بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، (گرایش تحقیق در عملیات)

بدست آوردن مسیرهای بهینه روی یک شبکه درختی

استاد راهنما:

دکتر مهدی زعفرانیه

استاد مشاور:

دکتر محمود امین طوسی

پژوهشگر:

مهناز ابارشی

مهر ۱۳۹۲

دانشگاه حکیم سبزواری

سوگند نامه دانش‌آموختگان دانشگاه حکیم سبزواری

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه بر نگذرد

اینک که به خواست آفریدگار پاک، کوشش خویش و بهره‌گیری از دانش استادان و سرمایه‌های مادی و معنوی این مرز و بوم، توشه‌ای از دانش و خرد گرد آورده‌ام، در پیشگاه خداوند بزرگ سوگند یاد می‌کنم که در به کارگیری دانش خویش، همواره بر راه راست و درست گام بردارم. خداوند بزرگ، شما شاهدان، دانشجویان و دیگر حاضران را به عنوان داورانی امین گواه می‌گیرم که از همه دانش و توان خود برای گسترش مرزهای دانش بهره گیرم و از هیچ کوششی برای تبدیل جهان به جایی بهتر برای زیستن، دریغ نورزم. پیمان می‌بندم که همواره کرامت انسانی را درنظر داشته باشم و همنوعان خود را در هر زمان و مکان تا سر حد امکان یاری دهم. سوگند می‌خورم که در به کارگیری دانش خویش به کاری که با راه و رسم انسانی، آیین پرهیزگاری، شرافت و اصول اخلاقی برخاسته از ادیان بزرگ الهی، به ویژه دین مبین اسلام، مباینت دارد دست نیازم. همچنین در سایه اصول جهان شمول انسانی و اسلامی، پیمان می‌بندم از هیچ کوششی برای آبادانی و سرافرازی میهن و هم‌میهنانم فروگذاری نکنم و خداوند بزرگ را به یاری طلبم تا همواره در پیشگاه او و در برابر وجدان بیدار خویش و ملت سرافراز، بر این پیمان تا ابد استوار بمانم.

تأییدیه صحت و اصالت نتایج

بسمه تعالی

اینجانب مهناز ابارشی به شماره دانشجویی ۹۰۲۳۱۳۳۰۲۱ رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد تأیید می‌نمایم که کلیه نتایج این پایان‌نامه حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف و موارد نسخه برداری شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. در صورت اثبات خلاف مندرجات فوق به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مولفان و منصفان، قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی ضوابط و مقررات آموزشی پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد و حق هرگونه اعتراض درخصوص احقاق حقوق مکتسب و تشخیص و تعیین تخلف و مجازات را از خویش سلب می‌نمایم. در ضمن مسئولیت هرگونه پاسخ‌گویی به اشخاص اعم از حقیقی و حقوقی و مراجع ذی صلاح (اعم از اداری و قضایی) به عهده اینجانب خواهد بود و دانشگاه هیچ گونه مسئولیتی در این خصوص نخواهد داشت.

نام و نام خانوادگی: مهناز ابارشی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره برداری از این پایان‌نامه در چهار چوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود بلامانع است:

- بهره برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما بلامانع است.
- بهره برداری از این پایان نامه تا تاریخ ..... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر مهدی زعفرانیه

تاریخ:

امضا:

⋆ تقدیم به او که هرچه داریم از اوست ⋆

تقدیم به

⋆ پدر و مادرم ⋆

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم.

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گذاردن نتوانند و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است، و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز.....
بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم.
اما از آنجایی که تجلیل از مقام معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند تضمین، لذا وظیفه خود می‌دانم که:

از **پدر و مادر عزیزم** ... این دو معلم بزررگوار... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم‌داشت برای من بوده‌اند؛

از استاد با کمالات و شایسته، **جناب آقای دکتر مهدی زعفرانیه** که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و با تقوا، **جناب آقای دکتر محمود امین طوسی** که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند؛

و از استاد فرزانه و دلسوز، **جناب آقای دکتر سید ابوالفضل علوی** که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، کمال تشکر و قدر دانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

در خاتمه از **خواهران عزیزم** که در طول این مدت همواره متحمل زحماتم بودند و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات و وجودشان مایه دلگرمی من، صمیمانه سپاس گزارم.

مهناز ابارشی

مهر ۹۲

فرم چکیده پایان نامه دوره تحصیلات تکمیلی
دفتر تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی: ابارشی	**نام:** مهناز	**ش دانشجویی:** ۹۰۲۳۱۳۳۰۲۱
استاد راهنما: دکتر مهدی زعفرانیه	**استاد مشاور:**دکتر محمود امین طوسی	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی کاربردی	**گرایش:** تحقیق در عملیات
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۹۲/۷/۱۴	**تعداد صفحه:** ۸۵

عنوان پایان‌نامه: بدست آوردن مسیرهای بهینه روی یک شبکه درختی

کلید واژه‌ها: مکان‌یابی ، مسیر میانه، مسیر مرکزی، مسیر میانه مرکزی، مسیر میانه درختی

چکیده:
مسائل مکان‌یابی یکی از مباحث بسیار مهم و کاربردی در حوزه مدیریت خدمات است. بسیاری از مراکز دولتی و غیر دولتی برای انجام پروژه‌های اجرایی خود از علم مکان‌یابی استفاده می‌کنند. برای مثال ساختن یک بیمارستان و یا یک کارخانه در مرحله اول نیازمند تعیین مکان ساخت است. همچنین تعیین مسیر عبور شبکه فاضلاب شهری یا شبکه‌های حمل و نقل مانند مترو در زمره مسائل مکان‌یابی قرار می‌گیرند. در این‌گونه مسائل هدف تعیین مسیری است که تا حد امکان کم‌ترین فاصله ممکن را تا مشتری‌های موجود داشته باشد. مسائل مکان‌یابی شبکه در حقیقت مطالعه چگونگی قرار دادن یک یا چند سرویس‌دهنده و یا مسیر عبور یک سرویس‌دهنده در یک شبکه است به گونه‌ای که مشتری‌های موجود را به بهترین شکل سرویس‌دهی کند. در این پایان‌نامه چهار نوع مسئله مکان‌یابی تحت عنوان مسائل مسیر میانه، مسیر مرکزی، مسیر میانه مرکزی و مسیر میانه درختی را در یک شبکه با یال‌ها و رئوس وزن‌دار و غیر وزن‌دار بررسی می‌کنیم. در مسئله مسیر میانه، هدف پیدا کردن کوتاهترین مسیری است که مجموع فاصله وزنی رئوس شبکه از آن کمترین مقدار ممکن باشد. در مسئله مسیر مرکزی هدف پیدا کردن مکان بهینه مسیر به‌گونه‌ای است که حداکثر فاصله مشتری‌ها از آن کمترین مقدار ممکن باشد. در مسئله مسیر میانه مرکزی، هدف پیدا کردن محل بهینه یک مسیر با استفاده از ترکیب معیارهای بیشینه فاصله و میانگین فاصله مشتری‌ها از سرویس‌دهنده‌ها است. در مسئله مسیر میانه درختی هدف پیدا کردن زیر درختی با k برگ و طول حداکثر l است به گونه‌ای که مجموع فاصله وزنی رئوس درخت تا آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمات و تعاریف ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ تاریخچه ۳

۱-۳ تعاریف مکان‌یابی ۴

فصل ۲ مسائل مسیر میانه، مسیر مرکزی و مسیر میانه مرکزی ۱۰

۲-۱ مقدمه و تاریخچه ۱۰

۲-۲ مسیر میانه(هسته) ۱۱

۲-۲-۱ معرفی ۱۱

۲-۲-۲ خواص مسأله مسیر میانه ۱۲

۲-۲-۳ الگوریتم مورگان و اسلیتر برای بدست آوردن مسیر میانه درخت ۱۳

۲-۲-۴ پیمایش‌های الگوریتم مورگان و اسلیتر ۱۶

۲-۲-۵ الگوریتم خطی $Peng$ برای پیدا کردن مسیر میانه درخت ۲۱

۲-۲-۶ عملیات برش درختی ۲۳

۲-۲-۷ عملیات به‌هنگام کردن ۲۳

۲-۲-۸ الگوریتم $Peng$ برای یافتن مسیر میانه درخت ۲۵

۲-۳ مرکز و مسیر مرکزی ۲۹

۲-۳-۱ مرکز ۳۰

۲-۳-۲ الگوریتم هندلر برای بدست آوردن مرکز درخت ۳۰

۲-۳-۳ مسیر مرکزی ۳۰

۲-۳-۴ الگوریتم مینیکا برای بدست آوردن مسیر مرکزی درخت ۳۱

۲-۴ مسیر میانه مرکزی ۳۳

۲-۴-۱ مقدمه ۳۳

۲-۴-۲ معرفی مسئله ۳۴

۲-۴-۳ الگوریتم $Berman$ برای یافتن مسیر میانه مرکزی درخت ۳۸
۲-۴-۴ الگوریتم $Averbakh$ برای یافتن مسیر میانه مرکزی درخت ۴۱

فصل ۳ هسته درختی با k برگ **۴۶**
۳-۱ مقدمه و تاریخچه ۴۶
۳-۲ فرمول‌بندی مسئله ۴۷
۳-۲-۱ الگوریتم بدست آوردن KTC به ازاء مقادیر ثابت K ۴۹
۳-۲-۲ روابط بین هسته و هسته درختی ۵۲
۳-۲-۳ الگوریتم بدست آوردن KTC به ازاء مقادیر بزرگ K ۵۴

فصل ۴ هسته درختی با k برگ و طول مقید l **۵۸**
۴-۱ مقدمه و تاریخچه ۵۸
۴-۲ مدل‌بندی مسئله ۵۸
۴-۲-۱ الگوریتم $Beker$ برای پیدا کردن $(k,l)-treecore$ در یک درخت بی‌وزن . ۶۱
۴-۲-۲ عملیات هرس کردن در درخت‌های بی‌وزن ۶۳
۴-۲-۳ الگوریتم یافتن $(k,l)-core$ در یک درخت وزن‌دار ۷۰
۴-۲-۴ عملیات هرس کردن در درخت‌های وزن‌دار ۷۱

نتیجه‌گیری و پیشنهادات **۷۹**

مراجع **۸۱**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۸۴**

فهرست جداول

۲-۱ نتایج گام‌های الگوریتم MS . . . ۲۱
۲-۲ نتایج عملیات برش درختی در تکرار اول . . . ۲۷
۲-۳ نتایج عملیات برش درختی در تکرار دوم . . . ۲۸
۲-۴ نتایج عملیات برش درختی در تکرار سوم . . . ۲۸

۳-۱ مقادیر $DSAV$ برای رئوس درخت . . . ۵۱
۳-۲ مقادیر $DSAV$ برای رئوس درخت . . . ۵۲
۳-۳ مقادیر ds برای برگ‌های درخت . . . ۵۶
۳-۴ مقادیر $head(l)$ برای برگ‌های درخت . . . ۵۶
۳-۵ مقادیر ds برای رئوس درخت . . . ۵۷

۴-۱ وزن رئوس درخت در گام ۱ . . . ۶۵
۴-۲ مجموع وزنی رئوس در درخت $\widehat{T}_v^{۳}$ . . . ۶۵
۴-۳ $sav(۳, P_{۳,i})$ . . . ۶۶
۴-۴ وزن رئوس درخت در گام ۲ . . . ۶۶
۴-۵ مجموع وزنی رئوس در درخت $\widehat{T}_v^{۴}$ . . . ۶۷
۴-۶ $sav(۴, P_{۴,i})$ . . . ۶۷
۴-۷ وزن رئوس درخت در گام ۳ . . . ۶۷
۴-۸ مجموع وزنی رئوس در درخت $\widehat{T}_v^{۵}$ . . . ۶۸
۴-۹ $sav(۵, P_{۵,i})$ . . . ۶۸
۴-۱۰ وزن رئوس درخت در گام ۴ . . . ۶۹
۴-۱۱ مجموع وزنی رئوس در درخت $\widehat{T}_v^{۱۲}$ . . . ۶۹
۴-۱۲ $sav(۱۲, P_{۱۲,i})$ . . . ۷۰
۴-۱۳ وزن رئوس درخت مثال ۲۷ . . . ۷۴
۴-۱۴ مقادیر $sav(۱۰, P_{۱۰,i})$ برای رئوس درخت . . . ۷۵

فهرست اشکال

۱-۱ مثال یافتن v-شاخه در یک درخت ۵
۱-۲ شاخه داخلی $B(v_۴, v_۸)$ ۶
۱-۳ مثال تعیین رأس بحرانی برای یک مسیر ۷

۲-۱ مسیر میانه درخت ۱۲
۲-۲ مثال هسته‌های متفاوت ۱۳
۲-۳ لیست رئوس بعدی و مجاور ۱۴
۲-۴ پیدا کردن مسیر میانه درخت با استفاده از الگوریتم MS ۲۰
۲-۵ درخت ریشه‌دار شده ۲۲
۲-۶ مثال هسته درخت ۲۷
۲-۷ یافتن مرکز و مسیر مرکزی ۳۲
۲-۸ مثال رأس بحرانی ۳۶
۲-۹ مسیر میانه مرکزی ۴۳

۳-۱ فاصله از رأس ۴۷
۳-۲ هسته درختی ۵۱
۳-۳ هسته درختی با ۴ برگ ۵۷

۴-۱ مثال یافتن $core - (۲, ۴)$ در یک درخت ۶۲
۴-۲ مثال یافتن $core - (۳, ۴)$ در یک درخت ۶۴
۴-۳ درخت هرس شده $\widehat{T}^{۳}$ ۶۵
۴-۴ درخت هرس شده $\widehat{T}^{۴}$ ۶۶
۴-۵ درخت هرس شده $\widehat{T}^{۵}$ ۶۸
۴-۶ درخت هرس شده $\widehat{T}^{۱۲}$ ۶۹
۴-۷ $core - (۳, ۴)$ ۷۰
۴-۸ مثال یافتن $core - (۴, ۵)$ در یک درخت وزن‌دار ۷۳

۴-۹ درخت ریشه‌دار شده در رأس $v_{۱۰}$ ۷۴
۴-۱۰ $S'_{۱}$ ۷۵
۴-۱۱ $S'_{۲}$ ۷۵
۴-۱۲ $S'_{۳}$ ۷۶
۴-۱۳ $S'_{۴}$ ۷۶
۴-۱۴ $S'_{۵}$ ۷۷
۴-۱۵ $S'_{۶}$ ۷۷
۴-۱۶ $S'_{۷}$ ۷۸
۴-۱۷ $S'_{۸}$ ۷۸

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

۱-۱ مقدمه

فرض کنیم یک مجموعه از مشتری‌ها در یک ناحیه جغرافیایی قرار دارند و هرکدام از آن‌ها میزان تقاضایی دارند که باید برآورده شود. همانطور که چرچ و رول [۵] متذکر شده‌اند یک روش مهم برای سنجش بهینگی مکان یک سرویس‌دهنده بررسی مسافتی است که مشتری‌ها برای دسترسی به آن طی می‌کنند. وقتی که این مسافت افزایش می‌یابد دسترسی به سرویس‌دهنده سخت می‌شود و بهینگی از دست می‌رود. لذا هدف ما در مسائل مکان‌یابی در حالت کلی تعیین موقعیت یک و یا گاهی چند سرویس‌دهنده در این ناحیه است، به‌گونه‌ای که تابع خاصی از فاصله بین سرویس‌دهنده و نقاط تقاضا را بهینه کند. به‌عنوان مثالی از این سرویس‌دهنده‌ها می‌توان به طراحی مسیر حرکت شهری، خیابان‌های داخل شهر یا جاده‌های برون‌شهری و مسیر لوله‌های آب و فاضلاب اشاره کرد.

در مسئله P-میانه که توسط حکیمی [۸] معرفی شد هدف تعیین مکان قرار دادن یک و یا گاهی چند سرویس‌دهنده مطلوب روی شبکه است به گونه‌ای که مجموع فواصل وزنی نقاط تقاضا تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به آن‌ها حدأقل شود. یکی دیگر از مهم‌ترین مسائل مکان‌یابی شبکه، مسئله پیدا کردن مسیر میانه (هسته) است که در این مسأله هدف پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیری است که مجموع فواصل وزنی رئوس شبکه از آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد. در نتیجه با واقع کردن یک سرویس‌دهنده بر روی آن دسترسی مشتری‌ها به سرویس‌دهنده تا حد امکان تسهیل می‌شود. در واقع بر خلاف مسئله P-میانه که سرویس‌دهنده‌ها بر روی چند نقطه جدا از هم قرار می‌گیرند در مسئله هسته سرویس دهنده یک مجموعه پیوسته است که بر روی یک

مسیر قرار می‌گیرد.

گاهی در حل مسائل مکان‌یابی، هدف تسهیل دسترسی مشتری‌هایی است که در فاصله زیادی از سرویس‌دهنده‌ها قرار دارند. این نوع مسئله مکان‌یابی عبارت است از پیدا کردن مکان بهینه مسیر به‌گونه‌ای که حداکثر فاصله مشتری‌ها از آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد و چنین مسیری را مسیرمرکزی می‌نامیم. این مسئله در سال ۱۹۸۱ توسط کوکاینه و همکارانش [۱۳] بررسی شد و آن‌ها توانستند الگوریتمی برای حل آن ارائه دهند. همچنین در سال ۱۹۸۲ اسلیتر [۲۰] نیز توانست الگوریتم خطی برای حل آن ارائه دهد .

دو معیار اصلی که اغلب در تئوری مکان‌یابی شبکه برای تعیین محل بهینه یک وسیله مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت است از بیشینه فاصله بین وسیله تا مشتری‌ها و میانگین فاصله بین وسیله و مشتری‌های مورد نظر. نوع دیگری از مسائل مکان‌یابی که به آن پرداخته شده، پیدا کردن محل بهینه یک مسیر با استفاده از ترکیب معیارهای ماکزیمم فاصله و میانگین فاصله مشتری‌ها از سرویس‌دهنده‌ها است. چنین مسیری،مسیر میانه مرکزی نام دارد. این مسئله در سال ۱۹۹۹ توسط برمن و اورباخ [۲] بررسی شد و آن‌ها توانستند الگوریتم‌هایی با مرتبه‌های زمانی مختلف برای حل آن ارائه دهند. . در واقع این مسئله ترکیبی از مسائل مسیر میانه و مسیر مرکزی است. به عنوان مثالی از چنین مسئله‌ای می‌توان به طراحی مسیر خط‌های ریل راه آهن، مسیر راه‌هایی هوایی، مسیر خط‌های لوله آب و فاضلاب اشاره کرد.

مسئله هسته درختی نوع دیگری از مسائل مکان‌یابی شبکه است که در این نوع مسائل هدف پیدا کردن زیر درختی با دقیقاً k برگ است به‌گونه‌ای که مجموع فاصله رئوس شبکه تا آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد. این مسئله در سال ۱۹۹۳ توسط پنگ [۱۸] بررسی شد و او توانست الگوریتمی خطی برای حل آن ارائه دهد. نوع دیگری از مسئله هسته درختی نیز وجود دارد که در آن هدف پیدا کردن زیر درختی با دقیقاً k برگ و طول مقید l است. این مسئله در سال ۲۰۰۲ توسط بکر و همکارانش [۴] بررسی شد و آن‌ها توانستند دو الگوریتم با مرتبه‌های زمانی مختلف برای پیدا کردن آن ارائه دهند. این مسئله در طراحی شبکه‌های ارتباطی با سرعت بالا مانند شبکه‌های ایترنتی بسیار پرکاربرد است.

- ایده اصلی این پایان‌نامه از مقاله‌های زیر گرفته شده است.

-حبیب نیا زنده جان سمیه. مساله پیدا کردن هسته درخت[پایان نامه] .سبزوار: دانشگاه حکیم

سبزواری؛ ۱۳۸۷.

-Averbakh.I ,Berman.O. Algorithms for path medi center of a tree .Operation Research 1999; 26: 1395-1409.

-Beker .R, Lari.I , Storchi.G , Scozzari.A. Efficient algorithms for finding the (k,l)-core of tree networks. Operation research 2002; 40:208-215.

-Peng.S, Stephens.A.B, and Yesha.Y. Algorithms for a core and k-tree core of a tree. Operation Research 1993; 15: 143-159.

۱-۲ تاریخچه

مکان‌یابی یک مبحث مهم در علم مدیریت وتخصیص منابع است. مطالعات در علم مکان‌یابی مدرن رسماً در سال ۱۹۰۹ توسط آلفرد وبر [۱] [۲۱] آغاز شد. وی مسئله پیدا کردن مکان یک سرویس دهنده را که مجموع فاصله وزنی آن تا چند مشتری کم‌ترین مقدار ممکن است را مورد بررسی قرار داد. ایزفلد [۲] یک روش تکراری برای مسئله وبر در سال ۱۹۳۷ پیشنهاد کرد.

مکان‌یابی در سال ۱۹۶۴ تولد مجددی را توسط حکیمی [۳] [۷] تجربه کرد . حکیمی مسئله مکان‌یابی را برای پیدا کردن مکان گشت‌های پلیس در بزرگ‌راه‌ها و مناطق شهری مورد استفاده قرار داد. مورگان واسلیتر [۴] [۱۶] در سال ۱۹۸۰ الگوریتمی خطی برای آن ارائه دادند. همچنین حکیمی [۶] در سال ۱۹۹۳ نشان داد که پیدا کردن مسیر بر روی شبکه یک مسئله NP-سخت است.

لازم به ذکر است که برخی از محققین طبقه‌بندهایی از مدل‌های مکان‌یابی ارائه داده‌اند. اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکان‌یابی توسط هندلر [۵] و میرچندانی [۶] ارائه شد[۱۱] و پس از آن هاماخر [۷] و نیکل [۸] و هانسن [۹] مدل‌هایی را ارائه دادند[۹]. هندلر الگوریتمی برای پیدا کردن مرکز درخت ارائه داد[۱۰]. مسئله پیدا کردن مسیر مرکزی یک درخت را کوکاینه [۱۰] [۱۳] و همکاران در سال ۱۹۸۱ مورد بررسی قرار داده و الگوریتم خطی برای حل آن ارائه دادند. در سال ۱۹۸۲ نیز این مسئله توسط اسلیتر بررسی شد. همچنین در

[۱] $Weber$ [۲] $Weiszfeld$ [۳] $Hakimi$ [۴] $Morgan\ and\ Slater$ [۵] $Handler$ [۶] $Mirchandani$ [۷] $Hamacher$ [۸] $Nichel$ [۹] $Hansen$ [۱۰] $Cockayne$

سال ۱۹۹۰ بکر[۱] [۳] الگوریتمی برای پیدا کردن هسته درخت ارائه داد . در سال ۱۹۹۹ برمن و اورباخ[۲] [۲] روشی برای پیدا کردن مسیر میانه مرکزی یک درخت ارائه دادند.

مسئله هسته درختی در سال ۱۹۹۳ توسط پنگ[۳] [۱۸] معرفی شد و او الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(kn)$ برای پیدا کردن آن ارائه داد. همچنین این مسئله در سال ۱۹۹۷ توسط شئورا و اونو[۴] [۱۹] نیز بررسی شد و آن‌ها نیز الگوریتمی خطی برای یافتن آن ارائه دادند.

۱-۳ تعاریف مکان‌یابی

در این قسمت به معرفی مفاهیم و تعاریف اولیه می‌پردازیم که در سرتاسر این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۱. (شبکه[۵]) یک شبکه $G = (V, E)$ شامل یک جفت مجموعه مجزا مانند V شامل مجموعه رئوس[۶] شبکه و E مجموعه یال‌های[۷] شبکه است. وزن[۸] هر رأس $v \in V$ را با $w(v)$ نشان می‌دهیم . یال e_{ij} یالی است که رئوس v_i و v_j را به یکدیگر متصل می‌کند و طول[۹] آن را با $d(v_i, v_j)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۳-۲. (مسیر[۱۰]) به دنباله‌ای از رئوس غیر تکراری مانند $P : v_1, v_2, \cdots, v_n$ که توسط یال‌هایشان به یکدیگر متصل هستند مسیر می‌گوییم.

تعریف ۱-۳-۳. فاصله[۱۱] دو رأس u و v را با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم، که برابر با طول کوتاهترین مسیری است که این دو رأس را به هم متصل می‌کند.

تعریف ۱-۳-۴. (دور[۱۲]) مسیری است که ابتدا و انتهایش بر هم منطبق باشد.

تعریف ۱-۳-۵. (شبکه همبند[۱۳]) شبکه G را همبند می‌گوییم، اگر بین هر دو رأس متمایزش حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱-۳-۶. (درخت[۱۴]) شبکه همبند G را که فاقد دور باشد، درخت گوییم.

تعریف ۱-۳-۷. رأسی از درخت که تنها متصل به یک یال باشد را برگ[۱۵] نامیم.

---

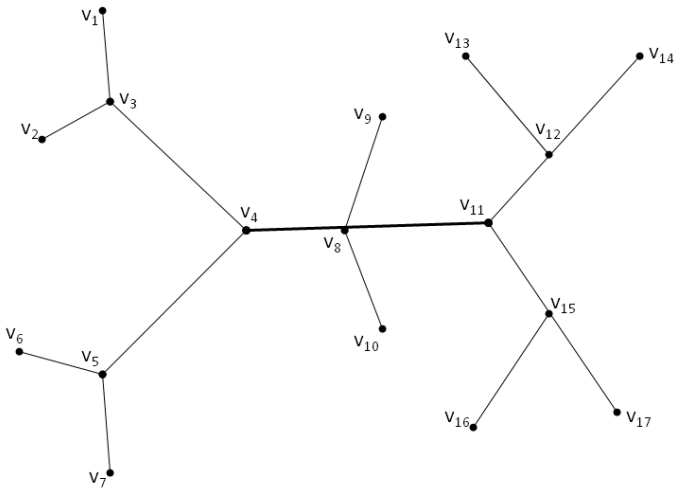
[۱] *Beker* [۲] *Berman and Averbakh* [۳] *Peng* [۴] *Shioura and Uno* [۵] *Graph* [۶] *Vertex* [۷] *Edge* [۸] *Weight* [۹] *Length* [۱۰] *Path* [۱۱] *Distance* [۱۲] *Cycle* [۱۳] *Connected* [۱۴] *Tree* [۱۵] *Leaf*

تعریف ۱-۳-۸. فرض کنید $T = (V, E)$ یک شبکه درختی باشد که V مجموعه رئوس آن با $|V| = n$ و E مجموعه یال‌های آن باشد، بطوری‌که طول تمام یال‌ها غیر صفر و وزن‌های نامنفی $w(v)$ متناظر با رأس‌های v باشد. اکنون برای هر رأس دلخواه v مجموعه ای پیوسته از $T - v$ را با v-شاخه [۱] نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۳-۹. برای هر رأس دیگر مانند q مجموعه $B(v, q)$ رابه عنوان یک v- شاخه منحصر بفرد در نظر می‌گیریم که شامل q است و $N(v, q)$ را مجموعه رأس‌های آن تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۱۰. درجه [۲] هر رأس برابر با تعداد رأس‌هایی است که با آن همسایه [۳] هستند و مجموعه تمام این رأس‌ها را با $adj(v)$ نشان می‌دهیم .

تعریف ۱-۳-۱۱. قطر یک درخت برابر با طول بلندترین مسیر در درخت است.



شکل ۱-۱: مثال یافتن v-شاخه در یک درخت

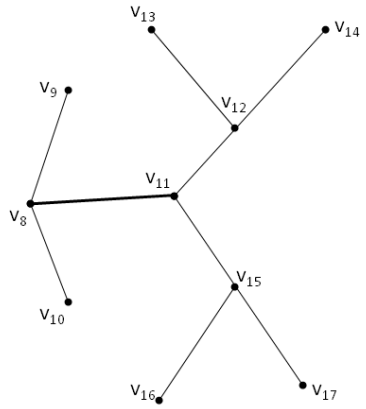
مثال ۱-۳-۱۲. *برای درک بهتر تعاریف قبل به شکل ۱-۱ توجه کنید. در این شکل درختی با ۱۷ رأس و ۱۶ یال وجود دارد. رأس v_4 را در نظر بگیرید. v_4-شاخه مجموعه‌ای بصورت زیر است:*

$$T - \{v_4\} = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}$$

[۱] $V - Branch$ [۲] $Degree$ [۳] $Adjacent$

اکنون به عنوان کاندیدا برای رأس $v_۸$ ، $B(v_۴, v_۸)$ زیر درختی است شامل رأس $v_۸$ که رأس $v_۴$ را در بر ندارد. شکل ۱-۲ را ببینید. $N(v_۴, v_۸)$ مجموعه رأس‌های این زیر درخت است که در زیر آمده است:

$$N(v_۴, v_۸)=\{v_۸, v_۹, v_{۱۰}, v_{۱۱}, v_{۱۲}, v_{۱۳}, v_{۱۴}, v_{۱۵}, v_{۱۶}, v_{۱۷}\}$$



شکل ۱-۲: $B(v_۴, v_۸)$ شاخه داخلی

تعریف ۱-۳-۱۳. مسیر مرکزی درخت [۱] ،کوتاهترین مسیر مرکزی کمینه است و آن را با PC نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۳-۱۴. مرکز مطلق [۲] درخت، نقطه میانی قطر درخت است و آن‌را با c نشان می‌دهیم.

نکته ۱-۳-۱۵. *مرکز مطلق درخت T روی مسیر مرکزی (PC) قرار دارد به عبارت دیگر $c \in PC$ است.*

تعریف ۱-۳-۱۶. فرض کنید Φ مجموعه‌ای از همه مسیرهای درخت باشد ، برای هر مسیر $P \in \Phi$ و هر رأس $v \in V$ فاصله بین رأس و مسیر را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$d(P, v) = \min_{u \in P} d(u, v) \qquad (۱-۱)$$

تعریف ۱-۳-۱۷. به ازاء هر مسیر دلخواه $P \in \Phi$ فاصله بیشینه و فاصله متوسط را به ترتیب بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

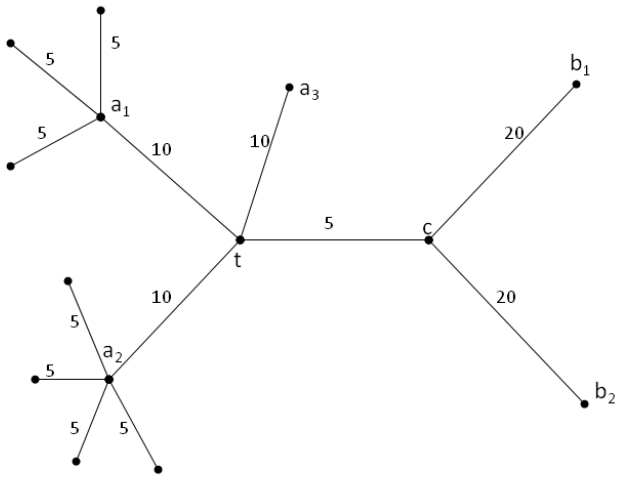
$$F(P) = Max(P) = \max_{v \in V} d(P, v) \qquad (۱-۲)$$

[۱] *Path Center* [۲] *Absolute Center*

$$G(P) = Mean(P) = \sum_{v \in V} w(v)d(P,v) \qquad (۳-۱)$$

تعریف ۱-۳-۱۸. (مسیر میانی[۱]) مسیر P یک مسیر میانی است اگر به ازاء هر مسیر دیگری مانند P' رابطه زیر برقرار باشد.

$$Mean(P) \leqslant Mean(P') \qquad (۴-۱)$$



شکل ۱-۳: مثال تعیین رأس بحرانی برای یک مسیر

تعریف ۱-۳-۱۹. (رأس بحرانی[۲]) رأس $a \in P$ یک رأس بحرانی برای مسیر P است، اگر رأس دیگری مانند $b \in V$ به قسمی وجود داشته باشد که:

$$F(P) = d(P,b) = d(b,a) \qquad (۵-۱)$$

مثال ۱-۳-۲۰. *رأس t در درخت شکل ۱-۳ یک رأس بحرانی برای مسیر $P(a_۱, a_۲)$ است زیرا*

$$F(P(a_۱,a_۲)) = d(P(a_۱,a_۲),b_۱) = d(t,b_۱) = ۲۵$$

در ادامه مفاهیمی را معرفی می‌کنیم که برای پیدا کردن فاصله رئوس درخت تا مسیر P از آن‌ها استفاده می‌کنیم.

[۱] $Path\ Median$ [۲] $Critical\ Vertex$