بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد واياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

عنوان پایان نامه:

نتایج وجودی رده ای از معادلات نیمه مثبت گون شامل عملگر پی- لاپلاس

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض(گرایش آنالیز)

استاد راهنما:

دکتر قاسم علیزاده افروزی

استاد مشاور :

دکتر علی تقوی

دانشجو :

زهرا صادقی چمازکتی

زمستان ۱۳۸۶

حمد و سپاس بیکران خداوند متعال را و درود بر پیام آور دوستی حضرت محمد (ص) و ائمه طاهرین (ع) بخصوص امام رضا (ع) و مولایم حضرت مهدی (عج).

بر خود لازم می دانم که از استاد گرانقدرم آقای دکتر قاسم علیزاده افروزی که در سایه توجهات و رهنمودهایشان موفق به پایان رساندن دوره کارشناسی ارشد شده ام کمال سپاس و قدردانی را داشته باشم.

از استاد مشاورم آقای دکتر علی تقوی که راهنماییهای موثرشان موجب بهبود ارائه پایان نامه ام شده صمیمانه قدردانی می کنم.

همچنین از اساتید مدعو آقای دکتر حسن حسین زاده و آقای دکتر محسن علیمحمدی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه ام را بر عهده گرفتند و پیشنهاداتشان باعث بهبود تدوین و نگارش پایان نامه ام شده سپاسگزاری می کنم.

همچنین از سایر اساتیدی که در طول تحصیلم به نحوی افتخار شاگردی شان را داشتم کمال تشکر را دارم.

تقدیم به:

- روح پرفتوح حضرت امام خمینی(ره) و محضر رهبر معظم انقلاب اسلامی
- روح بلند همه شهیدان عاشق به ویژه شهدای محل خودم
- پدر و مادر عزیزم که موفقیت خود را حاصل زحمات بی شائبه آنها میدانم
- پدر و مادر همسرم که همواره در امر تحصیل مشوق بودند
- همسر مهربان و فرزند دلبندم فاطمه زهرا که در تمام مراحل تحصیلی با عشق و شکیبائی همراهیم نمودند
- خواهران و برادران عزیزم که بسیار دوستشان دارم.

چکیده:

در این پایان نامه به بررسی وجود و پایداری جوابهای مثبت برخی از مسائل مقدار مرزی بیضوی خواهیم پرداخت.

ابتدا با مطالعه‌ی مسأله‌ی مقدار مرزی نیمه مثبت گون شامل عملگر پی-لاپلاس به صورت:

$$\begin{cases}-\Delta_p u = g(x,u,c) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega,\end{cases}$$

که در آن $c > 0$ یک پارامتر و Ω یک دامنه‌ی کراندار در IR^n است، وجود جوابهای $C^1(\bar{\Omega})$ مثبت را به روش جواب بالایی و پایینی مورد بررسی قرار می دهیم.

در ادامه نتایج را برای دستگاه:

$$\begin{cases}-\Delta_p u = \lambda f(v) & x \in \Omega, \\ -\Delta_p v = \lambda g(u) & x \in \Omega, \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega,\end{cases}$$

با همان روش جواب بالایی و پایینی تعمیم می دهیم.

همچنین در پایان، خواص پایداری و ناپایداری جوابهای مثبت انواع مسائل مقدار مرزی، اعم از دستگاه های واکنش پخش با ضرایب انتشار نابرابر و مسائل بیضوی با انتشار غیرخطی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم.

« فهرست مطالب »

فصل سوم: جوابهای مثبت برای یک رده از دستگاه های شامل عملگر پی ـ لاپلاس

فصل چهارم: خواص پایداری و ناپایداری جوابهای مثبت

مقدمه:

آنالیز غیرخطی یکی از مهم ترین و شاخص ترین شاخه های ریاضیات است که در دهه های اخیر قرن گذشته پیشرفت چشمگیری داشته است. موفقیت کنونی این رشته، به دلیل کاربرد وسیع آن در پدیده های مختلف فیزیکی، مهندسی مکانیک کوانتومی و اقتصاد است. در واقع در مدل بندی بسیاری از پدیده های طبیعی، به نحوی به یک معادله دیفرانسیل جزیی برخورد می کنیم. در سال های اخیر به دلیل وسعت کاربردها و دامنه‌ی گسترده‌ی نتایج در زمینه های مختلف، بسیاری از پژوهشگران وآنالیزدانان به مطالعه‌ی رفتار جوابهای دسته ای از معادلات دیفرانسیل جزیی از نوع بیضوی همراه با شرط مرزی، به کمک آنالیز غیرخطی، پرداخته اند. آنالیز غیرخطی و حساب تغییرات هم اکنون به یکی از شاخه های بسیار جذاب و پر کار در زمینه‌ی مطالعه‌ی معادلات بیضوی با شرط مرزی تبدیل شده است. دامنه‌ی وسیعی از مسائل طرح شده در زمینه‌ی مکانیک سیالات، پدیده های همدمایی در ترمودینامیک و همچنین نرخ مهاجرت در جمیعت شناسی، به کمک این ابزار جدید از ریاضیات مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته اند.

به عنوان یک نمونه از مصادیق فیزیکی، فرض کنید بخواهیم وجود و رفتار حالت پایدار u از دمای توزیع شده در جسم Ω که توسط یک جریان الکتریکی $I=\sqrt{\lambda}>0$، گرم شده است را بررسی کنیم (∇uبیانگر انتقال گرماست). اگر جسم Ω همگن با هدایت حرارتی یکنواخت باشد، مقاومت الکتریکی R تابعی از دمای u خواهد بود یعنی $R=R(u)$. حال اگر تابش گرمایی را ناچیز فرض کنیم، معادله‌ی حالت پایدار به دست آمده دارای ساختار $-\Delta u=\lambda R\,(u)$ می باشد که در این حالت، تنها جواب های مثبت مورد نظر می باشند. در بسیاری از موارد فیزیکی، مقاومت همراه با دما افزایش

می یابد یعنی $u \to R(u)$ یکنوای صعودی است. فرض کنید دما روی مرز جسم همواره صفر باقی بماند که در نتیجه ما با یک معادله با شرط مرزی دیریکله مواجه هستیم. معمولاً مقاومت حتی در دمای صفر نیز مثبت در نظر گرفته می شود یعنی: $R(0) > 0$.

گاهی در مدل بندی برخی پدیده های فیزیکی به عملگری پیچیده تر از عملگر لاپلاس برخورد می‌کنیم. وسعت کاربردهای عملگر بیضوی پی- لاپلاس که به صورت $\Delta_p u := div\,(|\nabla u|^{p-2}\,\Delta u)$ تعریف می شود، به شکلی است که توجه بسیاری از دانشمندان و آنالیزدانان را به خود معطوف کرده است. این عملگر در مطالعه‌ی سیالات غیرنیوتنی، در برخی مسائل واکنش پخش و همچنین در مطالعه‌ی شارش درون جسم متخلخل به کار گرفته می شود. $Diaz$ در [۱۹] ، پیش زمینه های فیزیکی و رفتارهای ریاضی مسائل شامل این عملگر را جمع آوری کرده است.

از دیدگاه کاربردی دانستن اینکه آیا یک جواب داده شده پایدار است یا نه از اهمیت زیادی برخوردار است. مفهوم پایداری در رابطه با این امکان است که خطاهای کوچک پیش آمده در طول یک روند ریاضی، ممکن است وقتی روند ادامه یابد مستهلک شوند، به عکس، ناپایداری نیز وقتی رخ می دهد که خطاهای کوچک احتمالاً بدون کران افزایش یابند[۱۰].

در این پایان نامه ما به بررسی وجود جواب رده ای از مسائل شامل عملگر پی- لاپلاس و سپس پایداری جوابهای مثبت برای عملگرهای لاپلاس و پی- لاپلاس می پردازیم. مطالب مندرج در این پایان نامه، در چهار فصل تنظیم شده است:

فصل اول پیشنیاز سه فصل آتی است که شامل تعاریف و قضایای مقدماتی می باشد که از مباحث آنالیز تابعی غیرخطی و معادلات با مشتقات جزیی برگزیده شده است.

در **فصل دوم**، ابتدا با روش جواب بالایی و پایینی آشنا شده و سپس وجود جوابهای مثبت انواع مسأله‌ی مقدار مرزی به صورت:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x,u,c) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

را مورد مطالعه قرار می دهیم که در آن Δ_p عملگر پی- لاپلاس و $c > 0$ یک پارامتر است و Ω یک دامنه‌ی کراندار در IR^n است با $n \geq 2$ و $\partial\Omega$ از کلاس C^2 همبند است و $g(x,0,c) < 0$.

در **فصل سوم**، با همان روش ذکر شده برای فصل قبل، به مطالعه‌ی وجود جوابهای مثبت دستگاه:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(v) & x \in \Omega, \\ -\Delta_p v = \lambda g(u) & x \in \Omega, \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

می پردازیم و ثابت می کنیم در یک بازه‌ی مشخص از λ، این مسأله یک جواب مثبت بزرگ دارد.

در **فصل چهارم**، به بررسی خواص پایداری جوابهای مثبت انواع مسائل مقدار مرزی شامل عملگر لاپلاس و عملگر پی- لاپلاس خواهیم پرداخت.

در پایان نیز مراجع مورد استفاده ذکر می گردد.

فصل اول:

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه:

در این فصل، به بیان مفاهیم پایه مورد نیاز در فصل های آتی پرداخته شده و برخی قضایای اساسی بدون ذکر اثبات آنها آورده شده است. همچنین به تعریف فضاهای مختلف همچون فضاهای باناخ، هیلبرت و فضاهای سوبولف و قضایای مربوط به این دسته از فضاها و همچنین قضیه واگرایی و اتحادهای گرین و قضیه نشاندن سوبولف و سپس تعریف عملگرهای بیضوی و مسائل مقدار مرزی و اصول ماکسیمم می پردازیم. شایان ذکر است که تمام این مطالب از منابع [۱،۷،۲۴،۳۴،۳۹] گردآوری شده اند.

۱-۱. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۱-۱. تعریف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی (PDE):

هر معادله مشتمل بر یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گوییم. اگر معادله دیفرانسیلی شامل یک تابع U از چندین متغیر و مشتقات جزیی شان باشد آن را معادله دیفرانسیل جزئی می نامیم یعنی برای تابع n متغیره $U\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ داشته باشیم:

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,U_{x_1},U_{x_2},\ldots,U_{x_n},U_{x_1x_1},U_{x_1x_2},\ldots\right)=0. \qquad (۱.۱)$$

اگر $U=f(x_1,\ldots,x_n)$ یک تابع چند متغیره باشد مشتق مرتبه nام U نسبت به مؤلفه x_i، $i=1,\ldots,n$، را به صورت $\frac{\partial^n U}{\partial {x_i}^n}$ نشان می دهیم.

نکته ۱: هرگاه بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله، n باشد معادله دیفرانسیل را از مرتبه n گوییم.

نکته ۲: اگر معادله (۱. ۱) به صورت خطی وابسته به U و مشتقاتش باشد، معادله را خطی گفته و در غیر این صورت معادله را غیرخطی گوییم. به علاوه اگر در معادله (۱. ۱) همه مشتقات U به صورت خطی با ضرایب وابسته به فقط x واقع شود معادله را نیم خطی گوییم و اگر همه‌ی بزرگترین درجه مشتقات U به صورت خطی با ضرایب وابسته به فقط x و U و پایین ترین درجه مشتقات U باشد آنگاه معادله را شبه خطی نامیم.

۱-۱-۲. تعریف نگاشت خطی و تابعک خطی:

فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. نگاشت $f: X \to Y$ را یک نگاشت خطی گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \qquad \forall x,y \in X \ , \quad \forall \alpha,\beta \in IR.$$

نکته ۱: به نگاشتی که نسبت به هر یک از دو متغیرش خطی باشد، نگاشت دو خطی می گوییم.

نکته ۲: به نگاشت های خطی $f: X \to F$ که در آن F یک میدان اسکالر است، تابعک خطی گفته می شود.

۱-۱-۳. تعریف دامنه:

فرض کنید $IR^n\ (n \geq 2)$، فضای اقلیدسی n بعدی باشد با نقاط $x=(x_1,\dots,x_n)$ که $x_i \in IR$ و $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. در این صورت $\Omega \subseteq IR^n$ را یک دامنه یا حوزه نامیم هرگاه یک زیرمجموعه‌ی باز و همبند باشد و این یعنی نقاط x و y در Ω را بتوان با یک منحنی در Ω به هم وصل کرد و برای

هر x در Ω یک r به اندازه کافی کوچک موجود باشد به طوری که $B_r(x) \subseteq \Omega$. ($B_r(x)$ یک گوی باز در IR^n به شعاع r و مرکز x است).

۱-۱-۴. تعریف نقطه حدی، بستار و مرز:

نقطه حدی: فرض کنید $\Omega \subset IR^n$ یک دامنه باشد. به نقطه $x \in IR^n$ یک نقطه حدی Ω گوییم هرگاه به ازای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$B_r^0(x) \cap \Omega \neq \phi,$$

که در آن $B_r^0(x)$ یک همسایگی محذوف به شعاع r و به مرکز x است. مجموعه نقاط حدی Ω را با نماد Ω' نشان می دهیم.

بستار: عبارت است از اجتماع نقاط مجموعه Ω و نقاط حدی آن که معمولاً آن را با $\bar{\Omega}$ نشان می دهیم یعنی:

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Omega'.$$

مرز: مرز Ω را که با $\partial\Omega$ نشان می دهیم عبارت است از مجموعه نقاط حدی Ω که در Ω نیستند. یعنی:

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega.$$

نکته: اگر $\Omega = IR^n$ باشد آنگاه $\partial\Omega = \phi$ و اگر Ω یک مجموعه کراندار باشد، آنگاه $\partial\Omega$ نیز یک مجموعه کراندار است.

۱-۱-۵. چند تعریف:

$C(\Omega)$: عبارت است از مجموعه تمام توابع پیوسته روی Ω.

$C^k(\Omega)$: عبارت است از مجموعه توابعی که تمام مشتقات تا مرتبه kام آنها موجود و روی Ω پیوسته اند ($k \in IN$).

$C^\infty(\Omega)$: عبارت است از کلاس تمام توابع روی دامنه‌ی Ω که برای هر عدد طبیعی k، متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد. به این دسته از توابع، توابع هموار نیز می گویند.

$C^k(\overline{\Omega})$: عبارت است از مجموعه توابعی مانند $f \in C^k(\Omega)$ که برای آن f و تمام مشتقات نابیشتر از kی آنها به طور پیوسته به $\overline{\Omega}$ توسیع می یابند.

$C(\Omega, IR^n)$: عبارت است از مجموعه تمام توابع n بردار مقداری پیوسته روی دامنه‌ی Ω.

تذکر: در فصل های آتی با توابع $n-$ بردار مقداری همانند نگاشت هایی از IR^n به IR^n سر و کار خواهیم داشت.

۱-۱-۶. تعریف محمل یک تابع پیوسته:

محمل یک تابع پیوسته مانند f روی IR^n عبارت است از بستار مجموعه نقاطی از IR^n که به ازای آنها f غیر صفر است و با $\operatorname{supp} f$ نشان می دهند:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in IR^n ; f(x) \neq 0\}}$$

و این یعنی برای هر $x \in IR^n$ که $x \notin \operatorname{supp} f$، داریم: $f(x) = 0$.

نکته: یک مجموعه در IR^n را کراندار گوییم هرگاه مشمول در یک گوی باز $B_r(0)$ با r به اندازه کافی بزرگ باشد. حال اگر محمل f کراندار باشد آنگاه طبق قضیه هاینه ـ برل (مجموعه‌های بسته و کراندار در IR^n فشرده اند) f دارای یک محمل فشرده خواهد بود.

۱-۱-۷. چند تعریف:

$C_0(IR^n)$: عبارت است از فضای تمام توابع پیوسته با محمل فشرده.

$C_0(\Omega)$: عبارت است از تمام توابع پیوسته روی Ω که محمل آن یک زیر مجموعه فشرده از Ω است.

$C_0^k(\Omega)$: عبارت است از تمام توابع در $C^k(\Omega)$ که محمل آن یک زیرمجموعه‌ی فشرده از Ω است.

۱-۱-۸. تعریف تابع آزمون:

به تابع f که روی یک مجموعه باز غیرتهی $\Omega \subset IR^n$ تعریف شده، یک تابع آزمون گویند هرگاه $f \in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $k \subset \Omega$ وجود داشته باشد به طوری که محمل f در k قرار داشته باشد. مجموعه‌ی این دسته توابع را با $C_0^\infty(\Omega)$ نشان می دهند.

۱-۱-۹. چند تعریف:

تابع ابرخطی: تابع f را ابرخطی گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

تابع زیر خطی: تابع f را زیر خطی گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

تابع نامثبت گون: تابع f را نامثبت گون گوییم هرگاه: $f(0) \leq 0$.

تابع مثبت گون: تابع f را مثبت گون گوییم هرگاه: $f(0) > 0$.

تابع نیمه مثبت گون: تابع f را نیمه مثبت گون گوییم هرگاه: $f(0) < 0$.

۱-۱-۱۰. چند تعریف:

$L^1(\Omega)$: عبارت است از گردایه تمام توابع مانند f تعریف شده روی قلمرو Ω، که انتگرال شان متناهی باشد یعنی:

$$\int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty.$$

به این مجموعه از توابع، توابع انتگرال پذیر روی دامنه Ω گویند.

$L^1_{loc}(\Omega)$: عبارت است از مجموعه ای از توابع که روی هر زیرمجموعه فشرده از Ω انتگرال پذیرند و لزومی ندارد روی خود Ω انتگرال پذیر باشند.

نکته: از آنجایی که توابع پیوسته روی مجموعه های فشرده مقادیر بیشینه و کمینه خود را می گیرند لذا می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{cases} C_0(\Omega) \subset L^1(\Omega), \\ C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega). \end{cases}$$

لازم به ذکر است که ممکن است توابع در $L^1(\Omega)$ یا $L^1_{loc}(\Omega)$ روی نقاط تکین دارای ناپیوستگی باشند اما در همگرایی انتگرال تأثیری ندارند.

۱-۲. پیوستگی هولدر

۱-۲-۱. تعریف پیوستگی هولدر در یک نقطه:

فرض کنید $x_0 \in IR^n$ یک نقطه و f تابع تعریف شده روی یک زیر مجموعه ی باز کراندار Ω شامل x_0 باشد. آنگاه برای هر $0<\alpha<1$ می گوییم « f در x_0 پیوسته هولدر با توان α است » هرگاه:

$$[f]_{\alpha;x_0} = \sup_{x\in\Omega} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha} < \infty.$$

همچنین چنانچه در کمیت فوق $\alpha=1$ باشد آنگاه می گوییم « f در x_0 پیوسته لیپشیتز است ».

نکته: اگر f در x_0 پیوسته هولدر باشد آنگاه f در x_0 پیوسته است. زیرا از اینکه f در x_0 پیوسته هولدر است برای M ی متناهی داریم:

$$M=[f]_{\alpha;x_0}=\sup_{x\in\Omega}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha},$$

در نتیجه:

$$\forall x\in\Omega \quad , \quad \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}\le M,$$

بنابراین برای هر x در Ω داریم:

$$|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|^\alpha,$$

حال کافی است برای هر $\varepsilon>0$ دلخواه: $\delta<\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{M}}$ انتخاب شود لذا f در x_0 پیوسته خواهد بود.

۱-۲-۲. تعریف پیوستگی هولدر در Ω:

تابع f را « پیوسته هولدر از توان α در Ω » نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$[f]_{\alpha;\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty \qquad \forall\alpha;\ 0<\alpha\le 1.$$

۱-۲-۳. تعریف:

فرض کنید Ω یک زیرمجموعه باز از IR^n و k یک عدد صحیح نامنفی باشد:

$C^{k,\alpha}(\Omega)$ و $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$: به عنوان زیرفضاهایی از $C^k(\Omega)$ و $C^k(\bar{\Omega})$ عبارتند از مجموعه توابعی که مشتقات جزیی تا مرتبه k-ام آنها پیوسته هولدر با توان α روی Ω و $\bar{\Omega}$ است.

$C_0^{k,\alpha}(\Omega)$: عبارت است از فضای همه توابع در $C^{k,\alpha}(\Omega)$ که در Ω دارای محمل فشرده اند.

نکته ۱: جهت سهولت قرار می دهیم: $C^{0,\alpha}(\Omega)=C^\alpha(\Omega)$ و $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})=C^\alpha(\bar{\Omega})$.

نکته ۲: یادآور می شویم حاصلضرب توابع پیوسته هولدر، پیوسته هولدر است زیرا اگر $u\in C^\alpha(\bar{\Omega})$ و $v\in C^\beta(\bar{\Omega})$، آنگاه $uv\in C^\gamma(\bar{\Omega})$ که در آن $\gamma=min\{\alpha,\beta\}$.

۱-۳. فضای باناخ

۱-۳-۱. تعریف فضای خطی نرمدار:

فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد. یک نرم روی X یک نگاشت $P:X \to IR$ است که به صورت $P(x)=\|x\|;\ x\in X$ تعریف می شود و در سه شرط زیر صدق می کند:

۱) $\|x\|\ge 0$ برای هر $x\in X$ و $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$.

۲) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ برای هر $x\in X$ و $\alpha\in IR$.

۳) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ برای هر $x,y\in X$.

در این صورت فضای برداری X یک فضای خطی نرمدار نامیده می شود.

نکته: مطابق با (۳) نامساوی مثلثی برقرار است، یعنی:

$$\forall x,y,z\in X\ ,\ \|x-y\|\le\|x-z\|+\|z-y\|,$$

که این در تلفیق با (۱) و (۲) نشان می دهد که هر فضای خطی نرمدار X را می توان با متر تعریف شده‌ی زیر:

$$d(x,y)=\|x-y\|\ ;\ x,y\in X,$$

یک فضای متری در نظر گرفت. در نتیجه یک دنباله مانند $\{x_n\}$ در X همگرا به عضو $x\in X$ یافت می شود هرگاه: $\|x_n-x\|\to 0$.

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است اگر $\|x_m-x_n\|\to 0$ زمانی که $m,n\to\infty$، یعنی:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ ;\ \forall m,n>N\ \Rightarrow\ \|x_m-x_n\|<\varepsilon.$$

۱-۳-۲. تعریف فضای باناخ:

یک فضای باناخ X یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد یعنی هر دنباله کوشی در X با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه ای از X همگرا باشد.

۱-۳-۳. تعریف نرمهای معادل:

فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار و $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ دو نرم باشند که روی X تعریف شده اند، نرم های $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ معادل نامیده می شوند و می نویسیم $\|.\|_1 \cong \|.\|_2$ هرگاه اعداد مثبت حقیقی k_1 و k_2 موجود باشند به طوری که:

$$k_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le k_2 \|x\|_1 ; \quad x \in X .$$

۱-۳-۴. دوگان فضا:

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، در این صورت خانواده همه تابعک های خطی کراندار روی X با نرم :

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

خود یک فضای باناخ است که آن را دوگان فضای X می نامیم و با نماد X^* نشان می دهیم.

۱-۳-۵. تعریف همگرایی ضعیف:

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. دنباله $\{x_n\} \in X$ به عنصر $x \in X$ همگرایی ضعیف نامیده می شود هرگاه برای هر $h \in X^*$ داشته باشیم:

$$h(x_n) \to h(x), \quad as \ n \to \infty$$

و آن را به صورت $x_n \xrightarrow{W} x$ نشان می دهند.