بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه دکتری

ریاضی کاربردی

کنترل بهینه زمانی و پایدارسازی سیستم‌های متناوب گسسته زمانی خطی

استاد راهنما: پروفسور سیدمهدی کرباسی

استاد مشاور: دکتر محمد مهدی فاتح

پژوهش و نگارش: حجت احسنی طهرانی

اسفند ماه ۱۳۸۷

سپاس‌نامه

اول دفتر به نام ایزد دانا صانع و پروردگار حی توانا

حمد و سپاس بی‌پایان پروردگار یکتا را که در این راه مرا یاری نمود که خـود فرمـوده: فراگیرنـده دانش در پناه عنایت خداوند است.

از استاد ارجمندم جناب آقای پرفسور کرباسـی، کـه در دوران تحـصیلم در دوره فـوق لیـسانس و دکتری همواره در سایه عنایات و راهنمایی‌های پدرانه‌شان قرار داشتم، نهایت تشکر را دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر فاتح از دانشگاه صنعتی شاهرود که به‌عنوان استاد مشاور بـا اینجانـب همکاری نمودند تشکر می‌کنم. در تحقیق و کار با ایشان کاربرد ریاضی در علم جدیـد رباتیـک بـه مفهوم ریاضیات کاربردی در رساله من عینیت بخشیده شده است.

از اساتید محترم جناب آقای دکتر دهقان از دانشگاه صنعتی امیرکبیر و دکتـر یوسـفی از دانـشگاه شهید بهشتی و دکتر حسینی و دکتر لقمانی که بـه‌عنـوان داوران رسـاله قبـول زحمـت فرمودنـد نهایت سپاس را دارم.

در پایان از زحمات بی‌دریغ اساتید محترم دانشکده ریاضی دانشگاه یزد که در طول دوره تحـصیلم با راهنمایی‌های خود مرا مورد لطف و محبت قرار دادند نهایت تشکر را دارم.

به پایان آمد این دفتر حکایت همچنان باقی است.

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره دکتری	شناسه: ب/د/۳

جلسه دفاعیه پایان نامــه تحصیلی آقای حجت احسنی طهرانی دانشجوی دکتری

رشتــه/گرایش: ریاضی کاربردی

تحت عنوان: کنترل بهینه زمانی و پایدارسازی سیستم‌های متناوب گسسته زمانی خطی

و تعداد واحد: ۲۰ درتاریخ ۸۷/۱۲/۲۱ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۸ به حروف هجده و درجه بسیار خوب مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان		نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	الف :		
	ب :	سیدمهدی کرباسی	
استاد/ استادان مشاور:	الف :		
	ب :	محمدمهدی فاتح	
داور خارج از گروه:	الف :	مهدی دهقان	
	ب:	سهرابعلی یوسفی	
داور داخل از گروه:	الف:	سیدمحمدمهدی حسینی	
	ب:	قاسم برید لقمانی	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: سیدمحمد بزرگ

امضاء:

چکیده

در این پایان‌نامه مسأله کنترل بهینه زمانی سیستم‌های متناوب گسسته زمانی خطی چند متغیـره به وسیله پس‌خورد حالت مطرح شده است. این مسأله بـه وسـیله کنتـرل حالـت‌هـای تنـاوبی بـا کنترلگرهای پارامتری با این هدف که کنترلگر بهینه زمانی مینیمم نرم شود دست یـافتنی اسـت. این کار به گونه‌ای انجام می‌شود که کنترل پذیری سیستم نهایی حفظ شـده و قطـب‌هـای آن در مبدأ قرار گیرند. به‌علاوه این پایان‌نامه مسأله طراحی کنترل سیستم‌های گسسته زمانی بـا مقـادیر ویژه حلقه بسته درون یک ناحیه مشخص از فضای پایداری را مورد توجه قـرار مـی‌دهـد. بـه ایـن منظور ابتدا ماتریس پس خورد حالتی که مقادیر ویژه را به صفر می‌برد را به دست آورده و سـپس به وسیله عملیات تشابهی مقدماتی و با استفاده از قضیه گرشگورین پس خورد حالتی را پیدا مـی-کنیم که مقادیر ویژه را درون یک دایره به مرکز c و شعاع r تخصیص دهد.

این الگوریتم جدید می‌تواند برای جایابی مقادیر ویژه در یک دیسک معین از صفحه مختلط به کار گرفته شود و همچنین می‌تواند برای سیستم‌های گسسته زمانی خطـی بـا بعـد بـزرگ نیـز مـورد استفاده قرار گیرد.

فهرست

فصل اول

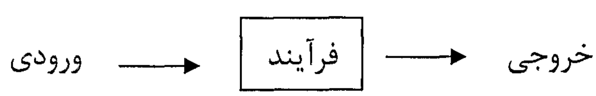
مقدمه

۱-۱ مقدمه

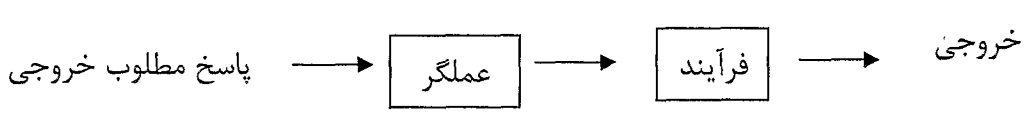
تقاضای بشر برای کنترل نیروهای طبیعت یکی از علل پیشرفت انسان در طول تاریخ بوده است. هدف از کنترل نیروها، به‌کار گرفتن آنها جهت استفاده بهتر از عوامل فیزیکی است که در محدوده امکانات نیستند. در خلال قرن بیستم، مهندسی کنترل بسیاری از آرزوهای بشر را جامه عمل پوشاند. نحوه کار ماشین‌ها و وسایل اولیه‌ای که به دست بشر ساخته شدند، ایجاب می کرد که دست انسان مستقیماً با آنها در تماس باشد و رفتار آنها را کنترل کند و بنابراین یک ماشین یا دستگاه، دائماً و به طور متناوب، احتیاج به کنترل داشته است. اما امروزه، علم کنترل در حوزه‌هایی مورد استفاده قرار می گیرد که انسان به سادگی قادر به انجام آنها نیست.

هدف علم کنترل تدوین نظریه‌ها و اصول قواعد لازم برای تنظیم سیستم‌های دینامیکی است. امروزه کنترل تنها به مسائل مهندسی محدود نمی شود. کاربرد نظریه‌های کنترل در سیستم‌های اقتصادی، سیاسی، مدیریتی و ... نتایج بسیار ارزشمندی را از نظر تجزیه و تحلیل رفتار این گونه سیستم‌ها به همراه داشته است.

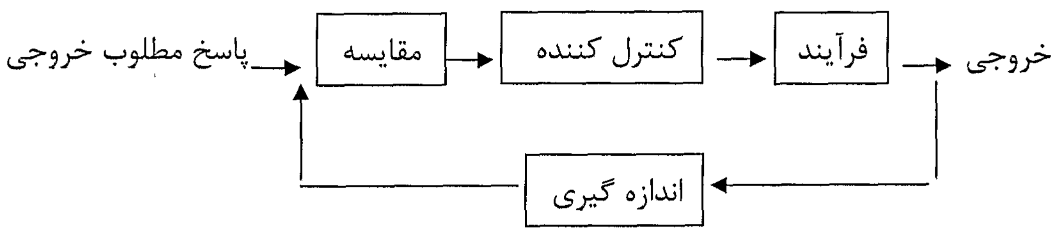
به طور کلی یک سیستم کنترل، اتصالی از اجزای تشکیل دهنده سیستم است که پاسخ مطلوبی ایجاد می کند. اساس تحلیل سیستم‌های کنترل را نظریه سیستم‌های خطی تشکیل می دهد، که در آن یک رابطه علت – معلولی بین اجزای سیستم فرض می شود. پس دستگاه یا فرایندی را که باید کنترل شود می توان مطابق شکل زیر نشان داد:



رابطه ورودی – خروجی، رابطه علت – معلولی فرآیند را نشان می دهد و این نشان دهنده پردازشی است که روی سیگنال ورودی انجام می شود تا سیگنال خروجی ایجاد گردد. در سیستم کنترل حلقه باز از کنترل کننده یا عملگر برای ایجاد خروجی مطلوب استفاده می شود.



با توجه به شکل مشخص است که در سیستم حلقه باز خروجی با هیچ مقداری مقایسه نمی‌شود، بر خلاف سیستم کنترل حلقه باز، در سیستم کنترل حلقـه بـسته خروجـی واقعـی انـدازه گیـری می شود تا با پاسخ مطلوب مقایسه گردد. سیستم کنترل پس خوردی سیستمی است که رابطـه از پیش معلومی بین یک متغیر و متغیر دیگر را با مقایسه تـوابعی از ایـن متغیرهـا و بـه کـار بـردن تفاضل آنها برای کنترل حفظ می کند. غالباً تفاضل بین خروجـی فراینـد تحـت کنتـرل و ورودی مرجع، برای کنترل فرآیند به کار می رود به نحوی که این تفاضل دائماً کاهش می یابد.



در بسیاری از مسایل از قبیل کنترل درجه حرارت، دقت در اندازه گیـری، علـوم فـضایی، اقتـصاد، مدیریت و ... که انسان قادر به درک و حل سریع آنها نیست، کنترل پس خوردی نقشی اساسـی و حیاتی ایفا می کند.

ویژگی‌های یک سیستم پس خوردی را می توان به صورت زیر بر شمرد:

۱) کاهش خطای سیستم؛ فرآیندها در معرض محیط متغیر، کهنه شدن، فراموشـی مقـادیر دقیـق پارامترها و دیگر عوامل طبیعی موثر بر فرآیند قرار دارند. در یک سیستم حلقه باز تمام این خطاهـا و تغییرات، به تغییر و عدم دقت خروجی می‌انجامد. ولی در سیستم حلقه بسته تغییر خروجی ناشی از تغییرات فرآیند در نظر گرفته شده و کوششی برای تصحیح خروجی صورت می‌گیرد.

۲) کـاهش اثـر تغییـر پارامترهـای فرآینـد؛ سیـستم‌هـای پـس خـوردی مـی‌تواننـد اثـر نـویز و اغتشاش‌های ناخواسته را کم کنند.

یکی از مسایلی که در سال‌های اخیر مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است، کنترل سیـستم‌هـای پس خوردی گسسته-زمانی متناوب می‌باشد. توصیف مقدماتی ریاضی یک مسأله متناوب خطی، در واقع بیانگر مدل پیوسته-زمانی آن است. با گسسته سازی این مدل می‌توان به فرم گسسته-

زمانی خطی متناوب دست یافت.

به عنوان مثال برای کنترل یک ماهواره در مدار زمین باید کنترلگر ساده‌ای طراحی شود که با استفاده از خاصیت تناوبی میدان جاذبه، عملیات پایداری را برای ماهواره تضمین نماید. سیستم ماهواره توسط یک مدل فضای حالت پیوسته-زمانی متناوب خطی از مرتبه n با تعداد ورودی m وخروجی p توصیف می‌شود. این مسأله متناوب پیوسته-زمانی از طریق گسسته سازی‌های متوالی روی N بازه زمانی، به یک مسأله گسسته تبدیل می‌شود. کنترل این سیستم مبتنی بر قانون کنترل پس خورد خروجی بهینه است که تابع هزینه را مینیمم می‌سازد. مزیت استفاده از مدل-های گسسته-زمانی امکان گسترش الگوریتم‌های محاسباتی نظیر، در حالت استاندارد می‌باشد.

هدف از این پایان نامه، معرفی و بررسی برخی الگوریتم‌های محاسباتی در ارتباط با سیستم‌های متناوب گسسته-زمانی و ارائه روش‌های جدید برای کنترل این نوع سیستم‌ها می‌باشد.

۱-۲ تاریخچه

مطالعه سیستم‌های متناوب گسسته زمانی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است در سال ۱۹۹۳ سریدهار[۱] و وان دورن[۲] روش LQ و تجزیه شور را به کار گرفتند و در سال ۱۹۹۴ توسط معادله سیلوستر کنترلگر سیستم متناوب را محاسبه نمودند و سپس ورگا[۳] در سال ۱۹۹۹ با استفاده از معادلات لیاپانوف کنترلگر متناوب را محاسبه نمود و در سال ۲۰۰۴ روش تجزیه کالمن را بر روی سیستم متناوب به کار گرفت. علی اف[۴] در سال ۲۰۰۵ یک روش آزاد گرادیان را به کار گرفت به طوری که تابع هزینه را برای حالت گسسته زمانی مینیمم ساخت. فارگس[۵] در سال ۲۰۰۶ یک روش مبتنی بر روش LMI را بر روی مسأله متناوب معرفی کرد و در دامنه فرکانسی لامپ[۶] و همکارانش در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۵ تابع تبدیل پارامتری را برای این سیستم‌ها ارائه دادند و در سال ۲۰۰۲ ژو[۷] آنالیز هارمونیک را جهت کنترل به کار گرفت و ورگا در سال ۲۰۰۶

---

۱ Sreedhar ۲ Van Dooren ۳ Varga ٤ Aliev ٥ Farges ٦ Lampe
۷ Zhu

روش‌هایی را بر پایه انتقال مقادیر ویژه پیشنهاد کرد. سوزا[۱] و ترونو[۲] در سال ۲۰۰۰ در ارتباط با مسأله پایداری سیستم‌های متناوب گسسته زمانی (LDP)[۳] مسأله کرانداری نرم برای خطای احتمالی را مورد بحث قرار داد و اخیراً توسط فارگس در سال ۲۰۰۷ نرم H_2 سیستم‌های (LDP) با عناصر نامعلوم، مورد تحقیق قرار گرفت.

در این پایان نامه، روش جدیدی را برای کنترل بهینه زمانی سیستم‌های متناوب گسسته زمانی و محاسبه کنترلگر پارامتری خطی برای این سیستم‌ها ارائه می‌دهیم و سپس کاربرد روش را بر روی مثالی عملی از یک بازوی مکانیکی ماهر نشان می‌دهیم.

در بسیاری از کاربردها، تنها موضوع پایداری کنترل شده کافی نیست و نیازمند آن است که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در یک ناحیه محصور مشخص از پایداری قرار بگیرند، روش‌های متعددی که از روش LQ برای تخصیص مقادیر ویژه مطلوب استفاده می‌کنند ارائه شده اند. نتایجی را برای سیستم‌های پیوسته سولهیم[۴] در ۱۹۷۲ و کاواسوکی[۵] و شیمورا[۶] در ۱۹۸۳ پیدا کردند، سولهیم روش تجزیه و انتقال پیاپی یک مقدار ویژه حقیقی و یا یک زوج مقدار ویژه مزدوج مختلط را استفاده کرد در نتیجه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته می‌توانند به صورت معین جابجایی شوند. کاواسوکی و شیمورا یک روشی را برای تخصیص همه مقادیر ویژه در یک ناحیه مناسب ارائه کردند. هرچند نتایج سیستم‌های پیوسته را نمی‌توان مستقیماً برای سیستم‌های گسسته زمانی بسط داد اما سولهیم در ۱۹۷۴ روش خودش را که برای سیستم پیوسته ارائه داده بود، برای سیستم گسسته به کار گرفت اما بهینگی سیستم حلقه بسته به خاطر تفاوت شکل معادلات ریکاتی مربوط به مسأله تنظیم کننده بهینه در حالت پیوسته و گسسته، از دست رفت. امین[۷] در سال ۱۹۸۴ روش سولهیم را به گونه‌ای اصلاح کرد که بهینگی سیستم حلقه بسته حفظ شود.

فوجیناکا[۸] و کاتایاما[۹] در ۱۹۸۸ یک روشی را برای سیستم‌های کنترل بهینه گسسته زمانی با مقادیر ویژه حلقه بسته درون یک ناحیه مشخص شرح دادند در حالی که پن[۱۰] در ۱۹۹۸

---

۱ Souza ۲ Trono ۳ Linear Discrete-time Periodic Systems ۴ Solheim

۵ Kawasuki ۶ Shimemura ۷ Amin ۸ Fujinaka ۹ Katayama

۱۰ Pan

D- پایداری سیستم‌های آشفته چند پارامتری گسسته را امتحان کردند و سایف[1] در ۱۹۸۹ به وسیله اختصاص وزن به سیستم برای جایابی مقادیر ویژه، یک کنترلگر خطی بهینه پیدا کرد، گوتمن[2] و جوری[3] در ۱۹۸۱ و گوتمن و تائوب[4] در ۱۹۸۹ شرایطی را که در اثر آن مقادیر ویژه یک ماتریس در ناحیه مطلوب بیافتند را پیشنهاد دادند، این شرایط بسیار مشابه معادلات لیاپانوف بودند. با استفاده از نتایج آنها حداد[5] و برنشتاین[6] در ۱۹۹۲ مسأله منترل بهینه گوسی مربعی خطی (LQG)[7] با محدودیت مقادیر ویژه ناحیه‌ای را به وسیله معرفی مسأله کمینه سازی کمکی حل کردند، یوان[8] در ۱۹۹۶ مسأله ترکیب منظم کننده مربعی خطی (LQR)[9] با شرایط مقادیر ویژه حلقه بسته ناحیه‌ای را ارائه داد. اهارا[10] در ۱۹۹۱ روابط بین کنترلگر پس خورد حالت پایدار پارامتری، با موقعیت مقادیر ویژه را به دست آورد. بنر[11] در سال ۲۰۰۱ روشی را برای پایداری جزئی سیستم‌ها کنترل خطی گسسته زمانی با بعد بزرگ، پیشنهاد داد. گرامونت[12] و لارگیلیر[13] در ۲۰۰۶ یک روشی را برای متمرکز کردن مقادیر ویژه ماتریس در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از هر مقدار ویژه یا یک دسته از مقادیر ویژه به کار گرفتند. در این پایان نامه با استفاده از قضیه گرشگورین الگوریتم جدیدی را برای متمرکز کردن مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در یک دیسک، درون دایره واحد را برای سیستم‌های گسسته زمانی ارائه می‌دهیم و سپس آن را می‌توان برای سیستم‌های با بعد بزرگ نیز به کار گرفت.

۱-۳ عناوین کارهای انجام شده در این پایان نامه

در فصل اول یا فصل مقدمه، مطالبی جهت آشنایی با سیستم‌های پس خوردی و سیستم‌های متناوب و تاریخچه آنها بیان شده است.

فصل دوم این پایان نامه، شامل برخی تعاریف و پیش نیازهای ریاضی می‌باشد که در طول مبحث مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل سوم به معرفی سیستم‌های کنترل استاندارد خطی و غیر خطی می‌پردازیم و سپس

---

۱ Saif ۲ Gutman ۳ Jury ۴ Taub ۵ Hadad ۶ Bernstein
۷ Linear Quadratic Gaussian ۸ Yuan ۹ Linear Quadratic Regulator
۱۰ Ohara ۱۱ Benner ۱۲ Grammont ۱۳ Largillier

روش خطی سازی یک سیستم غیرخطی و حل سیستم‌های تغییر ناپذیر با زمان را توضیح می‌دهیم و مسأله پایداری را مورد مطالعه قرار داده وسپس روشی جدید، جهت محاسبه ماتریس پس خورد حالت به گونه‌ای که مقادیر ویژه را داخل یک دیسک قرار دهد، با استفاده از قضیه گرشگورین ارائه می‌دهیم و الگوریتمی را نیز جهت این روش پیشنهاد می‌کنیم، از مزیت این روش کاربرد آن برای سیستم‌های با بعد بزرگ است و در نهایت روش محاسبه کنترلگر پارامتری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم سیستم متناوب و الگوریتم‌هایی جهت تجزیه و تحلیل سیستم‌های متناوب معرفی می‌گردند همچنین الگوریتم‌هایی جهت طراحی سیستم‌های متناوب، تخصیص مقادیر ویژه، تخصیص ستبر مقادیر ویژه، پایدار سازی سیستم‌های متناوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد و سپس روشی جدید جهت کنترل بهینه زمانی سیستم‌های متناوب گسسته زمانی با پس خورد حالت مینیمم نرم و محاسبه ماتریس پس خورد حالت متناوب پارامتری ارائه می‌دهیم.

در فصل پنجم به دنبال کاربرد سیستم متناوب و روش پیشنهادی در فصل چهارم یک بازوی مکانیکی ماهر را پیاده سازی و معادلات غیر خطی آن را به خطی تبدیل و روشی جدید برای دفع اغتشاش آن ارائه می‌دهیم و با توجه به مفهوم ردیابی این روبات را که دارای حرکتی تناوبی است به طور مطلوب کنترل می‌نماییم.

در پیوست برنامه کامپیوتری برخی روش‌های بیان شده آمده است.

فصل دوم

تعاریف و پیش نیازها

۲-۱ مفاهیم مقدماتی

در سال‌های اخیر با توجه به افزایش مطالعات در زمینه نظریه کنترل سیستم‌ها ارتباط نزدیکی میان این مبحث و جبر خطی پدید آمده و این مسأله باعث پیشرفت‌های زیادی در هر دو زمینه گردیده است. به عنوان مثال، یکی از مباحث نظریه سیستم‌ها که تحت تأثیر مستقیم جبر خطی عددی است، گسترش الگوریتم‌های پایدار، کار آمد و معتبر می باشد. در این فصل به معرفی برخی مفاهیم جبر خطی مورد نیاز در نظریه کنترل پرداخته، سپس شکل کلی معادلات ماتریسی مورد استفاده در این پایان نامه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲-۱-۱ فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد . چند جمله ای مشخصه A را به صورت:

$$P_n(\lambda)=\det(A-\lambda I) \qquad (۱-۲)$$

تعریف می کنیم. ریشه‌های این چند جمله ای، مقادیر ویژه ی ماتریس A نامیده می شوند. به بیان دیگر، λرا یک مقدار ویژ ه ماتریس A می نامیم، اگر و تنها اگر بردار غیر صفر xای موجود باشد به طوری که :

$$Ax=\lambda x \qquad (۲-۲)$$

در این صورت، بردار x را بردار ویژه راست متناظر با مقدار ویژه λ گوییم. همچنین بردار ناصفر y را بردار ویژه چپ متناظر با مقدار ویژه λ گوییم، اگر وتنها اگر داشته باشیم:

$$y^TA=\lambda y^T \qquad (۳-۲)$$

تعریف ۲-۱-۲ ماتریس مربعی Qرا متعامد گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$Q^TQ=QQ^T=I \qquad (۴-۲)$$

تعریف ۲-۱-۳ فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. نرم $\|A\|_p$ به ازای $p=1,\infty,2,F$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| \qquad (۵-۲)$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad (۶-۲)$$

$$\|A\|_F = \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷-۲)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \qquad (۸-۲)$$

که $\rho(A^T A)$ شعاع طیفی ماتریس $A^T A$ یا به عبارت دیگر، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ می باشد.

تعریف ۲-۱-۴ عدد شرطی ماتریس $n \times n$ و نامنفرد A، نسبت به نرم $\|\cdot\|_p$ که $p = 1, \infty, 2, F$ را با $cond_p(A)$ نمایش داده، به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$cond_p(A) = \|A\|_p . \|A^{-1}\|_p \qquad (۹-۲)$$

اگر $cond_p(A)$ به اندازه قابل ملاحظه ای بزرگ باشد، ماتریس A بد وضع و در غیراینصورت، خوش وضع تعریف می‌شود. لازم به ذکر است، چنانچه یک ماتریس، نسبت به یک نرم دلخواه، خوش وضع یا بد وضع باشد، نسبت به نرم‌های دیگر نیز همان وضعیت را خواهد داشت.

از جمله خواص عدد شرطی یک ماتریس، به موارد زیر می توان اشاره نمود:

$$cond(A^T A) = (cond(A))^2 \qquad (۱۰-۲)$$

$$cond(A) = cond(A^T) \qquad (۱۱-۲)$$

$$cond(\mathrm{AB}) \le cond(\mathrm{A}).cond(\mathrm{B}) \qquad (۱۲-۲)$$

$cond(\alpha \mathrm{A}) = cond(\mathrm{A})$، که α یک اسکالر غیر صفر است. (۱۳-۲)

$$cond(\mathrm{A}) \ge 1 \qquad (۱۴-۲)$$

بیشترین کاربرد عدد شرطی در بررسی حسا سیت یک مسأله است .

تعریف ۲-۱-۵ فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد؛ زیر فضای تولید شده توسط بردارهای سطری (ستونی) A را زیر فضای سطری (ستونی) ماتریس A می نامیم. رتبه ماتریس A عبارت است از بعد فضای ستونی که آن را با $rank(\mathrm{A})$ نشان می دهیم. ماتریس A رتبه کامل سطری (ستونی) نامیده می شود هرگاه سطرهای (ستون‌های) آن مستقل خطی باشند. ماتریس A رتبه

کامل است هرگاه رتبه کامل سطری یا رتبه کامل ستونی باشد.

از جمله خواص رتبه یک ماتریس، به موارد زیر می توان اشاره نمود:

$$rank(\mathrm{A}) = rank\left(A^T\right) \qquad (۱۵-۲)$$

$$rank(\mathrm{AB}) \leq \min\{rank(\mathrm{A}), rank(\mathrm{B})\} \qquad (۱۶-۲)$$

$$rank(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leq rank(\mathrm{A}) + rank(\mathrm{B}) \qquad (۱۷-۲)$$

یکی از ابزارهای که در زمینه محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس مورد استفاده قرار می‌گیرد، فرم شور ماتریسی می‌باشد. در این قسمت به معرفی فرم شور حقیقی ماتریس‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۲-۱-۱ فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد. در این صورت ماتریس متعامد $Q_{n\times n}$ای وجود دارد به طوری که:

$$R = Q^T A Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۲)$$

در رابطه (۲-۱۸) هر R_{ii} یک اسکالر یا یک ماتریس۲ × ۲ است، درایه‌های قطری اسکالر، متناظر با مقادیر ویژه حقیقی وماتریس‌ها ۲ × ۲ متناظر با مقادیر ویژه مختلط می‌باشند[۴].

تعریف ۲-۱-۶ ماتریس R در قضیه فوق، فرم شور حقیقی[۱] (RSF) ماتریس A نامیده می‌شود.

۲-۲ معادلات ماتریسی

دستگاه معادلات تفاضلی زیر با ضرایب متناوب $A_i = A_{i+N}$ و $B_i = B_{i+N}$ را در نظر بگیرید:

$$B_i x_{i+1} = A_i x_i \qquad i = 1,2,\ldots \qquad (۱۹-۲)$$

با فرض وارون پذیر بودن تمام ماتریس‌های B_i، قرار می‌دهیم $S_i = B_i^{-1} A_i$ بنابراین دستگاهی از

---

[۱] Real Schur Form

معادلات تفاضلی برحسب x_i با ضرایب متناوب $S_i = S_{i+N}$ به صورت زیر خواهیم داشت:

$$x_{i+1} = B_i^{-1} A_i x_i = S_i x_i \qquad i = 1,2,... \qquad (۲۰-۲)$$

اکنون تعریف زیر را در نظر بگیرید:

$$S^{(k)} = S_{k+N-1} \cdots S_{k+1} S_k \qquad k = 1,2,...,N \qquad (۲۱-۲)$$

با توجه به روابط (۲-۲۰) و (۲-۲۱) دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_{1+(i+1)N} &= S^{(1)} . x_{1+iN} \qquad i = 0,1,2,... \\ x_{2+(i+1)N} &= S^{(2)} . x_{2+iN} \qquad i = 0,1,2,... \\ &\vdots \\ x_{N+(i+1)N} &= S^{(N)} . x_{N+iN} \qquad i = 0,1,2,... \end{aligned} \qquad (۲۲-۲)$$

به آسانی می‌توان بررسی نمود که مجموعه معادلات تفاضلی فوق، به ازای x_i، $i = 1,2,...,N$ همان جواب (۲-۱۹) را دارد. برای بررسی رفتار این سیستم‌ها به مقادیر و بردارهای ویژه $S^{(k)}$ نیازمندیم. اما باید تا حد ممکن از تشکیل صریح ماتریس‌های $S^{(k)}$ پرهیز شود. در قضیه زیر یک تجزیه ضمنی برای این ماتریس‌ها معرفی می‌شود.

قضیه ۲-۲-۱ فرض کنید A_i و B_i به ازای $i = 1,2,...,N$ ماتریس‌های $n \times n$ مختلط باشند. در این صورت ماتریس‌های تشابهی Q_i و Z_i موجودند به طوریکه:

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= Z_1^* B_1 Q_2 \qquad \hat{A}_1 = Z_1^* A_1 Q_1 \\ \hat{B}_2 &= Z_2^* B_2 Q_3 \qquad \hat{A}_2 = Z_2^* A_2 Q_2 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \hat{B}_{N-1} &= Z_1^* B_{N-1} Q_N \qquad \hat{A}_{N-1} = Z_1^* A_{N-1} Q_{N-1} \\ \hat{B}_N &= Z_N^* B_N Q_1 \qquad \hat{A}_N = Z_N^* A_N Q_{N1} \end{aligned} \qquad (۲۳-۲)$$

تمام ماتریس‌های $\hat{B}_i, \hat{A}_i$ بالا مثلثی می‌باشند و علاوه بر این، اگر ماتریس‌های B_i معکوس پذیر باشند، آنگاه هر ماتریس Q_i ماتریس‌های $S^{(i)}$ را به فرم شور متناوب تبدیل می‌نماید. یعنی کلیه ماتریس‌های $Q_i^* S^{(i)} Q_i$ بالا مثلثی هستند[۲].

نتیجه ۲-۲-۱ فرض کنید B_i, A_i به ازای $i = 1,2,\cdots N$ ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی باشند. در این صورت ماتریس‌های متعامد Q_i و Z_i موجودند به طوریکه تجزیه (۲-۲۳) برقرار است. همچنین تمام ماتریس‌های $\hat{B}_i, \hat{A}_i$ بالا مثلثی هستند به جز یکی از آنها که شبه بالا مثلثی و دارای بلوک‌های قطری 1×1 و 2×2 می‌باشد[۲].

نتیجه ۲-۲-۲ تمام حاصلضرب‌های متناوب $S^{(i)}$، دارای مقادیر ویژه مساوی هستند و فرم‌های شور آنها $\hat{S}^{(i)}$، که توسط تجزیه ضمنی (۲-۲۳) به دست می‌آیند و دارای مقادیر ویژه یکسان روی قطر می‌باشند[۲].

تعریف ۲-۲-۱ معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید:

$$P_{K+1} = A_K P_K A_K^T + B_K B_K^T \qquad (۲۴-۲)$$

در رابطه فوق $A_K \in R^{n \times n}$ و $B_K \in R^{n \times n}$ ماتریس‌های متناوب معلوم با دوره تناوب $N > 1$ می‌باشند. معادله فوق یک معادله لیاپانوف متناوب گسسته زمانی (DPLE)[۱] نامیده می‌شود.

معادلات لیاپانوف کاربردهای متعددی در طراحی و تحلیل سیستم‌های کنترل خطی متناوب دارند. به عنوان مثال در زمینه کنترل بهینه و پایدار سازی سیستم‌های متناوب مورد استفاده گسترده قرار می‌گیرند. برای حل این گونه معادلات، الگوریتم‌های معتبر و پایدار عددی که مبتنی بر تجزیه شور متناوب می‌باشند، ارائه گردیده است[۲۲،۱۹].

تعریف ۲-۲-۲ معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید:

$$A_K X_K - X_{k+1} B_K + C_K = 0 \qquad (۲۵-۲)$$

در رابطه فوق A_K و B_K و C_k ماتریس‌های متناوب معلوم با دوره تناوب $N > 1$ می‌باشند.

---

[۱] Discrete-time Periodic Lyapunov Equation