وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

پایداری معادلات تابعی جمعی‌کشی در فضاهای چند-نرمی

توسط:

مهسا خوشنویسان

استاد راهنما:

دکترغلامرضا عباسپور تبادکان

استاد مشاور:

دکتر محمد رمضانپور

۲۰ بهمن ۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

پایداری معادلات تابعی جمعی‌کشی در فضاهای چند-نرمی

توسط:

مهسا خوشنویسان

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد رمضانپور استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر قدیر صادقی استادیار دانشگاه تربیت معلم سبزوار (داور اول)

دکتر نرگس تولایی استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر محمود اله دادی سلمانی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

۲۰ بهمن ۸۹

تقدیم به

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم

سپاسگزاری

خداوند را شاکرم که به من توانایی یادگیری علم را ارزانی فرمود.

از جناب آقای دکتر غلامرضا عباسپور استاد ارجمندم به خاطر راهناییهای ارزشمندشان کمال تشکر را دارم.

همچنین از اساتید دانشگاه دامغان که در طی این سالها از محضرشان استفاده کردم سپاسگزارم.

از خانواده و تمامی دوستانم که باعث ایجاد انگیزه و پیشرفت من شدند بی نهایت متشکرم.

چکیده

پایداری معادلات تابعی جمعی کشی در فضاهای چند-نرمی

به وسیله‌ی:

مهسا خوشنویسان

دراین پایان نامه ابتدا به مفهوم پایداری معادلات تابعی به خصوص معادله تابعی جمعی کشی

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

در فضای نرمدارو بررسی قضیه پایداری هایرز-اولام-راسیاس می پردازیم.

سپس با فضای چند-نرمی و ویژگی های آن آشنا شده و در نهایت پایداری معادلات تابعی در فضای چند-نرمی بویژه تعمیمی از قضیه پایداری هایرز - اولام - راسیاس مرتبط با معادله جمعی کشی برای نگاشت هایی از فضاهای خطی به توی فضای چند-نرمی را بررسی می کنیم.

واژگان کلیدی: معادله تابعی جمعی کشی، پایداری هایرز-اولام-راسیاس، فضای چند-نرمی.

فهرست مطالب

و

پیشگفتار

یکی از مسائل مهمی که در رابطه با معادلات تابعی مطرح می شود، پایداری این گونه معادلات است. اولین مسئله پایداری توسط ریاضیدانی به نام اولام [1] در سال ۱۹۴۰ مطرح شد و به دنبال آن ریاضیدانان متعددی به بررسی این موضوع پرداخته اند. از جمله هایرز[2] که در سال۱۹۴۱ قضیه پایداری معادله تابعی کشی در فضاهای باناخ را ارائه کرد.

سپس راسیاس[3] در سال ۱۹۷۸ تعمیمی از این قضیه را بیان کرد که در نهایت منجر به قضیه ای موسوم به قضیه پایداری هایرز-اولام-راسیاس شد. قضیه راسیاس به صورت زیر است:

فرض کنیم E و F دو فضای باناخ باشند و $f: E \longrightarrow F$ یک تابع باشد. همچنین فرض کنیم $\epsilon > 0$ و $p \in [0, 1)$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x, y \in E$، f در معادله زیر صدق کند.

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leqslant \epsilon(\| x \|^p + \| y \|^p).$$

در این صورت نگاشت جمعی یکتای $g: E \longrightarrow F$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$،

$$\| f(x) - g(x) \| \leqslant \frac{2\epsilon}{2 - 2^p} \| x \|^p .$$

قضیه راسیاس برای $p > 1$ نیز برقرار است. اثبات قضیه در حالت $p > 1$ توسط گاجدا [4] در سال ۱۹۹۱ ارائه گردید. همچنین گاجدا با مثالی که در فصل دوم بیان می گردد، نشان داد که این قضیه در حالت $p = 1$ برقرار نیست.

در ادامه نیز موضوع پایداری در طی سال های متمادی توسط ریاضیدانان برای معادلات تابعی با شرایط مختلف در فضاهای گوناگون مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان نامه به بررسی پایداری معادله تابعی کشی در فضای چند-نرمی می پردازیم. فضای چند-نرمی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

---

[1] Ulam

[2] Hyers

[3] Th. M. Rassias

[4] Gajda

فرض کنیم $(E, \|\ .\ \|)$ یک فضای نرمدار باشد و $n \in \mathbb{N}$. یک چند-نرمی با مرتبه n روی

$$\{E^k : k \in \mathbb{N}_n\}$$

یک دنباله به صورت زیر است:

$$(\|\ .\ \|_k) = (\|\ .\ \|_k \colon k \in \mathbb{N}_n)$$

به طوریکه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $\|\ .\ \|_k$ روی E_k یک نرم است و برای هر $x \in E$، $\| x \|_۱ = \| x \|$ و برای $k \in \mathbb{N}_n \quad (k \geqslant ۲)$، اصول زیر برقرار باشد:

$$(A_۱)\ \ \forall \sigma \in \mathsf{G}_k, x \in E^k, \qquad \| A_\sigma(x) \|_k = \| x \|_k;$$

$$(A_۲)\ \ \forall \alpha_۱, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}, x \in E^k, \qquad \| M_\alpha(x) \|_k \leqslant (\max_{i \in \mathbb{N}_k} \mid \alpha_i \mid) \| x \|_k;$$

$$(A_۳)\ \ \forall x_۱, \ldots, x_{k-۱} \in E\ \ , \qquad \| (x_۱, \ldots, x_{k-۱}, ۰) \|_k = \| (x_۱, \ldots, x_{k-۱}) \|_{k-۱};$$

$$(A_۴)\ \ \forall x_۱, \ldots, x_{k-۱} \in E\ \ ,$$

$$\| (x_۱, \ldots, x_{k-۲}, x_{k-۱}, x_{k-۱}) \|_k = \| (x_۱, \ldots, x_{k-۲}, x_{k-۱}) \|_{k-۱}\ .$$

در این حالت گوییم $((E^k, \|\ .\ \|_k) : k \in \mathbb{N}_n)$ یک فضای چند-نرمی با مرتبه n است.

یک چند-نرمی روی $\{E^k : k \in \mathbb{N}\}$ یک دنباله به صورت $(\|\ .\ \|_k) = (\|\ .\ \|_k \colon k \in \mathbb{N})$ است به طوریکه برای هر $n \in N$، $(\|\ .\ \|_k \colon k \in \mathbb{N}_n)$ یک چند-نرمی با مرتبه n باشد.

در این حالت $((E^n, \|\ .\ \|_n) : n \in \mathbb{N})$یک فضای چند-نرمی نامیده می شود.

این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصول بعد از آنها استفاده می کنیم، می پردازیم.

در فصل دوم به بررسی قضیه پایداری هایرز-اولام-راسیاس در فضاهای باناخ پرداخته و برخی قضایای پایداری معادلات تابعی مطرح شده را بیان می کنیم که برهان آنها را می توانید در [۱۰] ببینید.

در فصل سوم با فضاهای چند-نرمی، چند-نرمی دوگان و باناخ چندگانه و ویژگی ها و مثال هایی از آنها آشنا می شویم.

و در نهایت در فصل چهارم بعد از آشنایی با عملگر کراندار چندگانه، به بررسی تعمیمی از قضیه پایداری هایرز-اولام- راسیاس در رابطه با معادله جمعی کشی برای نگاشت های از فضای خطی به توی فضاهای چند-نرمی می پردازیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ تابع جمعی کشی و برخی مقدمات

در این فصل به بیان قضایا و مفاهیمی که در فصول بعد از آن ها استفاده می کنیم، می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. معادله تابعی ، معادله ای است که در آن مجهول، تابع می باشد. به طورمثال معادلات

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

$$\vdots$$

معادلات تابعی هستند .

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند و $f:X\longrightarrow Y$ تابعی باشد که به ازای هر $x,y\in X$، در معادله

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

صدق کند. در این صورت f را یک تابع جمعی کشی گوییم.

معادله فوق موسوم به معادله تابعی جمعی کشی می باشد. این معادله ابتدا توسط لگندر[۱] در سال ۱۷۹۱ و گاوس [۲] در سال ۱۸۰۹ مورد بررسی قرار گرفت. اما کشی، [۳] جواب پیوسته کلی آن را یافت.

[۱]A. M. Legendre

[۲]G. F. Gauss

[۳]A. L. Cauchy

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را به طور گویا همگن گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$،

$$f(rx) = rf(x) \qquad (r \in \mathbb{Q})$$

که $\mathbb{Q}$، مجموعه اعداد گویا می باشد.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنیم X و Y فضاهای برداری و $f : X \longrightarrow Y$ جواب معادله جمعی*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱)$$

باشد. در این صورت f به طور گویا همگن است.

اثبات. از قرار دادن $x = y = ۰$ در رابطه (۱)، داریم $f(۰) = f(۰) + f(۰)$ پس

$$f(۰) = ۰ \qquad (۲)$$

از جایگذاری $y = -x$ در (۱) و استفاده از (۲) نتیجه می شود

$$f(-x) = -f(x) \qquad (x \in X) \qquad (۳)$$

بنابراین f فرد است. حال نشان می دهیم که هر جواب معادله جمعی (۱) به طور گویا همگن است.
به ازای هر x،

$$f(۲x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = ۲f(x)$$

به استقرا روی هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$f(nx) = nf(x) \qquad (۴)$$

به همین ترتیب اگر n عدد صحیح منفی باشد آنگاه $-n$ عدد صحیح مثبت است و بنا به حالت قبل داریم

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(-(-n)x) \\ &= -f(-nx) \\ &= -(-n)f(x) \\ &= nf(x) \end{aligned}$$

پس به ازای هر عدد صحیح n و هر $x \in X$، $f(nx) = nf(x)$.
حال فرض کنیم r عدد گویای دلخواهی باشد. قرار می دهیم $r = \frac{k}{l}$ که k عدد صحیح و l عدد طبیعی است. بعلاوه $kx = l(rx)$. چون f برای هر عدد صحیح همگن است، پس

$$kf(x) = f(kx) = f(l(rx)) = lf(rx)$$

در نتیجه

$$f(rx)=\frac{k}{l}f(x)=rf(x)$$

بنابراین f به طور گویا همگن است. $\square$

قضیه ۱.۱.۵. *فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند و $f:X\longrightarrow Y$ جواب معادله تابعی جمعی کشی زیر باشد.*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

اگر f در یک نقطه پیوسته باشد، آنگاه درهر نقطه پیوسته است.

اثبات. فرض کنیم f در نقطه t پیوسته باشد و x نقطه دلخواه باشد. نشان می دهیم که f در x پیوسته است.

$$\begin{aligned}\lim_{y\longrightarrow x}f(y)&=\lim_{y\longrightarrow x}f(y-x+x-t+t)\\&=\lim_{y\longrightarrow x}[f(y-x+t)+f(x-t)]\\&=\lim_{y\longrightarrow x}f(y-x+t)+\lim_{y\longrightarrow x}f(x-t)\\&=f(t)+f(x-t)\\&=f(t)+f(x)-f(t)\\&=f(x).\end{aligned}$$

چون x دلخواه بود، پس f در هر نقطه پیوسته است. $\square$

تعریف ۱.۱.۶. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع خطی نامیده می شود، اگر و تنها اگر برای یک مقدار ثابت c و هر $x\in\mathbb{R}$، تابع f به صورت $f(x)=cx$ باشد.

تعریف ۱.۱.۷. فرض کنیم X فضای برداری روی میدان F باشد. تابع $\|\cdot\|:X\longrightarrow[0,\infty)$ را یک نرم بر X گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

$$1)\quad \|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0 \qquad (x\in X),$$

$$2)\quad \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\| \qquad (x\in X,\lambda\in F),$$

$$3)\quad \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \qquad (x,y\in X).$$

فضای برداری X همراه با یک نرم را فضای نرم دار می نامیم.

تعریف ۱.۱.۸. فضای نرم دار کامل را فضای باناخ گوییم. به عبارت دیگر فضای نرم داری را که در آن هر دنباله کشی همگرا باشد، فضای باناخ گوییم.

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار حقیقی باشند و $f : X \longrightarrow Y$ تابع جمعی کشی پیوسته باشد. در این صورت f خطی است.*

اثبات. چون اعداد گویا در $\mathbb{R}$ چگالند، لذا برای هر $t \in \mathbb{R}$ دنباله $\{r_n\}$ از اعداد گویا وجود دارد که اگر $n \longrightarrow \infty$، آنگاه $r_n \longrightarrow t$. بنابراین

$$f(tx) = f(\lim_{n \longrightarrow \infty} r_n x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(r_n x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} r_n f(x) = tf(x).$$

□

قضیه ۱۰.۱.۱. *اگر تابع جمعی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در بازه $[a, b]$ کراندار باشد، آنگاه خطی است .*

اثبات. از آنجا که f در بازه $[a, b]$ کراندار است، $M > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\forall x \in [a, b]; \quad | f(x) | \leqslant M.$$

اگر $x \in [۰, b - a]$، در این صورت $x + a \in [a, b]$. از طرفی

$$f(x) = f(x + a) - f(a).$$

در نتیجه

$$| f(x) | \leqslant M + | f(a) | .$$

فرض کنیم $\alpha = b - a$، در این صورت f روی $[۰, \alpha]$ کراندار است. قرار می دهیم

$$m = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \quad , \quad \varphi(x) = f(x) - mx; \quad (x \in \mathbb{R})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= f(x + y) - m(x + y) \\ &= f(x) + f(y) - mx - my \\ &= f(x) - mx + f(y) - my \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

در این صورت φ جمعی است. همچنین

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - m\alpha = ۰,$$

پس

$$\varphi(x + \alpha) = \varphi(x) + \varphi(\alpha) = \varphi(x); \quad (x \in \mathbb{R}).$$

لذا φ تابع متناوب روی $\mathbb{R}$ با دوره تناوب α است. φ تفاضل دو تابع کراندار روی $[0,\alpha]$ است. پس روی این بازه و چون متناوب است، روی $\mathbb{R}$ نیز کراندار است.

در نتیجه φ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است زیرا به برهان خلف فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(x_0) \neq 0$. φ جمعی است پس به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\varphi(nx_0) = n\varphi(x_0)$$

از آنجا که φ روی $\mathbb{R}$ کراندار است، $M > 0$ وجود دارد به طوری که $n\varphi(x_0) \leqslant M$. پس

$$n \leqslant \frac{M}{\varphi(x_0)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

که با کراندار نبودن اعداد طبیعی از بالا متناقض است. بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = mx$. □

قضیه ۱۱.۱.۱. *گراف هر تابع جمعی غیر خطی در $\mathbb{R}^2$ چگال است.*

اثبات. فرض کنیم f تابع غیر خطی جمعی باشد. همچنین فرض کنیم مجموعه

$$G = \{(x,y)|\ x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$$

گراف تابع f باشد. عدد حقیقی ناصفر x_1 را انتخاب می کنیم. چون f تابع غیر خطی جمعی است، پس عدد حقیق ناصفر x_2 وجود دارد که

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}$$

در غیر این صورت با قرار دادن $c = \frac{f(x_1)}{x_1}$ و $x_2 = x$ به ازای هر $x \neq 0$، خواهیم داشت

$$f(x) = cx.$$

پس f خطی است که این با فرض ما متناقض است. لذا

$$det \begin{pmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

بنابراین بردارهای $\vec{v}_1 = (x_1, f(x_1))$ و $\vec{v}_2 = (x_2, f(x_2))$ مستقل خطی هستند و در نتیجه تمام صفحه $\mathbb{R}^2$ را تولید می کنند؛ یعنی به ازای هر بردار $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ اعداد حقیقی r_1 و r_2 وجود دارند به طوری که

$$\vec{v} = r_1\vec{v_1} + r_2\vec{v_2}$$

حال اگر ρ_1 و ρ_2 اعداد گویا باشند، آنگاه $\rho_1\vec{v_1} + \rho_2\vec{v_2}$ به دلخواه نزدیک بردار $\vec{v}$ است زیرا $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال و در نتیجه $\mathbb{Q}^2$ در $\mathbb{R}^2$ چگال است. اکنون داریم

$$\begin{aligned}\rho_1\vec{v_1} + \rho_2\vec{v_2} &= \rho_1(x_1, f(x_1)) + \rho_2(x_2, f(x_2)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, \rho_1 f(x_1) + \rho_2 f(x_1)) \\ &= (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2, f(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_1)).\end{aligned}$$

بنابراین مجموعه

$$\hat{G} = \{(x,y) \mid x = \rho_۱ x_۱ + \rho_۲ x_۲, \ \ y = f(\rho_۱ x_۱ + \rho_۲ x_۱), \rho_۱, \rho_۲ \in \mathbb{Q}\}$$

در $\mathbb{R}^۲$ چگال است. از آنجا که

$$\hat{G} \subset G,$$

پس گراف هر تابع غیر خطی جمعی f، در $\mathbb{R}^۲$ چگال است و برهان کامل می شود. $\square$

در ادامه مفهوم پایه هامل را بیان می کنیم که به کمک آن می توان نگاشت جمعی غیر خطی را ساخت.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم S مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد و $B \subset S$. مجموعه B را یک پایه هامل برای S گوییم اگر هر عضو S یک ترکیب خطی گویا و یکتا از B باشد.

به طور مثال $\{۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}\}$ یک پایه هامل برای

$$S = \{s \in \mathbb{R}; s = a + b\sqrt{۲} + c\sqrt{۳} : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

است.

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم B پایه هامل برای $\mathbb{R}$ باشد. اگر دو نگاشت جمعی در هر نقطه از B دارای مقدارهای برابر باشند، آنگاه این دو نگاشت مساویند.*

اثبات. فرض کنیم $f_۱$ و $f_۲$ دو نگاشت جمعی باشند که در هر نقطه از B دارای مقدارهای برابر هستند. فرض کنیم x عدد حقیقی دلخواه باشد. بنابراین اعداد $b_۱, \dots, b_n$ در B و اعداد گویای $r_۱, \dots, r_n$ چنان وجود دارند که

$$x = r_۱ b_۱ + \ldots + r_n b_n$$

قرار می دهیم $f = f_۱ - f_۲$. بنابراین

$$\begin{aligned} f_۱(x) - f_۲(x) &= f(x) \\ &= f(r_۱ b_۱ + \ldots + r_n b_n) \\ &= f(r_۱ b_۱) + \ldots + f(r_n b_n) \\ &= r_۱ f(b_۱) + \ldots + r_n f(b_n) \\ &= r_۱[f_۱(b_۱) - f_۲(b_۱)] + \ldots + r_n[f_۱(b_n) - f_۲(b_n)] \\ &= ۰. \end{aligned}$$

در نتیجه $f_۱ = f_۲$. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم B پایه هامل برای $\mathbb{R}$ و $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. در این صورت تابع جمعی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که برای هر $b \in B$، $f(b) = g(b)$.*

اثبات. برای هر عدد حقیقی دلخواه x، اعداد $b_1, \ldots, b_n$ در B و اعداد گویای $r_1, \ldots, r_n$ چنان وجود دارند که

$$x = r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n$$

تعریف می کنیم

$$f(x) = r_1 g(b_1) + \ldots + r_n g(b_n)$$

بنابراین برای هر $b \in B$، داریم

$$f(b) = g(b).$$

حال نشان می دهیم f روی اعداد حقیقی، جمعی است.

فرض کنیم x و y اعداد حقیقی دلخواه باشند. داریم

$$x = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n$$

و

$$y = s_1 b_1 + \ldots + s_m b_m$$

که $r_1, \ldots, r_n$ و $s_1, \ldots, s_m$ اعداد گویا و $a_1, \ldots, a_n$ و $b_1, \ldots, b_m$ اعضای پایه هامل می باشند. فرض کنیم $\{c_1, \ldots, c_l\}$ اجتماع دو مجموعه $\{a_1, \ldots, a_n\}$ و $\{b_1, \ldots, b_m\}$ باشد. بنابراین $l \leqslant m + n$،

$$x = u_1 c_1 + \ldots + u_l c_l$$

و

$$y = v_1 c_1 + \ldots + v_l c_l$$

که $u_1, \ldots, u_l$ و $v_1, \ldots, v_l$ اعداد گویا می باشند و تعدادی از این اعداد ممکن است صفر باشند. لذا

$$x + y = (u_1 + v_1)c_1 + \ldots + (u_l + v_l)c_l$$

و

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f((u_1 + v_1)c_1 + \ldots + (u_l + v_l)c_l) \\ &= (u_1 + v_1)g(c_1) + \ldots + (u_l + v_l)g(c_l) \\ &= [u_1 g(c_1) + \ldots + u_l g(c_l)] + [v_1 g(c_1) + \ldots + v_l g(c_l)] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

بنابراین f روی اعداد حقیقی، جمعی است. $\square$

اکنون می توانیم با کمک پایه هامل نگاشت جمعی غیر خطی بسازیم. فرض کنیم B یک پایه هامل برای $\mathbb{R}$ باشد. همچنین فرض کنیم b عضو دلخواه از B باشد.

تعریف می کنیم

$$g(x) = \begin{cases} ۰ & , x \in B - \{b\} \\ ۱ & , x = b \end{cases}$$

بنا به قضیه قبل تابع جمعی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان وجود دارد که برای هر $b \in B$، $f(b) = g(b)$. بنابراین برای هر $x \in B$ و $x \neq b$، داریم

$$۰ = \frac{f(x)}{x} \neq \frac{f(b)}{b}$$

بنابراین f غیر خطی است.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری روی میدان F باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی است اگر

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \qquad (x, y \in X \ , \ \lambda, \mu \in F).$$

- فرض کنیم E و F دو فضای خطی باشند، فضای خطی تمام عملگرهای خطی از E به F را با $L(E, F)$ نشان می دهیم. هم چنین $L(E) = L(E, E)$.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم X و Y و Z فضاهای نرمدار خطی روی میدان F باشند. نگاشت φ از $X \times Y$ به Z را نگاشت دوخطی گوییم هرگاه

۱) برای هر $x \in X$، نگاشت $x \mapsto \varphi(x, y)$ خطی باشد.

۲) برای هر $y \in Y$، نگاشت $y \mapsto \varphi(x, y)$ خطی باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. نگاشت دوخطی $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ کراندار است اگر $M > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\| \varphi(x, y) \| \leqslant M \| x \| \| y \| \qquad (x \in X, y \in Y).$$

تعریف ۱.۱.۱۸. نرم نگاشت دوخطی $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\| \varphi \| = \sup\{ \| \varphi(x, y) \| \ ; \ \| x \| \leqslant ۱ \ , \ \| y \| \leqslant ۱ \}.$$

- مجموعه همه نگاشت های دو خطی کراندار از $X \times Y$ به توی Z را با $BL(X, Y; Z)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم E فضای برداری باشد. فضای شامل همه تابعک های خطی پیوسته روی X (نگاشت های خطی پیوسته به صورت $f : X \longrightarrow F$) را فضای دوگان X گوییم.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار روی میدان F با فضاهای دوگان X' و Y' باشند و $x \in X$ و $y \in Y$. عنصر $x \otimes y$ از $BL(X', Y'; F)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$x \otimes y(f, g) = f(x)g(y) \quad (f \in X', g \in Y').$$

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار روی میدان F با فضاهای دوگان X' و Y' باشند و $x \in X$ و $y \in Y$. زیر فضای خطی تولید شده توسط $x \otimes y$ از $BL(X', Y'; F)$ را ضرب تنسوری جبری X و Y گوییم که با $X \otimes Y$ نشان می دهیم.

برخی خواص ضرب تنسوری را در قالب لم در ادامه بیان می کنیم که اثبات آنها را در صفحه ۲۳۱ از [۵] می توانید ببینید.

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم $u \in X \otimes Y$، در این صورت مجموعه های مستقل خطی $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ وجود دارند به طوری که $u = \sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i$.*

لم ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم $\sum_{i=۱}^{n} x_i \otimes y_i = ۰$ که $\{x_i\}$ مجموعه مستقل خطی است. در این صورت*

$$y_i = ۰ \quad (i = ۱, ۲, \ldots).$$

لم ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم $\{x_۱, \ldots, x_m\}$ و $\{y_۱, \ldots, y_n\}$ زیرمجموعه های مستقل خطی فضاهای به ترتیب X و Y باشند، در این صورت $\{x_i \otimes y_j \ ; \ i = ۱, \ldots, m \ , \ j = ۱, \ldots, n\}$ زیرمجموعه مستقل خطی $X \otimes Y$ می باشد.*

قضیه ۲۵.۱.۱. ***قضیه جهانی تنسور***

فرض کنیم $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ نگاشت دو خطی باشد. در این صورت نگاشت خطی یکتای

$$\sigma : X \otimes Y \longrightarrow Z$$

وجود دارد به طوری که

$$\sigma(x \otimes y) = \varphi(x, y) \quad (x \in X, x \in Y).$$

اثبات. به صفحه ۲۳۲ از [۵] مراجعه شود. □

تعریف ۲۶.۱.۱. نگاشت $J : X \longrightarrow X$ را اکیدا انقباضی گوییم هرگاه ثابت لیپشیتز $۰ \leqslant L < ۱$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$،

$$d(Jx, Jy) \leqslant Ld(x, y).$$

قضیه ۲۷.۱.۱. ***قضیه نقطه ثابت (اصل انقباضی باناخ)***

فرض کنیم (X, d) فضای متریک کامل و $A : X \longrightarrow X$ نگاشت انقباضی با ثابت لیپشیتز $۰ \leqslant L < ۱$ باشد. در این صورت

۱) A دقیقا دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد است. به عبارت دیگر نقطه یکتای $x^\star \in X$ وجود دارد به طوری که $A(x^\star) = x^\star$.

۲) برای هر $x \in X$ و $n \geqslant ۰$، $\lim_{n\longrightarrow\infty} A^n(x) = x^\star$.

۳) برای هر $x \in X$ و $n \geqslant ۰$، $d(A^n x, x^\star) \leqslant L^n d(x, x^\star)$.

۴) برای هر $x \in X$ و $n \geqslant ۰$، $d(A^n x, x^\star) \leqslant \frac{۱}{۱-L} d(A^n x, A^{n+۱}x)$.

۵) برای هر $x \in X$، $\forall x \in X \ ; \ d(x, x^\star) \leqslant \frac{۱}{۱-L} d(x, Ax)$.

اثبات. فرض کنیم $x_۰ \in X$ دلخواه و ثابت باشد. دنباله $\{x_n\}$ را به صورت $x_n = A^n(x_۰)$ تعریف می کنیم.
$x_۱ = A(x_۰), \ldots, x_n = A(x_{n-۱}) = A^n(x_۰)$

به استقرا و با توجه به انقباضی بودن A، داریم

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ d(x_{n+۱}, x_n) \leqslant L^n d(x_۱, x_۰).$$

حال نشان می دهیم که دنباله $\{x_n\}$، دنباله ای کشی است. فرض کنیم $\epsilon > ۰$. از آن جا که $۰ < L < ۱$، پس

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} L^n = ۰$$

بنابراین

$$\exists N \ , \ \ n \geqslant N \ ; \ L^n \leqslant \epsilon \frac{۱-L}{d(x_۱, x_۰)}.$$

برای $m > n \geqslant N$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m-۱}) + \ldots + d(x_{n+۲}, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x_n) \\ &\leqslant L^{m-۱} d(x_۱, x_۰) + \ldots + L^n d(x_۱, x_۰) \\ &= d(x_۱, x_۰)(L^n + L^{n+۱} + \ldots + L^{m-۱}) \\ &\leqslant L^n d(x_۱, x_۰)(۱ + L + L^۲ + \ldots + L^{m-۱-n}) \\ &\leqslant d(x_۱, x_۰) \frac{L^n}{۱-L} \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}$ در X کشی است. از آنجا که X فضای متریک کامل است پس $\{x_n\}$ همگرا به نقطه ای از X مانند $x^\star$ است.

$$x^\star = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} A^n(x_۰),$$

A پیوسته است. پس

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n+۱} = \lim_{n\longrightarrow\infty} A x_n = A x^\star.$$