بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

زیرتعامد و متعامدمرکز در ماتریس ها

نگارش

راضیه بیرانوند

استاد راهنما

دکترمجتبی قاسمی کمالوند

استاد مشاور

دکتر علی بارانی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

شهریور ۱۳۹۲

همه امتیازات این پایان‌نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس‌ها یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان‌نامه) و نام دانشجو با ذکر ماخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این‌صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

چکیده

عنوان پایان‌نامه: زیرتعامد و متعامدمرکز در ماتریس ها	
استاد راهنما : دکتر مجتبی قاسمی کمالوند	**استاد مشاور:** دکتر علی بارانی
درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد	**رشته :** ریاضی محض(جبرخطی)
محل تحصیل : دانشگاه لرستان	**دانشکده :** علوم پایه
تاریخ فارغ التحصیلی:شهریور ۱۳۹۲	**تعداد صفحه:**۷۰
کلید واژه‌ها: ماتریس متعامد، ماتریس یکانی، رتبه بدون قطر، سادک متعامدمرکز، ماتریس متعامدمرکز.	

چکیده: در این پایان نامه به بررسی نتایجی درباره زیرماتریس های ماتریس های متعامد و یکانی و رابطه آنها با ماتریس هایی که متعامدمرکز نامیده می شوند، می پردازیم. علاوه براین زیرماتریس های ماتریس های متعامد و یکانی را مشخص می کنیم و به رابطه آنها با هندسه اقلیدسی می پردازیم.

سپاس گزاری...

ستایش خداوندی را سزاست که حمد را کلید یادش و سبب فزونی فضل و رحمت خود و راهنمای نعمت ها و عظمتش قرار داده است. خدا را ستایش می کنیم بر آنچه گرفته و آنچه بخشیده و بر نعمت هایی که عطا کرده و آزمایش هایی که انجام داده، خداوندی که بر هر چیز پنهانی آگاه و در باطن هر چیزی حضور دارد و به آنچه در سینه هاست آگاه و بر آنچه دیده ها دزدانه می نگرد داناست. خدایا! به تو پناه می برم از آن که در سایه ی بی نیازی تو تهی دست باشم، یا درپرتو روشنایی هدایت تو گمراه گردم، یا در پناه قدرت تو، بر من ستم روا دارند، یا خوار و ذلیل باشم، در حالی که کار در دست تو باشد! خدایا! به تو پناه می بریم از آن که از فرموده ی تو بیرون شویم یا از دین تو خارج گردیم، یا هواهای نفسانی پیاپی بر ما فرود آید، که از هدایت ارزانی شده از جانب تو سر باز زنیم.

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و گرانقدرم جناب آقای دکتر مجتبی قاسمی کمالوند که در کمال سعه صدر از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ از استاد صبور، جناب آقای دکتر علی بارانی که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پایان نامه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛ و از استاد گرامی جناب آقای دکتر بهمن غضنفری که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. از پدر و مادر عزیزم به خاطر همه ی تلاش های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند سپاس گزارم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس احساس سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، به پاس قلبهای بزرگشان و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

و تقدیم به استاد گرانقدرم

که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت بوده است.

مقدمه

ماتریس های یکانی نقشی اساسی در شکل ماتریسی عملگرهای خطی بازی می کنند، لذا تعیین ارتباط هر ماتریس با این گونه از ماتریس ها، همواره از اهمیّت فراوان برخوردار می باشد. بدین جهت این پایان نامه نیز به علّت مشخص کردن ارتباط میان مفاهیم فوق با ماتریس های متعامدمرکز اهمیّتی خاص خواهد داشت. دراین پایان نامه ابتدا تعاریف و قضایایی در مورد ماتریس های متعامدمرکز و زیرتعامد ارائه شده است. نتایجی درباره زیرماتریس های ماتریس های متعامد و ماتریس های یکانی و رابطه آنها با ماتریس هایی که متعامدمرکز و زیرتعامد نامیده می شود، به دست می آید. همچنین در مورد ساختار ماتریس های متعامدمرکز نتایج جالبی به دست می آوریم.

این پایان نامه شامل سه فصل است که در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مطرح می شود. در فصل دوم به قضایایی درباره زیرماتریس های ماتریس های متعامد و ماتریس های یکانی پرداخته شده است و نتایجی از این قضایا به دست آمده است، همچنین قضایایی در مورد ماتریس های متعامدمرکز ارائه شده است. در فصل سوم به بررسی رابطه ماتریس های متعامدمرکز و نقاط هندسی در فضای اقلیدسی می پردازیم و به فضای اقلیدسی $n-$ بعدی که توسط دستگاه مختصات متعامد یکه ایجاد می شود می پردازیم.

مقاله اصلی مورد مطالعه و بررسی در این پایان‌نامه، مقاله زیر می‌باشد:

$$-M. Fiedler - Suborthogonality\ and\ orthocentricity\ of\ matrices$$

$$Linear\ algebra\ and\ its\ applications, ۴۳۰(۲۰۰۹)۲۹۶ - ۳۰۷$$

در انتهای این پایان‌نامه، کتاب‌نامه و واژه‌نامه فارسی به انگلیسی مورد استفاده در این پایان‌نامه درج شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

همه قضایا و نکات این فصل از منابع [۱]، [۳] و [۴] گرفته شده است.

۱.۱ مقدمه

بدیهی است که قبل از بیان مفاهیمی درباره زیرتعامد و متعامدمرکز در ماتریس ها ابتدا باید مقدمات لازم را برای آشنایی با مفاهیم به کار رفته بیان کرد، بنابراین ابتدا تعاریف و قضایای ابتدایی مطرح می شود همچنین درباره رتبه بدون قطر و $d-$ رتبه یک ماتریس توضیحاتی داده می شود و به مقایسه ویژگی های رتبه بدون قطر و $d-$ رتبه یک ماتریس و شرایطی که رتبه بدون قطر و $d-$ رتبه یک ماتریس برابر است می پردازیم.

۲.۱ تعاریف پایه

تعریف ۱.۲.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان F ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. تابع $\langle .,. \rangle : V \times V \to F$ *ضرب داخلی* است اگر برای هر $x, y, z \in V$

۱. $\langle x, x \rangle \geqslant ۰ \quad , \quad \langle x, x \rangle = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$

۲. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

۳. $\forall c \in F \quad , \quad \langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$

۴. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

تعریف ۲.۲.۱. ماتریس R را یک *ماتریس تحویل شده سطری پلکانی* گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

۱. ماتریس R تحویل شده سطری باشد.

۲. همه ی سطرهای صفر R زیر سطرهای غیر صفر واقع شده باشند.

۳. اگر سطرهای $۱, ۲, \ldots, r$ سطرهای غیر صفر ماتریس R باشند و درایه های مقدم غیر صفر این سطرها در ستون های $k_۱, k_۲, \ldots, k_r$ واقع شده باشند آنگاه $k_۱ < k_۲ < \ldots < k_r$.

تعریف ۳.۲.۱. تعداد سطرها یا ستون های مستقل خطی یک ماتریس را *رتبه ماتریس* گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. به ماتریسی که از حذف تعدادی از سطرها یا ستون های یک ماتریس به دست آید *زیرماتریس* یک ماتریس گفته می شود.

تعریف ۵.۲.۱. بردارهای $x_۱, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$ یک *مجموعه متعامد* تشکیل می دهند اگر

$$x_i^* x_j = ۰ \quad , \quad \forall ۱ \leqslant i < j \leqslant k$$

اگر علاوه بر این $x_i^* x_i = ۱ \quad , \quad \forall i$

آنگاه این مجموعه را مجموعه *متعامد* یکه گوییم.

تعریف ۱.۲.۶. ماتریس $U \in M_n(\mathbb{C})$ که در آن $M_n(\mathbb{C})$ مجموعه ماتریس های $n \times n$ با درایه های مختلط می باشد، را *متعامد* گوییم هرگاه $U^T U = U U^T = I$ ، $U^{-۱} = U^T$.

تعریف ۱.۲.۷. ماتریس $U \in M_n(\mathbb{C})$ که در آن $M_n(\mathbb{C})$ مجموعه ماتریس های $n \times n$ با درایه های مختلط می باشد، را *یکانی* گوییم هرگاه $U^* U = U U^* = I$ ، $U^{-۱} = U^* = (\overline{U})^T$.

تعریف ۱.۲.۸. به ماتریس یکانی یا متعامدی که دارای کوچکترین ابعاد ممکن باشد *ماتریس یکانی یا متعامد مینیمال* گفته می شود.

تعریف ۱.۲.۹. ماتریس متعامدی که درایه های زیر قطر اصلی آن ناصفر باشد ماتریس متعامد تجزیه ناپذیر نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۱۰. اگر $U = \begin{bmatrix} U_{۱۱} & U_{۱۲} \\ U_{۲۱} & U_{۲۲} \end{bmatrix}$ یک افراز از ماتریس متعامد یا یکانی U باشد، آنگاه $U_{۱۱}$ و $U_{۲۲}$ *دو زیرماتریس مکمل* ازماتریس متعامد یا یکانی U هستند، $U_{۱۲}$ و $U_{۲۱}$ *دو زیرماتریس باقی مانده* (مکمل) از ماتریس متعامد یا یکانی U می باشند.

تعریف ۱.۲.۱۱. ماکزیمم مرتبه زیرماتریس های نامنفرد A که شامل هیچ یک از درایه های قطری A نباشد را *رتبه بدون قطر* A گوییم و آن را با $W(A)$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر:

$$W(A) = r(S_\sigma, A) = max\, rank \left\{ A[\alpha|\beta] \,|\, \alpha \times \beta \subseteq s_\sigma \right\},$$

$$s_\sigma = N \times N - \{(۱,۱),\ldots,(n,n)\}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. مینیمم رتبه $A+D$ که D یک ماتریس قطری باشد، $d-$ رتبه A نامیده می شود و آن را با $d(A)$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر:

$$d(A) = min_D\, rank\, \{A+D : \text{یک ماتریس قطری باشد } D\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. $d-$ رتبه A، $d-$ *رتبه اکید* نامیده می شود اگر در تعریف $d(A)$، D نامنفرد باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. $d-$ رتبه A، $d-$ *رتبه r منفی* نامیده می شود اگر در تعریف $d(A)$، A به صورت زیر باشد:

$$A = D - XX^T$$

که در آن D یک ماتریس قطری و X یک ماتریس حقیقی $n \times r$ با رتبه r باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. اگر A یک ماتریس $m \times n$ روی میدان F باشد. گوییم A دارای *رتبه کامل* r است اگر A دارای رتبه r باشد و همه زیرماتریس های $r \times r$ آن نامنفرد باشند.

تعریف ۱۶.۲.۱. اگر A یک ماتریس $m \times n$ روی میدان F باشد. گوییم A دارای *رتبه بدون قطر کامل* r است اگر A دارای رتبه بدون قطر r باشد و همه زیرماتریس های بدون قطر $r \times r$ آن نامنفرد باشند.

تعریف ۱۷.۲.۱. مجموعه ی $\{x_۰,\ldots,x_n\}$ را *مستقل آفینی* گویند، هرگاه مجموعه ی $\{x_۱ - x_۰,\ldots,x_n - x_۰\}$ مستقل خطی باشد. واضح است هر مجموعه ی مستقل خطی، مستقل آفینی است ولی عکس مطلب برقرار نیست. برای مثال مجموعه $A = \{۰, e_۱, e_۲\}$ در $R^۳$ مستقل آفینی است ولی

مستقل خطی نیست زیرا $e_1 = e_1 - 0$ و $e_2 = e_2 - 0$، بنابراین $B = \{e_1, e_2\}$ مستقل خطی است پس A مستقل آفینی است.

تعریف ۱.۲.۱۸. اگر $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ مستقل آفینی باشد، آنگاه گردایه همه ترکیبهای محدب S را $n-$*سادک* گویند. به عبارت دیگر:

$$[x_0, \dots, x_n] = \{\Sigma_{i=0}^{n} t_i x_i \,|\, \Sigma t_i = 1\,, t_i \geqslant 0\}$$

تعریف ۱.۲.۱۹. سادک $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ از یک فضای $n-$ بعدی، *سادک متعامدمرکز* گفته می شود هرگاه از هر رأس x_v به وجوه مقابل $[x_1, x_2, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_{n+1}]$ عمود وارد شود. از برخورد این عمودها نقطه x_0 به وجود می آید که به آن *مرکزتعامد سادک* گفته می شود. برای مثال یک ۲-سادک متعامدمرکز در فضای اقلیدسی R^3 در نظر می گیریم که به مثال (۱.۲.۳) ارجاع داده می شود.

تعریف ۱.۲.۲۰. اگر در سادک متعامدمرکز، مرکزتعامد سادک نقطه ی درونی باشد در این صورت به آن *سادک متعامدمرکز مثبت* گوییم. به مثال (۱.۲.۳) ارجاع داده می شود.

تعریف ۱.۲.۲۱. ماتریس $(n+1) \times (n+1)$، $M = [m_{ij}]$ که در آن m_{ij} مربع فواصل بین دو رأس iام و jام از $n-$ سادک Σ باشد *ماتریس نظیر*[1] $n-$ سادک Σ نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۲۲. اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد و $v_1, \dots, v_n \in V$. ماتریس $G = [g_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ که در آن $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ وقتی که $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، *ماتریس گرام* نامیده می شود.

ضرب داخلی $\langle v_i, v_j \rangle$ از دو بردار $v_i, v_j \in \mathbb{C}^n$ بدین معنی است که $\langle v_i, v_j \rangle = v_j^* v_i$.

[1] Menger matrix

تعریف ۲۳.۲.۱. زیرفضای خطی $(n-1)-$ بعدی از $\mathbb{R}^n$ *ابرصفحه* نامیده می شود.

تعریف ۲۴.۲.۱. نقطه ای از یک سادک که با همه ی رئوس سادک متساوی الفاصله باشد *مرکزدایره سادک* نامیده می شود.

تعریف ۲۵.۲.۱. اگر $\Sigma = [x_0, \ldots, x_n]$ یک $n-$ سادک باشد، آنگاه رئوس $x_0, \ldots, x_n$ *مختصات گرانیگاهی* $n-$ سادک نامیده می شوند.

تعریف ۲۶.۲.۱. اگر $\Sigma = [x_0, \ldots, x_n]$ یک $n-$ سادک باشد، آنگاه نقطه $\frac{1}{n+1}[x_0 + \ldots + x_n]$ *گرانیگاه* نامیده می شود.

تعریف ۲۷.۲.۱. گرامین از $n-$ سادک $\Sigma = [x_1, \ldots, x_{n+1}]$ به صورت یک ماتریس گرام از $n+1$ بردار $n_1, \ldots, n_{n+1}$ تعریف می شود که در آن n بردار $n_1 = x_1 - x_{n+1}, \ldots, n_n = x_n - x_{n+1}$ دو به دو متعامدند و بردار n_{n+1} به صورت $n_{n+1} = -\Sigma_{i=1}^{n} n_i$ تعریف می شود.

تعریف ۲۸.۲.۱. برای $n \geqslant 2$ اگر $A = [a_{ir}]$، $r = 1, \ldots, n+1$, $i = 1, \ldots, n$ یک ماتریس $n \times (n+1)$ باشد آنگاه روابط زیر هم ارزند:

۱. ماتریس $A^T A$ دارای $d-$ رتبه یک منفی و همه ی درایه های آن مخالف صفر است.

۲. ماتریس قطری نامنفرد D و بردار ناصفر $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ موجودند به طوری که $[DA^T z]$ یک ماتریس متعامد است.

۳. اعداد مثبت $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ و اعداد غیر صفر $u_1, \ldots, u_{n+1}$ موجودند به طوری که برای بردارهای $x_1, \ldots, x_{n+1}$ داریم:

$$\sum_{r=1}^{n+1} \alpha_r \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ir} x_i \right) + u_r x_{n+1} \right]^2 = \sum_{r=1}^{n+1} x_r^2 .$$

۴. ماتریس قطری نامنفرد D وجود دارد به طوری که $(AD)(AD)^T = I_n$ و بردار ناصفر y موجود است به طوری که $Ay = 0$.

ماتریسی که دارای یکی از ویژگی های فوق باشد *ماتریس متعامدمرکز* نامیده می شود.

تعریف ۲۹.۲.۱. ماتریس مربعی که با افزودن یک ستون به ماتریس متعامدمرکز تبدیل می شود *ماتریس متعامدمرکز جزئی* نامیده می شود.

تعریف ۳۰.۲.۱. ماتریس مربعی $n\times n$ ، A را یک *ماتریس معین مثبت* گوییم هرگاه به ازای هر $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$x^T A x > 0$$

که در آن برای $x = (x_1, \dots, x_n)$ داریم $x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

تعریف ۳۱.۲.۱. ماتریس مربعی H را یک *ماتریس بالا هسنبرگی* گوییم هرگاه

$$H = (h_{ij}) \qquad h_{ij} = 0 \qquad ,\forall i, j \quad i > j + 1$$

تعریف ۳۲.۲.۱. ماتریس مربعی H را یک *ماتریس پایین هسنبرگی* گوییم هرگاه

$$H = (h_{ij}) \qquad h_{ij} = 0 \qquad ,\forall i, j \quad j > i + 1$$

تعریف ۳۳.۲.۱. اگر $\{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعه ای از n بردار مستقل خطی باشد، می خواهیم $\{z_1, \dots, z_n\}$

را که یک مجموعه متعامد یکه است به دست آوریم. قرار می دهیم:

$$y_1 = x_1 \qquad , \qquad z_1 = \frac{y_1}{\langle y_1, y_1\rangle^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

به طوری که z_1 یکه باشد . حال قرار می دهیم:

$y_2 = x_2 - \langle x_2, z_1\rangle z_1$ به طوری که y_2 نسبت به z_1 متعامد باشد. و $z_2 = \frac{y_2}{\langle y_2, y_2\rangle^{\frac{1}{2}}}$ به طوری که z_2 یکه و نسبت به z_1 متعامد باشد. به همین ترتیب ادامه می دهیم تا وقتی که بردارهای $z_1, \dots, z_{k-1}$ به دست آیند، بنابراین قرار می دهیم:

$$y_k = x_k - \langle x_k, z_{k-1}\rangle z_{k-1} - \langle x_k, z_{k-2}\rangle z_{k-2} - \dots - \langle x_k, z_1\rangle z_1 \quad ,$$

به طوری که y_k نسبت به $z_1, \dots, z_{k-1}$ متعامد باشد و $z_k = \frac{y_k}{\langle y_k, y_k\rangle^{\frac{1}{2}}}$ به طوری که z_k یکه باشد.

به همین ترتیب ادامه می دهیم تا وقتی که بردارهای متعامد یکه $z_1, \dots, z_n$ به دست آیند.

فرایند فوق متعامدسازی گرام اشمیت نامیده می شود.

نکته ۱.۲.۱. برای هر ماتریس مربعی A، $W(A) \leqslant d(A)$ ولی وقتی که ۳ $n >$، $W(A) < d(A)$.

بنا به قضیه (۲.۲) منبع [۳]، $d(A)$ عکس $W(A)$ است، زیرا وقتی که A نامنفرد باشد $W(A) = W(A^{-1})$ ولی $d(A)$ دارای این ویژگی نیست.

مثال ۱.۲.۱. $d-$ رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ۱ و $d-$ رتبه $A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$، ۲ است.

حل ۱.۲.۱. اگر D یک ماتریس قطری به صورت زیر باشد

$$D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A + D = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس با استفاده از عملیات سطری پلکانی داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_۱+r_۲\to r_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_۱+r_۳\to r_۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین رتبه $A+D$ ، ۱ است پس بنا به تعریف

$$d(A) = min_D\, rank\{A + D : \text{یک ماتریس قطری باشد } D\},$$

به آسانی مشخص می شود $d-$ رتبه A برابر ۱ است.

و اگر

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس قطری باشد

$$A^{-1} + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از عملیات سطری پلکانی داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\frac{1}{2}r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{r_1 + r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xRightarrow{\frac{1}{2}r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$