوسته سخت از گرافیت پیرولیتیک ویک قسمت داخلی از پودر سیاه ونرم حاوی نانولوله کربنی وذرات نانو گرافیت بسته تشکیل شده اند.مطابق شکل(۱-۳) با ایجاد یک ولتاژ *DC* بین 20 تا 25 ولت بین الکترود ها یک جریان *DC* به شدت 50 تا 120 آمپر از میان الکترودها عبور می کند. که در اثر عبور این جریان بخارت کربن ایجاد می شود که این بخارات به صورت پلاسما ی سیاه رنگ روی الکترود منفی(کاتد) جمع می شود.که این موادته نشین شده شده همان نانوتیوب ها هستند. که برای تولید نانوتیوب های چند جداره ازالکترود های گرافیتی خالص استفاده می شود. همچنین برای تولید نانوتیوب های تک جداره از گرافیت آند که دارای ناخالصی های نیکل وکبالت و... استفاده می شود [3].

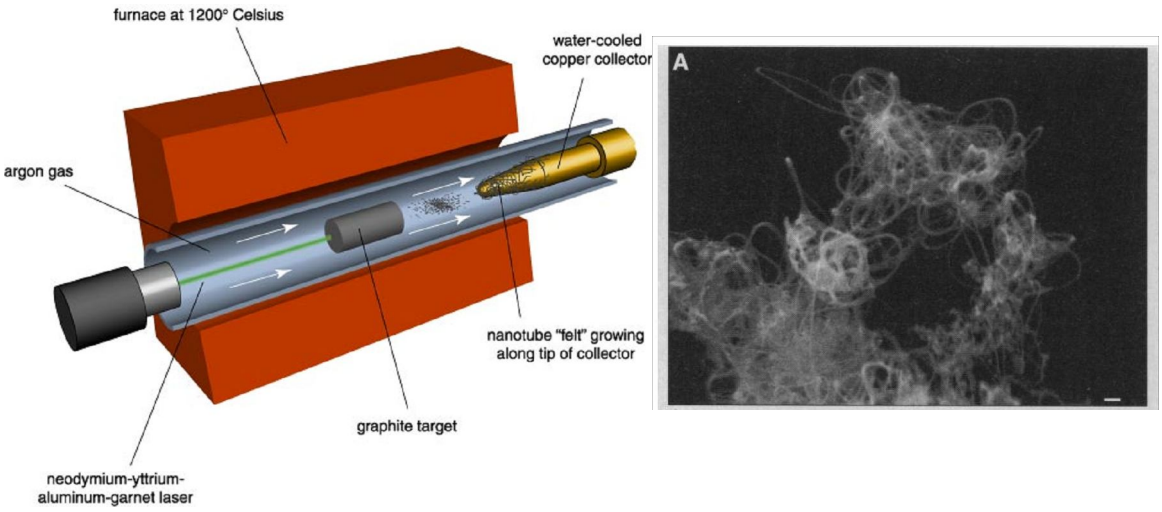


شکل ۱-۳) روش تخلیه قوس الکتریکی جهت تولید نانو لوله های SWCN و MWCN [21].

1- Arc Discharg

۱-۳-۲) روش تبخیر لیزری[1]

این روش که در سال 1996 انجام شد، اولین سنتز کارآمدی بود که بیش از 70%درصداز تولیدآن شامل نانولوله کربنی تک جداره بود.در این روش همانطور که در شکل(۱-۴) نشان داده شده است ابتدایک هدف که از 1.2% نیکل وکبالت و 98.8%کربن تشکیل شده است را تا دمای 1200درجه سانتیگراد در کوره گرما داده می شود. سپس پالس های لیزر که به این هدف تابیده می شوند قسمتی از آن را تبخیر می کند.این بخارات که به شکل دوده سیاه رنگ است از داخل کوره که گاز آرگون در آن جریان دارد عبور می کندواین بخارات در خارج از کوره پس از خنک شدن با آب روی کلکتور مسی ته نشین می شوند. واین بخارات ته نشین شده همان نانوتیوب های تولید شده می باشد[23].



(a) **(b)**

شکل۱-٤) (a) طرح کلی روش تبخیر لیزری دراین روش لیزرازمیان گاز آرگون به هدف گرافیتی می تابد. وبخارات حاصل شامل نانونیوب ها به آرامی با گاز آرگون حرکت و روی یک کلکتور مسی جمع می شوند. (b) نمونه ای است ازاینکه بخارات دوده ای شکل به چه صورت روی کلکتور مسی جمع می شوند[23].

1- Chemical Vapour Deposition

۱-٤) خواص نانوتیوب های کربنی

۱-٤-۱)خواص مکانیکی[1]

نانولوله های کربنی از سخت ترین مواد به شمار می آیند. وبهترین الیاف هایی هستند که از ساختار گرافیت ساخته شده اند.مطالعات نظری نشان می دهد که مدول یانگ این مواد در محدوده 11تا 5 ترا پاسکال (TP)برای نانو لوله های کربنی تک جداره به دست آمده است.استحکام واقعی نانولوله های کربنی چند جداره تحت تاثیر لغزش استوانه های گرافن بر روی هم، قرار می گیرد [16].

مدول یانگ بالای نانوتیوب ها نشان می دهد که نانولوله ها دارای گشتاور خمشی بالایی هستند.واین خمش به عوامل مختلفی ازجمله قطر نانولوله میانی وضخامت دیواره وطول نانولوله بستگی دارد.

نانو لوله هایی که شدیدا" تغییر شکل می دهند.به طور برگشت پذیر به حالت های متفاوتی همراه با آزاد کردن انرژی بر می گردند. الگوی برگشت در تمام اشکال تغییر شکل یافته جالب توجه است. به عنوان مثال در حالت پیچش، نانولوله ها ابتدا تخت می شوند، سپس به صورت یک حلقه درمی آیند. نانولوله ها در حالت کشش می توانند کرنشهای بالایی درحدود 40درصد را تحمل کنند، بدون اینکه رفتار تغییر شکل یا گسسته شدن پیوند ها را از خود نشان دهند. واین انعطاف پذیری صفحه ای ورقه های گرافن به قابلیت دوباره هیبریداسیون شدن اتم های کربن نسبت داده می شود[22].

۱-٤-۲)خواص الکتریکی[2] نانوتیوب ها

خواص الکتریکی نانولوله های کربنی از جالب ترین خواصی است که مورد توجه واقع شده است. محاسبات اولیه نشان می دهد که نانولوله ها باتوجه به *Helicity* وقطرشان می توانند رسانا یا نیمه رسانا باشندمعمولا"دوسر نانولوله ها کربنی خاصیت فلزی از خود نشان می دهد. که این اندازه گیری الکتریکی با استفاده از رفتار کوانتیزه رسانش، به صورت نظری قابل پیش بینی می باشد[22].

۱-٤-۳)خواص دیگر

از نانولوله های کربنی می توان جهت ساخت نانو کامپوزیت ها استفاده کرد. با ایجاد تک لایه هایی از اکسیدی خاص برروی نانولوله وسپس حذف نانولوله از طریق اکسایش، امکان ساخت لوله های سرامیکی یا کاربردهای کاتالیستی فراهم می شود. هنگامی که گازهای فرار مثل ترکیبات هالوژنه یا siox با نانولوله واکنش می دهند به نانولوله های کاربیدی با همان ابعاد تبدیل می شوند[16].

1- Mechanical properties
2 -Electrical properties

۱-۵) کاربردهای نانولوله های کربنی

اکثر کاربردهای نانولوله های کربنی براساس خواص الکترونیکی، گرمایی واستحکام مکانیکی، انعطاف پذیری وابعاد نانوتیوب پیشنهاد می شود. کاربردهای الکترونیکی بر پایه نانولوله های تک جداره است. در حالی که برای کاربرد های دیگر تفاوتی میان نانولوله های تک جداره وچند جداره وجود ندارد. واز همه این خواص متناسب با پیشرفت درحوزه تحقیق،و به عنوان کاربرددر حوزه صنعت نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. همچنین از کامپوزیت هایی شامل نانوتیوب ها کربنی درکاربردهای فضایی و ساخت موشک های فضای استفاده می شود.

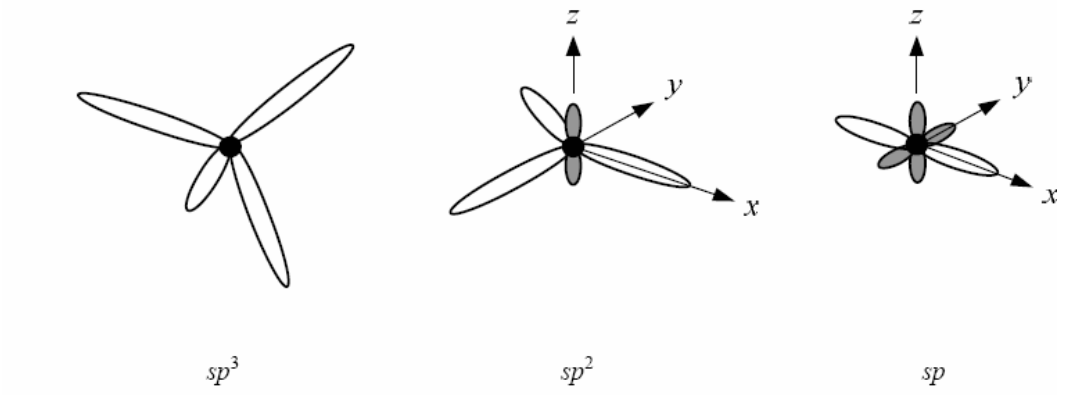
حال می خواهیم بدانیم به چه دلیل از نانوتیوب ها در کاربردهای فضایی استفاده می شود:

۱- نانوتیوب ها دارای خواص رسانایی الکتریکی شبیه مس هستند. ۲- همچنین دارای رسانایی گرمایی برابر وحتی بیشتر از Diamond هستند.۳ - دارای چگالی پایین واندازه آنها کوچک می باشد. وچگالی آنها تقریبا" $1.4 {gr}/{cm^3}$ واز نظر تراکم شامل $1\times10^{14} {SWNT}/{cm^2}$ می باشد ۴- جزو سخت ترین مواد شناخته شده طبیعی وساختگی می باشد و استحکام آن 100برابر از فولاد بیشتر است[5].

۱-٦) ساختار هندسی گرافن[1]

گرافیت یکی از شکل های طبیعی کربن است. یک گرافیت سه بعدی، شامل لایه های دوبعدی شبکه هگزاگونال از اتم های کربن است. که به این لایه دوبعدی گرافن گفته می شود. فاصله جدایی بین لایه های گرافنی درگرافیت 3.53 آنگسترم است. اتم های کربن در گرافن دریک ساختار هگزاگونال کندویی شکل قرار گرفته اند که فاصله بین دواتم کربن برابر 1.42آنگسترم است.

اتم کرین دارای 6 الکترون و آرایش الکترونی آن به صورت $1s^2,2s^2,2p^2$ می باشدکه درآن s,pاربیتالهای اتمی مختلف هستند. وبالا نویس آنها تعداد الکترون ها در هر اربیتال را مشخص می کند. اربیتالهای $2s,2p$ در پیوند های شیمیایی ممکن است باهم ترکیب شوند یابه اصطلاح علمی هیبرید شوند. براساس نوع ترکیب این اربیتالها سه نوع هیبریداسیون وجود دارد. که این هیبریداسیون ها به صورت sp,sp^2,sp^3 می باشندوزاویه بین پیوندهای آنها به ترتیب از چپ به راست $180^\circ,120^\circ,109^\circ$ می باشد که نمای پیوند های این هیبریداسیون ها در شکل (۱-۵) نشان داده شده است [18].

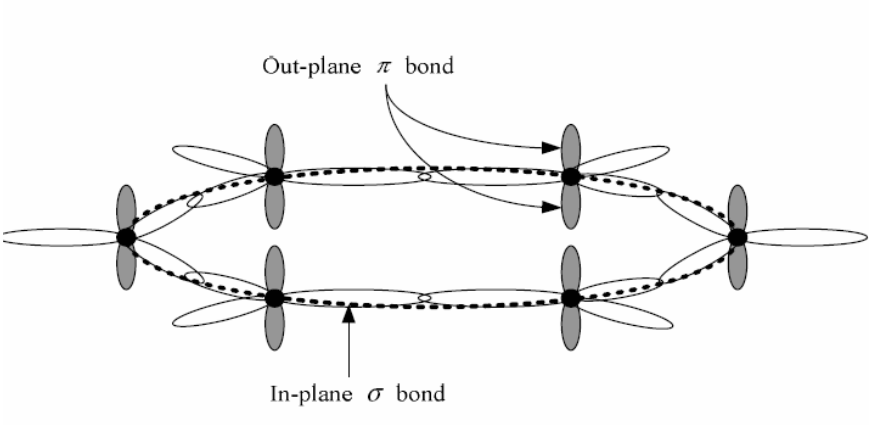


شکل۱-۵) هیبریداسیون های sp,sp^2,sp^3مربوط به اربیتالهای $2s$با $2p_x,2p_y,2p_z$ را نشان می دهد.

نوع هیبریداسیون sp^3 در مواد طبیعی کربن مانند Diamond وجود دارد. در صورتی که گرافیت ومواد وابسته به گرافیت دارای هیبربداسیون sp^2 می باشندازجمله نانوتیوب های کربنی که پیوند های کربن در آن دارای این هیبریداسیون می باشند. ودوالکترون اربیتالهای $2p_x,2p_y$می باشد. این سه پیوند کوولانسی و از نوع سیگما می باشند. که هر کدام ازپیوندها بایکدیگر زاویه 120°درجه می سازد. و پیوند کوولا نسی نوع سیگما یک پیوند قوی می باشد. به همین دلیل است که صفحات گرافنی ونانوتیوب های کربنی دارای استحکام بالایی می باشند.

1- Graphen

یک اربیتال $2p_z$ باقی می ماند که شامل یک پیوند ضعیف کوولانسی و ازنوع پی می باشد. و این نوع پیوند بین هر دولایه گرافنی در گرافیت قرار داردو یک پیوند بین صفحه ای می باشد.وامروزه به دلیل همین پیوند ضعیف بین صفحه ای درگرافیت است که موفق شده اند این لایه هارا ازگرافیت جداکنند.که این لایه ها همان صفحات گرافن می باشند. ساختار پیوندهای اتم های کربن درشبکه هگزاگونال که شامل پیوند های سیگما وپی می باشددر شکل(۱-۶) نشان داده شده است:



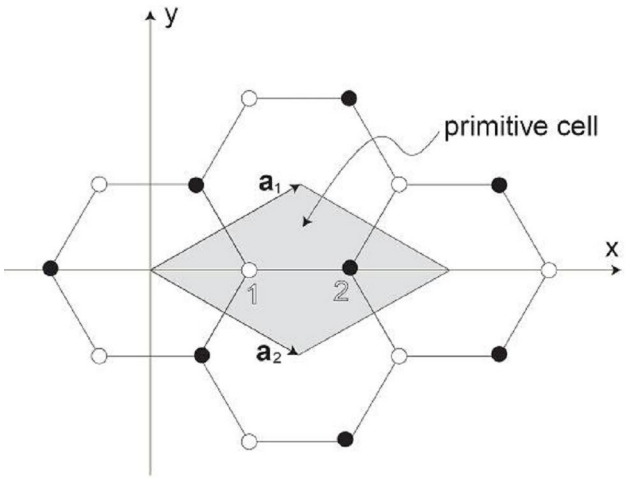
شکل۱-٦) ساختار پیوند های کربن هگزاگونال در گرافیت را نشان می دهد که پیوندهای سیگما وپی درآن مشخص شده است.

۱-۷) شبکه بلوری گرافن

یاخته بسیط در صفحه گرافنی که در شکل(۱-۷) نشان داده شده است در شبکه معمولی با بردارهای شبکه a_1, a_2 نشان داده می شود و هر یاخته یا سلول شامل یک نقطه شبکه می باشد .وهر سلول شامل دواتم کربن می باشدو در شکل با شماره های 1 و 2 نشان داده شده است. درضمن شبکه گرافن شامل دو زیر شبکه می باشد که اتم های هرکدام از این زیر شبکه ها با رنگ های سفید وسیاه نشان داده شده است. و هر یاخته بسیط شامل یک اتم از هرکدام از زیر شبکه ها می باشد..ودر هر زیر شبکه با استفاده از انتقال بردار های شبکه می توان به هر اتم در آن زیر شبکه دسترسی پیدا نمود.بردارهای شبکه a_1, a_2 را می توان باتوجه به شکل(۱-۶)به صورت زیر به دست آورد:

$$a_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}), a_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2})$$
$$a = |a_1| = |a_2| = 1.42 \times \sqrt{3} = 2.46 A^{\circ} \qquad (۱-۱)$$

ودر اینجا a ثابت شبکه[1] می باشد.



شکل۱-۷) یاخته بسیط صفحه گرافن در شبکه معمولی را نشان می دهد و a_1, a_2 بردارهای شبکه می باشند .[11]

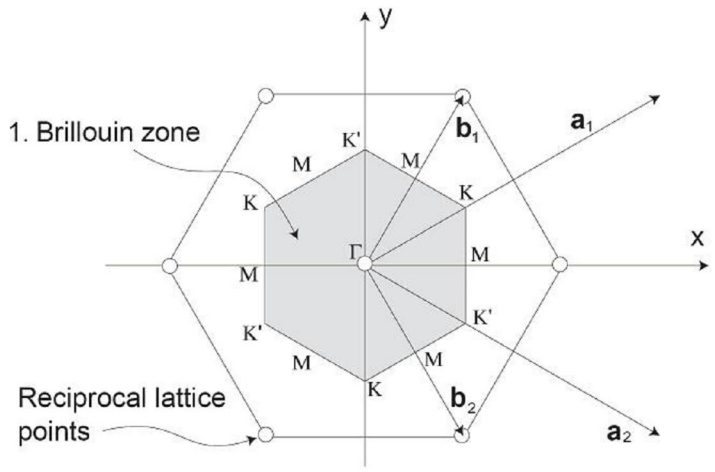
به همین روش می توان بردارهای شبکه وارون که به صورت b_1 و b_2 و b_3 نشان داده می شوند را از روابط زیر به دست آورد.

$$b_1 = \frac{2\pi(a_2 \times a_3)}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \qquad b_2 = \frac{2\pi(a_3 \times a_1)}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \qquad b_3 = \frac{2\pi(a_1 \times a_2)}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)} \qquad (۱-۲)$$

1-Lattice constant

$$b_1 = (\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, \frac{2\pi}{a}), b_2 = (\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, -\frac{2\pi}{a}) \qquad (۳-۱)$$

همانطور که می دانیم ناحیه اول بریلیون[1] همان یاخته بسیط ویگنر سایتس است. برای به دست آوردن این یاخته یک نقطه از شبکه را به عنوان مبداء انتخاب می کنیم واز آن نقطه به نزدیکترین نقاط همسایه رسم می کنیم وعمود منصف های خطوط واصل را رسم می کنیم به فضایی که از تقاطع عمود منصف ها محصور می شود یاخته ویگنر سایتس می گویند. یا به عبارت دیگر یاخته ویگنر سایتس مکان هندسی نقاطی از فضای شبکه است که نزدیکترین فاصله را با مبداء دارند. هر یاخته بسیط مربوط به یک نقطه از شبکه است. در شکل (۱-۸) ناحیه اول بریلیون ونقاط مربوط به شبکه وارون مشخص شده است.



شکل۱-۸) بردارهای شبکه معمولی ،شبکه وارون وناحیه اول بریلیون در یک هگزاگونال نشان داده شده است.که ناحیه رنگ شده ناحیه اول بریلیون وبردار های a_1, a_2 بردارهای شبکه معمولی وبردارهای b_1, b_2 بردارهای شبکه وارون هستند[11].

1- Brillioun zone

۱–۸) بدست آوردن نانولوله های کربنی از صفحه دوبعدی گرافیت

یک شبکه از ورقه گرافن با بردارهای شبکه a_1, a_2 در شکل(۱–۹) نشان داده شده است. که با استفاده از این بردارهای شبکه می توان برداری به نام کایرالیتی برای نانولوله ها تعریف کرد. واین بردار کایرال به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_h = ma_1 + na_2 \qquad (۱–۴)$$

دراینجا m, n اعداد صحیح می باشند.

با توجه به رابطه (۱–۴) اندازه این بردار کایرال از رابطه زیر به دست می آید:

$$| C_h | = \sqrt{C_h \bullet C_h} = a\sqrt{n^2 + m^2 + nm} = L \qquad (۱–۵)$$

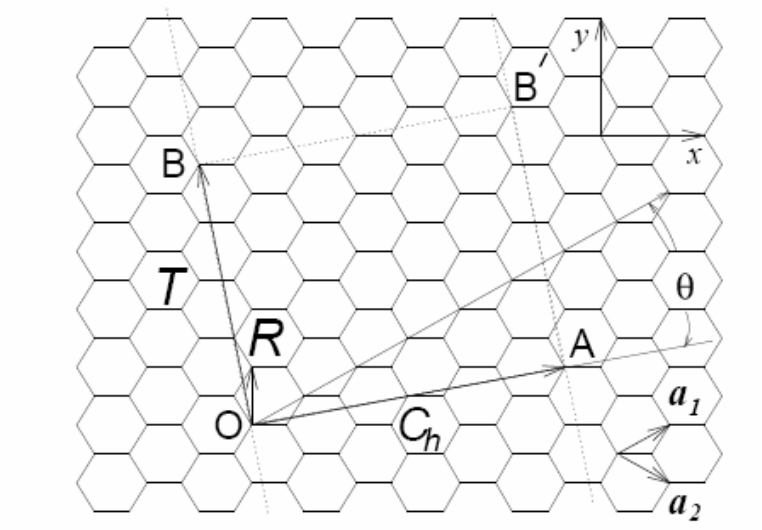
قطر نانوتیوب از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$D = L/\Pi \qquad (۱–۶)$$

همچنین T بردارانتقال شبکه می باشد. که بر بردار کایرالیتی عمود است یعنی:

$$C_h \bullet T = 0 \qquad (۱–۷)$$

اکنون می توان با متصل نمودن نقاط O,A,B,B به یکدیگر ،یک نانوتیوب بسازیم.که OA بردار c_h یا کایرالیتی وOB بردار شبکه T را نشان می دهد. ومستطیل OAB'B یک یاخته برای ساختارنانوتیوب می باشد. ودر شکل (۱–۹) بردار کایرال نانوتیوب به صورت $C_h = (2,4)$ تعریف می شود.



شکل۱–۹) صفحه دوبعدی شبکه گرافن است که برادرهای کایرالیتی وشبکه روی آن نشان داده شده است[11].

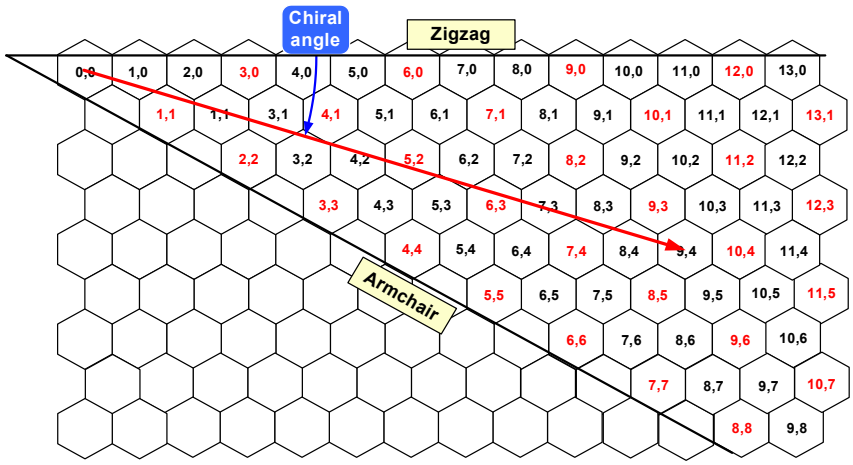
۱-۹) ساختار نانوتیوبها از یک صفحه گرافن

نانو تیوب هاباتوجه به زاویه ای که بردارکایرالیتی با بردار شبکه a_1 می سازدارای ساختار های زیگزاگ ، آرمچیر وکایرال می باشند. در شکل(۱-۱۰) این ساختارهای مختلف نانولوله های کربنی را به صورت زیربیان می کنیم:

۱-۹-۱) ساختارزیگزاگ[1]: دراین ساختار بردار کایرال با افق زاویه صفر درجه می سازد. که این بردار به صورت $C_h = (m,0)$ تعریف می شود.

۱-۹-۲) ساختارآرمچیر[2]: دراین ساختار بردار کایرال با افق زاویه 30°درجه می سازد. که این بردار به صورت $C_h = (m,m)$ تعریف می شود..

۱-۹-۳) ساختارکایرال[3]: در این ساختار بردار کایرال به صورت کلی $C_h = (m,n)$ تعریف می شود.



شکل۱-۱۰) بردار های کایرالیتی برای ساختارهای مختلف نانوتیوب شامل زیگزاگ،آرمچیر وکـایرال را نـشان مـی دهد.

1- Zigzag
2 - Armchair
3 - Chairl

فصل دوم

سالیتون ها

۲-۱) مقدمه

برای مدت طولانی از معادلات خطی برای توصیف پدیده های فیزیکی استفاده می شد.به عنوان مثال معادلات نیوتن،ماکسول وشرودینگر از نوع معادلات خطی هستند،واین معادلات دارای پاسخ های خطی می باشند.

به هر حال باید بدانیم که بیشتر سیستم های واقعی که موردبررسی قرار می گیرند غیر خطی هستند.چون اکثر مدل های نظری بر توصیف های خطی تکیه دارند.لذا تصحیح رفتار های غیر خطی با یک اختلال کوچک ممکن می شود. بعضی مواقع در نظر گرفتن تقریب های خطی بعضی رفتار های اصلی سیستم را کاملا" از بین می برد.اگرچه به طور بسیار گسترده به مطالعه معادله های دیفرانسیل خطی پرداخته شده است، اما در مورد معادله های دیفرانسیل غیر خطی[۱] اطلاعات اندکی وجود دارد . این شاخه از ریاضیات می تواند پدیده های بسیار مختلفی را توضیح دهد . اما چرا باید به معادلات دیفرانسیل غیر خطی توجه کرد؟ دلیل اساسی آن است که بسیاری از دستگاههای فیزیکی، و معادلاتی که این دستگاهها را توصیف می کنند، در اصل غیر خطی اند .خطی کردن های عادی ابزارهایی تقریب زننده هستندکه تا حدودی حاکی از ناتوانی در مواجه شدن با مسائل غیرخطی اصلی هستند و تا اندازه ای این دید علمی را که نیمی از قرص نان بهتر از هیچ است،را بیان می کنند .بلافاصله باید اضافه کنیم که موارد فیزیکی بسیاری وجود دارند که در آنها تقریب خطی، برای اکثر مقاصد، ارزشمند و مناسب است . با این حال، این واقعیت همچنان پابرجاست، که در بسیاری از موارد دیگر، خطی کردن قابل توجیه نیست. حتی اینشتین پیشنهاد کرده بود که چون معادلا ت اساسی فیزیک غیر خطی اند، تمامی فیزیک ریاضی باید تجدید نظر شود. اگر مطلب عنوان شده توسط اینشتین در آن زمان روشن می بود، ریاضیات آینده یقیناً با ریاضیات گذشته و حال خیلی تفاوت می داشت.معادلات دیفرانسیل غیر خطی زیادی در فیزیک وجود دارند از جمله می توان به معادله شرودینگر غیر خطی در بررسی انتشار امواج نوری در فیبر های نوری،معادله سینوسی گوردن[۲] ومعادله kdv[۳] اشاره نمود.

---

۱ -Nonlinear differential equation

۲ -Sine gordon

۳ - Korteweg-De Vries Equation

۲-۲) معادلات خطی وغیر خطی

یک طبقه بندی اساسی در معادلات دیفرانسیل معمولی بر طبق خطی یا غیر خطی[1] بودن آنها انجام می گیرد. به این صورت که حالت کلی معادله دیفرانسیل $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ را خطی گوییم هرگاه F تابعی خطی از متغیر های $y, y', ..., y^{(n)}$ باشد. بدین ترتیب شکل کلی معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه n چنین است:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(x) \qquad (۱-۲)$$

لذا هرمعادله ای که به صورت (۲-۱) نباشد یک معادله غیر خطی است.

به عنوان مثال معادله (۲-۲) بدلیل جمله yy' یک معادله غیر خطی است:

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4 \qquad (۲-۲)$$

به عنوان یک مثال ساده در فیزیک معادله حرکت یک آونگ ساده که به صورت زیردر می آید یک معادله غیر خطی است:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (۳-۲)$$

زیرا اگر θ دامنه نوسان کوچک نباشددر نتیجه بسط $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$ رادر معادله (۲-۳) جایگذاری کنیم وبه یک معادله غیر خطی به صورت زیر می رسیم:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}(\theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!}) = 0 \qquad (۴-۲)$$

در اینصورت پریود وفرکانس به دامنه θ وابسته می شوندو این همان اثرات پاشندگی است که در معادلات غیر خطی ظاهر می شود.

درنتیجه تشخیص معادلات خطی از غیر خطی با توجه به فرم اصلی معادله خطی(۲-۱) کاملا"مشخص است.

همانطور که گفتیم برای درک موج غیرخطی ابتدا باید موج خطی را درک کنیم. برای این کار یک موج خطی را در نظر می گیریم. یک موج ممکن است به صورت پیشروی یک حالت حرکت ازمیان یک جسم تعریف شود.

یک موج خطی دارای خصوصیات زیر است:

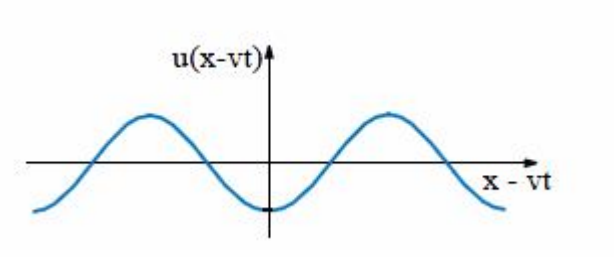
۱- سرعت وشکل موج خطی به دامنه موج وابسته نیست.

۲- برآیند دوموج خطی یک موج خطی دیگر است.

۳- امواج با دامنه کوچک خطی هستند.

شکل (۲-۱) یک موج پریودیک خطی را نشان می دهد.

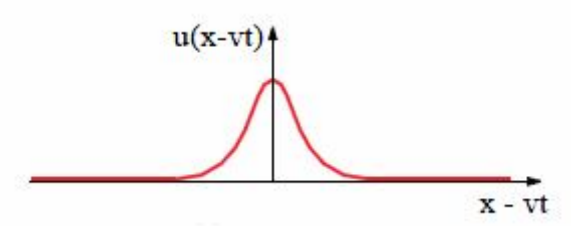
1- Nonlinear



شکل ۲-۱) یک موج پریودیک خطی را نشان می دهد[32].

امواج با دامنه بزرگ ممکن است غیر خطی باشند.غیر خطی بودن نتیجه یک اعوجاج واغتشاش در شکل یک موج با دامنه بلند است. حرکت گردابی به عنوان یک نمونه ازحرکت غیر خطی است. و این اعوجاج در شکل موج بدلیل وجود پاشندگی موج است.

بیش از صد سال پیش امواج منفرد از حل معادلات ریاضی به دست آمددانشمندان متوجه شدند که موج منفرد بدلیل یک تعادل بین اثر غیرخطی وپاشندگی بوجودمی آید. این موج منفرد در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲) یک موج منفرد را نشان می دهد[32].

غیرخطی بودن باعث تیز شدن پشته موج می شود درحالیکه پاشندگی باعث پهن شدن می شود. وموج منفرد ازمیان این دونیروی ویرانگر پدید می آید. بنابراین تعادل بین غیر خطی بودن وپاشندگی عامل بوجود آمدن موج منفرد است. درنتیجه موج منفرد به شدت قوی می باشد. امواج منفرد یا سالیتون ها را نمی توان با معادلات خطی بیان کرد.که درادامه دراین مورد بیشتر بحث خواهیم کرد[32].

یکی از موجودات ریاضی که از دل این معادلات دیفرانسیل غیرخطی پا به عرصه وجود گذاشته مفهومی به نام سالیتون[1] بود. سالیتون یکی از مفاهیم جالب و هیجان انگیز در ریاضیات جدید و معادلات دیفرانسیل غیرخطی است.ولی می خواهیم بدانیم که سالیتون چیست؟

سالیتون هادرواقع پاسخ های غیرتکینه بعضی معادله های دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستندودارای خصوصیات زیر می باشند[17]:

۱- این امواج پایدارند وبا گذشت زمان پاشنده نمی شوند.

۲- یک تک سالیتون یک موج متحرک با شکلی ثابت است.

1- Soliton

۳- این امواج در فضا جایگزیده هستند به این مفهوم که آنها دارای پاسخ های ذره گون[1] هستند.

٤- سالیتونها در برخورد با یکدیگر بدون آنکه باعث تخریب یکدیگر شوند از میان هم عبور می کنند وپس از برخورد خصوصیات خود را شبیه برخورد الاستیک دوذره حفظ می کنند.

۲-۳) تاریخچه کشف سالیتو نها

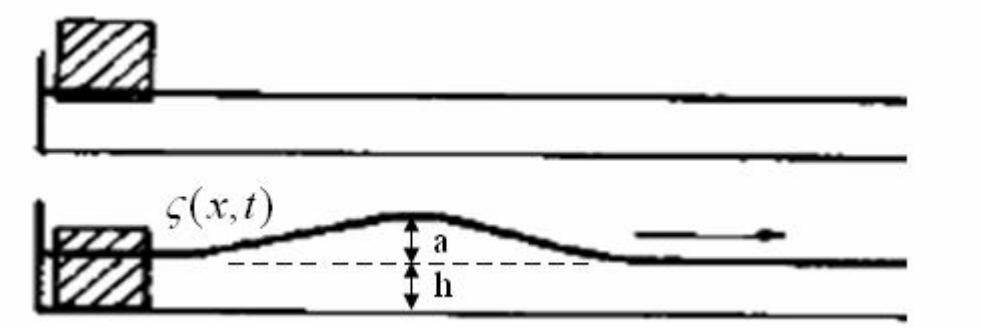
نظریه سالیتون هایکی از مباحث بسیار جذاب است.واین نظریه گسترده ،عمیق وزیباست. علاوه بر اینکه با بسیاری از گستره های ریاضیات درارتباط است، دارای کاربردهای بسیاری زیادی نیز در علوم فیزیکی از جمله اپتیک غیرخطی ،هواشناسی و... می باشد. سالیتونها دارای تاریخچه جالبی هستند وهمچنین برای آینده نیز نوید بخش خواهند بود.

در واقع سالیتونها نوع خاصی از امواج جایگزیده هستند..این امواج اولین بار در سال 1834توسط اسکات راسل[2]مهندس اسکاتلندی مشاهده شد. هنگامی که اسکات راسل مشغول طراحی یک کشتی کوچک مناسب برای کانالهای کم عمق بود در کنار کانال یونیون[3] در نزدیکی ادینبورگ[4] حرکت قایقی را مشاهده کرد که با طنابی به دو اسب متصل بود و قایق توسط اسب ها در کانال کشیده می شد. ناگهان طناب پاره شد و قایق از حرکت ایستاد. ودر اثر این توقف ناگهانی مقدار زیادی آب که حول دماغه قایق جمع شدو موج منفرد و آرامی را تشکیل داد که به سرعت در طول کانال شروع به حرکت نمود. راسل پس از مشاهده این موح منفرد با هیجان بسیار بر پشت اسب پرید و موج را تاچند مایل تعقیب کرد. او شاهد یکی از شگفت انگیزترین پدیده های زندگی اش بودزیرا این موج با امواج معمولی تفاوت داشت. موج شکل و ارتفاع خود را در تمام طول مسیر حفظ می کرد. در نتیجه او مشاهدات خود را در سال 1844به یک انجمن انگلیسی گزارش کرد. خلاصه مشاهدات اسکات راسل به صورت زیر می باشد[29]:

"من حرکت یک قایق را که توسط دو اسب در طول یک کانال باریک کشیده می شدند را مشاهده کردم و هنگامی که قایق به طور ناگهانی متوقف گردید پشته ای ازآب دماغه قایق را به صورت ناگهانی ترک کرد که حدود 8مایل این موج را دنبال نمودم وتغییری در ارتفاع وشکل این موج مشاهده نکردم ودر نهایت در فواصل دورتر کانال این موج را گم کردم[2]."

پس از مشاهده این رویداد ،راسل برای اینکه این پدیده را بهتر مشاهده کند یک مخزن 30 فوتی ازآب را در حیاط پشت منزلش ایجاد کردتا بتواند به طور عملی این موج را ایجاد کند.او این پدیده را بارها مورد آزمایش قرار داد.شکل(۲-۳) روش انجام آزمایش اسکات راسل را نشان می دهد. او با پرتاب یک وزنه وایجاد یک شوک ضربه ای دریک کانال آب توانست امواج منفرد را تولید کند.اواز آزمایشهایش این چنین

1- Quasi partical
2 - Scott Russel
3 - Union
4 - Edinburgh



شکل۲-۳) تولید امواج منفرد را در یک کانال آب را نشان می دهدکه راسل دراین آزمایش هاسرعت موج را به صورت $c = \sqrt{g(h+a)}$ **به دست آورد**[29].

آزمایش قرار داد.شکل(۲-۳) روش انجام آزمایش اسکات راسل را نشان می دهد. او با پرتاب یک وزنه وایجاد یک شوک ضربه ای دریک کانال آب توانست امواج منفرد را تولید کند.اواز آزمایشهایش این چنین استنباط کرد که حجمی از آب که درموج قراردارد برابراست با حجمی از آب که جابجا می شود.علاوه براین او توانست سرعت موج منفرد را به صورت رابطه زیر به دست آورد:

$$c = \sqrt{g(h+a)} \qquad (۲-۵)$$

که در اینجا a دامنه موج ، dارتفاع آب کانال و gشتاب جاذبه است. واین رابطه برای مقادیر $h > a$ معتبر است. مفهومی که ازرابطه(۲-۵)به نظر می رسد این است که امواج با ارتفاع بیشتر سریعتر حرکت می کنند.وامواج باارتفاع کمتر با سرعت کمتری حرکت می کنند.

همچنین اونشان داد که شکل ریاضی این موج به صورت $z = \xi(x,t)$ است:

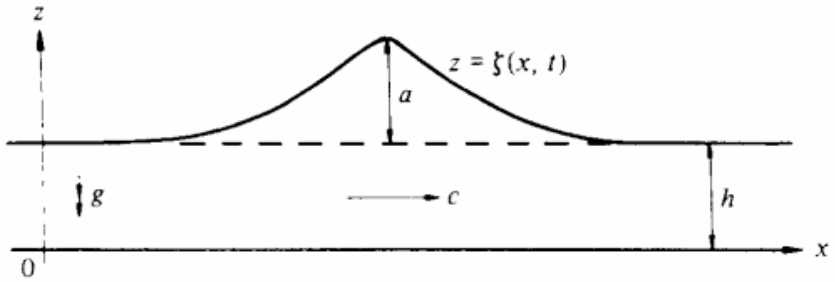
$$\xi(x,t) = a\sec h^2\{\beta(x-ct)\} \qquad (۲-۶)$$

که در اینجا:

$$\beta^{-2} = 4h^2(h+a)/3a \qquad a > 0 \qquad \text{برای هر} \qquad (۲-۷)$$

این تابع موج دقیقا" به شکل $\sec h^2$است در صورتی که $a/h << 1$باشد.

همانطور که از شکل (۲-۴) پیداست پارامتر ها و متغیر ها رابطه (۲-۶) و همچنین شکل این موج منفرد رسم شده است.



شکل۲-٤)پارامتر ها ومتغیر های مور د استفاده در توصیف موج منفرد را نشان می دهد[29].