بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی و آمار

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.Sc)

در رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان :

حجم کارا در شبکه ی مکعبی بدن محور با استفاده از باکس اسپلاین ها

استاد راهنما :

دکتر مجید امیرفخریان

استاد مشاور :

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

پژوهشگر:

نرگس مقدم فر

تابستان ۱۳۹۱

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب نرگس مقدم فر دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی ۸۸۰۶۵۱۱۰۷۰۰ در رشته ریاضی کاربردی-آنالیزعددی که در تاریخ ۹۱/۰۷/۱۸ از پایان نامه خود تحت عنوان "حجم کارا در شبکه ی مکعبی بدن محور با استفاده از باکس اسپلاین ها" با کسب نمره ۱۸ و درجه عالی دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

۲- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی : نرگس مقدم فر

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

درتاریخ : ۱۳۹۱/۰۷/۱۸

دانشـجوی کارشناسـی ارشـد آقـای / خـانم نـرگس مقـدم فـر از پایـان نامـه خـود دفـاع نمـوده و بـا نمـره ۱۸ بحروف هجده و با درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

تقدیم به پدر و مادر گرامی و دلسوزم و

همسر مهربانم

تشکر و قدردانی:

از خداوند مهربانم سپاسگزارم که هیچ گاه مرا تنها رها نکرده و به لطف او این کار به سرانجام رسیده است.

از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر مجید امیرفخریان نهایت تشکر را دارم هم چنین ، از جناب آقای دکتر محمد علی فریبرزی عراقی ، مشاور این پایان نامه و جناب آقای پروفسور بهمن مهری که داوری این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

در پایان لازم می دانم از پدر و مادر عزیز و همسر مهربانم به خاطر حمایت های بی دریغشان از صمیم قلب سپاسگزاری نمایم.

نرگس مقدم فر

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه نشان می دهیم که باکس اسپلاین های تفکیک ناپذیر قرار گرفته بر بدنه ی مرکزی شبکه ی مکعبی BCC جهت ارزیابی سریع سخت افزار گرافیکی موجود مناسب هستند. بنابراین ما با استفاده از چندجمله ای چندضابطه ای p-p فرم (به جای استفاده از اصول و اساس B-فرم) باکس اسپلاین خطی و مرتبه ی پنجم را بسط دادیم.

p-p فرم جهت روش های ارزیابی موثر هم چون قضایای الگوریتم اسپلاین دی بور در اصول باکس اسپلاین مناسب تر می باشند. بعلاوه ما مقایسه ای از باکس اسپلاین مرتبه ی پنجم با تنها عامل موثر بر شبکه های BCC که براساس هسته های مجزا جهت قرارگرفتن شبکه ی مکعبی دکارتی (CC) می باشد ارائه دادیم.

در حالی که باکس اسپلاین مرتبه ی پنجم کیفیت بالاتری را نتیجه می دهد، قرارگیری شبکه ی CC (مکعبی دکارتی) سریعتر می باشد که می توانند از فواید بهینه مداربندی شبکه ی CC که امروزه در سخت افزارهای گرافیکی مورد توجه می باشد استفاده کنند. این نتیجه با یا بدون پیش فیلترسازی معتبر هستند.

فصل ۱

تاریخچه

۱.۱ مقدمه

داده‌ی حجمی نوعاً مربوط به شبکه‌های مکعبی دکارتی (CC) می‌باشد به عنوان مثال نمونه‌های انتخاب شده‌ی شبکه‌ی قائم با فضای برابر در همه‌ی ابعاد این شبکه‌ها برای این که استفاده‌ی آسان‌تری داشته باشد تا زمانی ادامه می‌یابد که فهرست برداری درون‌یابی و ارائه به روش مناسب بُعد به بُعد انجام گیرد.

برخلاف استفاده و کاربرد داده حجمی مشخص است که شبکه‌های CC مطلوب [۳۹] نیستند برای مثال در یک طیف قدرت متقارن شعاعی، بهترین شبکه‌ی تناوبی می‌تواند برابر با بهترین طیف با خصوصیت بسته‌ی کره‌ای در دامنه‌ی تناوبی باشد. برای مثال شبکه‌ی مکعبی مرکزی وجه (FCC) در سه بعدی برابر با شبکه‌ی BCC در دامنه‌ی خاص می‌باشد. [۴۶]

شبکه‌ی BCC شامل یک شبکه‌ی CC به همراه نمونه‌ی اضافه شده در هر مکعب می‌باشد. شبکه‌ی FCC شامل یک شبکه‌ی CC همراه یک نمونه‌ی اضافه شده به هر وجه مکعب می‌باشد. طبق خاصیت تبدیل فوریه، فاصله‌گذاری پراکنده در یک دامنه، یک فاصله‌گذاری انبوه را در دامنه‌ی دوتایی نتیجه می‌دهد. بنابراین اگر امکان قرارگیری تکثیر (همانندسازی) طیفی تناوبی در دامنه‌ی فوریه موجود باشد،

فاصله‌گذاری پراکنده در دامنه‌ی خاص بدون هیچ هم‌اثرسازی قابل دستیابی می‌باشد بنابراین استفاده از شبکه‌ی BCC به جای شبکه‌ی CC می‌تواند باعث کاهش بیست و نه درصدی تعداد نمونه‌ها باشد بدون این که اطلاعات از بین برود که به طور مستقیم باعث کاهش ذخیره و هزینه‌ی محاسباتی می‌گردد.

اگرچه کاربرد مطلوب شبکه‌ی BCC از مدتی قبل مورد تأیید می‌باشد با این حال هسته‌های مناسب برای حجم سه بعدی ارائه می‌گردد و هم‌چنین شبکه‌ی BCC دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

۱) نظم تقریبی را ضمانت می‌کند.

۲) به لحاظ عددی پایدار است.

۳) کاربردی آسان دارد.

۴) کاربرد مؤثری را ایفا می‌کند.

در آثار اخیر [۴۶، ۱۶] در طرح عملی ارائه شده با استفاده از هسته‌های CC در دو جهت خود شبکه‌ی CC می‌توان به شبکه‌ی BCC دست یافت. این کار باعث اجرای ساده و مؤثر سخت‌افزار می‌گردد. اما به کارگیری ساختار BCC توسط هسته‌های مجزای CC، اطلاعات همسایگی خاص روی BCC را استخراج نمی‌کنند. باکس اسپلاین ارائه شده توسط انتظاری توابع اصلی خاص که به هندسه‌ی شبکه‌ی BCC مربوط می‌شود را معرفی کرده است [۲۵، ۲۴]. این باکس اسپلاین‌ها دارای خصوصیات جذاب برای نوسازی داده بر روی شبکه‌ی BCC می‌باشند.

در این پایان نامه موارد زیر را بررسی می‌کنیم:

الگوریتمی مؤثر جهت پیچش داده‌ی نمونه‌برداری BCC با باکس اسپلاین خطی (C^0) و مرتبه‌ی پنجم (C^2) ارائه دادیم [۲۲] که خصوصیات توابع اصلی باکس اسپلاین را مشخص می‌کند (برای مثال B—فرم). هم‌چنین چگونگی کاربرد مؤثر پیچش داده BCC با این باکس اسپلاین‌ها را نشان دادیم. این روش تابع اسپلاین نوسازی شده را که فرم یا حالت چندجمله‌ای چندضابطه‌ای (p-p فرم) را ارزیابی می‌کند.

چندجمله‌ای‌های مرتبه‌ی پنجم در قالب توان ارائه شده‌اند که از یک فاکتورگیری به چندجمله‌ای مکعبی و درجه‌ی دوم استفاده می‌کنند. قالب p-p طرح ارزیابی سریع‌تری در نقاط دلخواه را ارائه می‌دهد. پیش‌نیازی که جهت طراحی پرتو(شعاعی) در ارائه حجمی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ارزیابی قالب p-p بهینه شده که در بخش‌های بعدی ارائه خواهیم داد سبب می‌شود که ارزیابی چهارچوب فعل و انفعالی رقابتی مورد استفاده GPU را بدست آوریم.

ما باکس اسپلاین‌ها را با CC—بی‌اسپلاین سنتی و BCC—بی‌اسپلاین پیش فیلتر مقایسه می‌کنیم [۱٦] تا ملاحظه کنیم که کدامیک کیفیت بهتر و هزینه‌ی اجرایی کمتری را فراهم می‌کنند.

برای اطمینان از عدالت در مقایسه، درون‌یابی بلو و دیگران[۱] را به کار گرفتیم [۴] که به طور رایج به عنوان پیش فیلتر جهت نوسازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. [۱٦، ۱۵، ۱۰، ۹] ما تصویر با بهترین کیفیت پیش فیلتر برای همه روش‌ها را ادعا می‌کنیم اما هم‌چنین مشاهده کرده‌ایم که باکس اسپلاین‌های مرتبه‌ی پنجم بهترین کیفیت نوسازی با و بدون فرآیند پیش فیلتر را فراهم می‌کند. با حضور کاربردهای سخت افزار با شدت جریان برق اختصاص داده شده برای شبکه‌های CC، روش‌های بر پایه‌ی تفکیک شبکه‌های BCC به دو شبکه‌ی CC هم‌چنان سریع‌تر می‌باشد.

هم‌چنین در بخش‌های بعدی ما نتایجی که شامل داده‌ی واقعی و ترکیبی بوده و نشان دهنده‌ی فواید عملی و تئوری شبکه‌ی BCC در ترکیب با باکس اسپلاین‌ها می‌باشد را بازبینی می‌کنیم هم‌چنین نشان داده‌ایم که راه حل پیش فیلتر برای باکس اسپلاین مرتبه‌ی پنجم، ارائه حجمی فعل و انفعالی با کیفیت بالا از شبکه‌ی BCC را سبب می‌شود.

۱.۲ تاریخچه کارهای پیشین

داده‌ی نمونه‌برداری CC مورد استفاده در علم پردازش تصاویر می‌باشد. روش معمول، بسط و نوسازی الگوریتم تک متغیره به سه متغیره توسط روش حاصل‌ضرب تانسوری می‌باشد. [۳۸، ۷، ۱۷، ۳۷]

[۱] Blu et al

مارچنر و لاب[۲] [۳۴] در یک چهارچوب برای ارزیابی از این تکنیک‌های نوسازی مرسوم مورد استفاده جهت نوسازی‌های حجمی را بسط داده‌اند. در مقایسه با روش نوسازی حاصل‌ضرب تانسوری رُسل و دیگران در [۴۱] اسپلاین‌های برتر به عنوان نمونه (مدل) درون‌یاب موضوعی برای داده‌ی نمونه‌برداری CC پیشنهاد شده است. آن‌ها هر مکعب را به ۲۴ چهارضلعی تقسیم نموده و بر روی هر چهارضلعی یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوم قرار گرفته است. این افراز دامنه و درجه‌ی چندجمله‌ای، سبب می‌شود نوسازی C^1 به دو تقریب محدود شود. این شکل‌بندی یک اجرای پایه‌ای GPU [۳۲] که جهت ارائه روی یک سطح مناسب می‌باشد را در اختیار قرار می‌دهد. روش باکس اسپلاین تفکیک‌ناپذیر جهت نوسازی داده‌ی دکارتی نیز در [۲۳] ارائه گردیده است.

در طی سال‌های گذشته بر شبکه‌های نمونه‌برداری مطلوب توجه بیش‌تری شده است. تیوبل و دیگران[۳] در [۴٦] با فرض این‌که نمونه‌ها روی شبکه‌ی BCC با بسط کروی از هسته‌های نوسازی می‌باشند کیفیتی مشابه هم‌چون حضور CC با نمونه‌های اندک بدست می‌آیند. به هر حال کیفیت تصاویر ارائه شده توسط این روش نسبتاً ناراضی کننده می‌باشد چرا که تصاویر مه‌آلود و محو می‌باشند در این صورت چند هسته‌ی مناسب پیشنهاد می‌گردد. روش هسته گاوسین ترتیب تقریبی [۱۲] را ضمانت نمی‌کند و هم‌چنین هندسه‌ی اطلاعات همسایگی نقاط شبکه‌ی BCC را نادیده می‌گیرد.

اخیراً BCC اسپلاین‌ها [۱۳، ۲۵] به عنوان اسپلاین شش گوش دو بُعدی [۴۷] عمومیت داده شده است با این حال هنوز ترکیبات تکه‌ای چندجمله‌ای به لحاظ تحلیلی مشخص نگردیده و در نتیجه کاربرد آن‌ها محدود می‌باشد. این روش‌ها در ارائه داده‌های غیربدیهی (کلی) زمان واقعی نمی‌باشند. در تألیف اخیر انتظاری [۲۲] ارائه صریح چندجمله‌ای از باکس اسپلاین پیشنهادی که می‌تواند به طور مؤثر در جهت ارزیابی C^0 و C^2 هسته‌های فیلتری برای شبکه‌ی BCC باشد شرح داده شده است. به علت تعداد محدود نمونه‌های مورد نیاز جهت مقایسه برای شبکه‌ی CC به ترتیب (نمونه‌ی ۴ به جای ۸ و ۳۲ به جای ٦۴ جهت فیلتر C^0 و C^2) به سرعت بالای یک ضریب از ۲ بدست می‌آید در حالی که

[۲] Marschenar & lab

[۳] Theubl et al

روش آن‌ها ارزیابی مؤثری از باکس اسپلاین هسته‌ها دارد، اما عمده‌ی توجه پایان نامه‌ی ما در خصوص چگونگی پیچیدگی داده‌ی نمونه‌برداری BCC با باکس اسپلاین‌ها می‌باشد که در این خصوص شرحی داده نشده است. که شامل عملکرد GPU نمی‌باشد و بنابراین چهارچوب ارزیابی فعل و انفعالی نیست علاوه بر آن پیش فیلتر مطلوب باکس اسپلاین و عملکرد مؤثر آن در نظر گرفته شده است.

ماتوش[۴] [۳۵] اولین کسی بود که شبکه‌ی BCC را در زمان واقعی حجمی با استفاده از وسایل مناسب سخت افزار گرافیکی ارائه داد با این حال این روش منجر به نتایج مبهمی گردید.

زبفالوی[۵] [۱۶] مدل پیش فیلتر بی‌اسپلاینی را معرفی می‌کند که به لحاظ تئوری جهت شبکه‌ی CC به کاربرده می‌شود ولی برای شبکه‌ی BCC به کاربرده نمی‌شود به خصوص بی‌اسپلاین مجزا زمینه‌ی ریس[۶] را بر روی شبکه‌ی BCC تشکیل نمی‌دهد که منجر به ارائه (حضور) مبهم و نامشخص می‌گردد. برای مثال چند دسته از ضرایب علامت و سیگنال مشابه را ارائه می‌دهند به علاوه تفکیک شبکه‌ی BCC به دو شبکه‌ی CC چنان‌چه مجموعه داده در وضوح تصویر بالا نمونه‌برداری نشود منجر به خطر بی‌اساس دانستن فرکانس بالای اجزای ترکیبی روی شبکه‌ی BCC که منجر به محصول مصنوعی می‌گردد، می‌شود.

مثالی از مجموعه داده‌ی BCC را ملاحظه کنید که در آن نقاط شبکه‌ی اولیه CC همگی مجموعه ۱ و نقاط شبکه‌ی دوم CC همگی مجموعه‌ی ۰ هستند. در ۱D (یک بُعدی) هر نمونه‌ی دوم معادل ۱ است اصول شایسته ریس هم‌چون راه حل باکس اسپلاین می‌بایست طبیعت نوسان سیگنال را بدست آورد در واقع اولین راه حل (نزدیک‌ترین همسایگی درون‌یابی) بهتر از باکس اسپلاین طبیعت نوسانی این سیگنال را بدست می‌آورد به هر حال وقتی که این مجموعه داده به دو شبکه‌ی CC تفکیک می‌گردد. یک بی‌اسپلاین روی هر زیر شبکه یک تابع ثابت را پوشش می‌دهد (به علت تفکیک واحد) هم‌چنین میانگین دو سیگنال نوسازی مجزا مجدداً به یک تابع ثابت که بر روی شبکه‌ی کامل BCC نوسازی شده

[۴] Mattaush

[۵] Csebfalvi

[۶] Riesz

منتهی می‌شود. با این وجود آن‌ها نتایج بصری جذاب جهت برخی مجموعه داده‌ها ارائه دادند و این روش بهترین الگوریتمی است که چهارچوب مقیاس زمان واقعی و کیفیت بالای تصویر روی شبکه‌ی BCC را شامل می‌شود بنابراین در بخش‌های بعدی ما روش جدید را با روش زبفالوی[۷] [۱٦] مقایسه می‌کنیم.

باکس اسپلاین [۱۸، ۲۰] و بی‌اسپلاین پیش فیلتر [۱۱] هر دو جهت شبکه‌ی درون‌یابی بر شبکه‌ی BCC به کاربرده شده‌اند. پیش فیلتر پیشنهادی [۱۱] مشکلات فوق الذکر را حل نمی‌کند. پیش فیلتر AC مقایسه‌ی هر شبکه را به طور مجزا اصلاح می‌کند (تغییر یا پیدایش) مسأله‌ی مذکور را حل نمی‌کند. به طور مشابه پیش فیلتر AC به مقادیر مشابه بر تمام نقاط اولیه‌ی شبکه‌ی مقادیر متفاوتی (منفی) بر تمام نقاط دوم شبکه منجر می‌گردد. نوسازی هر شبکه مجدداً به سیگنال ثابت هدایت می‌شود پس خواهان میانگین آن‌ها هستند. هم‌چنین بالاترین کیفیت بصری شبکه‌ی BCC در ارائه حجمی توسط منج[۸] نشان داده شده است در [۳٦] که در مقایسه با یک شبکه‌ی CC حضور تئوری سی درصد مورد نیاز محدود نمونه‌ها باعث عدم فقدان کیفیت بصری می‌گردد.

استفاده‌ی سخت افزار گرافیکی روش استاندارد برای دستیابی زمان واقعی داده حجمی بر شبکه‌ی CC می‌باشد. روش‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند: روش‌های تکه‌ای [٦] که بافت سه بُعدی با استفاده از چندضلعی یک بافت سه بُعدی را نشان داده و حجم را قطع می‌کند و طرح شعاع (پرتو) [۳۳، ۴۰] جایی که پرتوها از یک حجم در چندین نقطه نمونه‌برداری می‌شوند در حالی که روش اول با گرافیک سازگارتر است طرح پرتویی با چهارچوب کاری منعطف‌تر می‌باشد. یک بررسی جامع و عالی از سرعت ارائه حجمی GPU در کتاب انگل[۹] وجود دارد.

[۷] Csebfalvi

[۸] Meng

[۹] Engel

فصل ۲

تعاریف مقدماتی

۱.۲.۰ تبدیلات فوریه

تبدیلات فوریه‌ی نامتناهی

[۲] فرض کنیم تابع f بر $\mathbb{R}$ تکه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت **تبدیل فوریه‌ی نامتناهی تابع** f عبارت است از:

$$\tilde{f}(w) = T(f) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx : \qquad (۱.۲)$$

$$T^{-۱}(\tilde{f}) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) e^{iwx} dw \qquad (۲.۲)$$

بنابراین با ترکیب این دو داریم:

$$\begin{aligned} T^{-۱}(T(f)) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(f) e^{iwx} dw \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{۰}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx \right) e^{iwx} dw \end{aligned} \qquad (۳.۲)$$

قضیه ۱.۲ فرض کنیم $T(f)$ تبدیل فوریه‌ی نامتناهی تابع f باشد در این صورت

الف) اگر $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ آن‌گاه

$$T(f') = iwT(f)$$

ب) اگر $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$ آن‌گاه

$$T(f'') = -w^2 T(f)$$

۲.۲.۰ تبدیلات فوریه‌ی نیمه‌متناهی

در صورتی که تابع f بر بازه‌ی $(0, +\infty)$ تکه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، **تبدیلات فوریه‌ی نیمه‌متناهی کسینوسی و سینوسی تابع** f به ترتیب عبارتند از:

$$\tilde{f}_c(w) = T_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(wx) dx \tag{۴.۲}$$

و

$$\tilde{f}_s(w) = T_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(wx) dx \tag{۵.۲}$$

هم‌چنین **تبدیلات فوریه‌ی نیمه‌متناهی معکوس** به صورت زیر است:

$$T_c^{-1}(\tilde{f}_c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}_c(w) \cos(wx) dw \tag{۶.۲}$$

و

$$T_s^{-1}(\tilde{f}_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}_s(w) \sin(wx) dw \tag{۷.۲}$$

قضیه ۲.۲ فرض کنیم $T_c(f)$ و $T_s(f)$ به ترتیب تبدیل فوریه‌ی نیمه‌متناهی کسینوسی و سینوسی تابع f باشند، در این صورت

الف) اگر $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=۰$ آن‌گاه

$$T_c(f')=wT_s(f)-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}f(۰)$$

و

$$T_s(f')=-wT_c(f)$$

ب) اگر $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f'(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=۰$ آن‌گاه

$$T_c(f'')=-w^۲T_c(f)-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}f'(۰)$$

و

$$T_s(f'')=-w^۲T_s(f)+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}wf(۰)$$

تبدیلات فوریه‌ی متناهی

در صورتی که تابع f بر بازه‌ی $(۰,l)$ تکه‌ای هموار و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، **تبدیلات فوریه‌ی متناهی کسینوسی و سینوسی تابع** f عبارتند از:

$$T_c(f)=\frac{۲}{l}\int_l^۲ f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx=\tilde{f}_c(n),\quad n=۰,۱,۲,\cdots \qquad (۸.۲)$$

و

$$T_s(f)=\frac{۲}{l}\int_l^۲ f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx=\tilde{f}_s(n),\quad n=۱,۲,\cdots \qquad (۹.۲)$$

هم‌چنین **تبدیلات فوریه‌ی متناهی معکوس** به صورت زیر است:

$$T_c^{-1}(\tilde{f}_c) = \frac{1}{2}\tilde{f}_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_c(n)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{۱۰.۲}$$

و

$$T_s^{-1}(\tilde{f}_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_s(n)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{۱۱.۲}$$

قضیه ۳.۲ فرض کنید $T_c(f)$ و $T_s(f)$ به ترتیب تبدیلات فوریه‌ی متناهی کسینوسی و سینوسی تابع f باشند، در این صورت

$$T_c(f'') = \frac{-n^2\pi^2}{l^2}T_c(f) + \frac{2}{l}\left[(-1)^n f'(l) - f'(0)\right] \tag{۱۲.۲}$$

و

$$T_s(f'') = \frac{-n^2\pi^2}{l^2}T_s(f) - \frac{2n\pi}{l^2}[(-1)^n f(l) - f(0)] \tag{۱۳.۲}$$

تعریف ۱.۲ بازه‌ی $[a,b]$ را در نظر گرفته و افرازی از $n+1$ نقطه را بر آن به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Delta = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

فضای H_Δ از توابع را به صورتی تعریف می‌کنیم که

۱) اگر $s \in H_\Delta$، آن‌گاه تابع s بر بازه‌ی $[a,b]$ دو مرتبه مشتق‌پذیر است.

۲) اگر $s \in H_\Delta$، آن‌گاه در هر زیربازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر سه باشد.

تابع $s \in H_\Delta$ را درونیاب اسپلاین مکعبی تابع f بر Δ می‌گوییم هرگاه

$$s(x_i) = f_i, \quad i = 0, \cdots, n$$

۲.۱ توابع بی‌اسپلاین یک متغیره

[۲] فرض می‌کنیم $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ نقاطی واقع بر محور اعداد حقیقی باشند.

تعریف ۲.۲ توابع بی‌اسپلاین یک متغیره از مرتبه‌ی صفر، توابع تکه‌ای ثابت هستند که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$B_i^0(x) := \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۴.۲}$$

هم‌چنین برای عدد طبیعی $k \geq 1$، بی‌اسپلاین‌های یک متغیره از مرتبه‌ی k نیز با استفاده از رابطه‌ی بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$B_i^k(x) := \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \tag{۱۵.۲}$$

قرار می‌دهیم:

$$V_i^k := \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین داریم:

$$B_i^k = V_i^k(x) B_i^{k-1}(x) + [1 - V_{i+1}^k] B_{i+1}^{k-1}(x) \tag{۱۷.۲}$$