بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی

رساله دوره دکتری در رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان رساله :

مباحثی در درجه جابجایی، خودریختی مرکزی و پوچتوانی نسبی گروههای متناهی

نگارنده:

روح اله برزگر

استاد راهنما:

دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور:

دکتر رشید رضائی

بهمن ۹۱

با احترام و سپاس تقدیم به:

- پدرم به استواری کوه
- مادرم به زلالی چشمه

قدردانی و تشکر

و بعد از مدّتها، پس از پیمودن راههای فراوان که با حضور شیرین استاد عزیزم، با راهنمایی‌ها و دغدغه‌های فراوانش و شیطنت‌های زیبای آن دوران، نگاههای پدر و مادرم با چشمهای پر از برق و شوق، و زیبایی حضور خواهرم در کنارم، که خستگیهای این راه را به امید و روشنی راه تبدیل کرده و امیدوارم بتوانم در آینده‌ای نزدیک جوابگوی این همه محبت آنها باشم.

اکنون، با احترام فراوان برای این همه تلاش این عزیزان برای موفقیت من، این پایان نامه را به پدر و مادرم، استاد عزیزم و خواهر مهربانم تقدیم می‌کنم و امیدوارم قادر به درک زیباییهای وجودشان باشم.

روح اله برزگر، بهمن ۹۱

چکیده

در این رساله ابتدا درجه جابجایی یک گروه متناهی را تعریف و ارتباط آن با مفاهیمی چون پوچتوانی، حلپذیری و ابرحلپذیری را بیان می‌کنیم، سپس گروههای متناهی با حداکثر سه درجه جابجایی نسبی را مورد بررسی قرار داده و گروههایی با چنین ویژگی را رده‌بندی می‌نمائیم. در ادامه به معرفی دو تعمیم از درجه جابجایی یک گروه که عبارت از احتمال جابجایی متقابل دو مجموعه و نیز احتمال ثابت نگه داشتن یک عنصر توسط یک خودریختی می‌باشند را بیان می‌نمائیم. در پایان دو مفهوم جدید یعنی پوچتوانی نسبی و حلپذیری نسبی را در گروهها معرفی و برخی نتایج به دست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی:

درجه جابجایی، درجه جابجایی نسبی، درجه جابجایی متقابل، خودریختی مرکزی، پوچتوانی نسبی، حلپذیری نسبی.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

نظریه احتمالی گروهها از جمله مباحثی است که طی دو دهه گذشته جایگاه موثری در تعیین ساختار گروهها از خود نشان داده و رشد قابل توجهی نیز داشته است. از جمله افرادی که زمینه این بحث را در نظریه گروهها آغاز کردند می‌توان به اردوش و توران [۱۵، ۱۶] در سال ۱۹۶۵ اشاره کرد که آنان در مقاله‌ای تحت عنوان "*On some problems of statistical group theory*" از برخی ابزارهای آماری از جمله احتمال در مفاهیم اساسی گروهها به کار برده‌اند. یک مثال ساده از کاربرد احتمال در گروهها درجه جابجایی یک گروه و به عبارت دیگر احتمال جابجایی دو عنصر دلخواه x و y در یک گروه است که نخستین بار توسط میلر([۴۵]) معرفی گردید. او درجه جابجایی یک گروه را به صورت تعداد زوجهای مرتب (x, y) که x و y با یکدیگر جابجا می‌شوند را بر مربع مرتبه گروه تقسیم نمود که عددی میان صفر و یک می‌باشد. توجه داریم که گروه آبلی است اگر و فقط اگر درجه جابجایی آن برابر یک باشد. همچنین کران بالای $\frac{5}{8}$ را برای یک گروه غیرآبلی ارائه نمود. بعلاوه تعداد کلاسهای مزدوج را با درجه جابجایی مرتبط کرد که البته این امر موجب استفاده از نظریه سرشتها و نمایش گروهها در برخی محاسبات درجه جابجایی شد. گوستافسون([۲۶]) درجه جابجایی را برای یک گروه متناهی فشرده تعریف کرد و نشان داد که کران بالای $\frac{5}{8}$ برای حالت نامتناهی نیز برقرار است. یکی دیگر از افرادی که کارهای خوبی در مورد درجه جابجایی انجام داده است پائول لسکات ([۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱]) می‌باشد. او با استفاده از مفهوم ایزوکلینیسم([۲۷]) و ارتباط آن با درجه جابجایی توانست گروههایی که درجه جابجایی آنها حداقل $\frac{1}{2}$ است را رده‌بندی کند. او نشان داد که اگر گروهی درجه جابجایی $\frac{1}{2}$ را اختیار کند باید با گروه متقارن S_3 ایزوکلینیک باشد و گروههای با احتمال بزرگتر از $\frac{1}{2}$ گروههای پوچتوان از کلاس حداکثر ۲ هستند. درجه جابجایی گروه طی سالهای اخیر به صورتهای گوناگون تعمیم داده شده است. در سال ۲۰۰۵ مقدم، سالمکار و چیتی ([۴۶]) n–امین درجه پوچتوانی را معرفی کردند که عبارت بود از احتمال این که جابجاگری از وزن $n+1$ از عناصر

گروه برابر عنصر همانی گروه شود. آنها توانستند برخی نتایج به دست آمده برای درجه جابجایی را تعمیم دهند و قضایای تازه‌ای را برای گروهها به دست آورند. در سال ۲۰۰۷ عرفانیان، لسکات و رضایی ([۱۷]) مفهوم درجه جابجایی نسبی را برای یک گروه متناهی و یک زیرگروه از آن تعریف کردند. در این تعریف درجه جابجایی یک گروه نسبت به یک زیرگروه از آن به دست می‌آید و با توجه به خواصی که زیرگروه می‌تواند داشته باشد این درجه با استفاده از آن خواص قابل محاسبه می‌باشد. ارائه کران بالا و تعمیم قضایای درجه جابجایی با استفاده از تعریف جدید نتایجی بود که توسط آنها صورت گرفت.

رساله حاضر در شش فصل تدوین یافته است. فصل اول که به مقدمات اختصاص یافته است تعاریف و قضایایی که در رساله به نحوی از آنها استفاده می‌شوند به اجمال بیان شده‌اند. فصل دوم به برخی نتایج درجه جابجایی در تعیین خواص گروهها مانند پوچتوانی، حلپذیری و ابرحلپذیری گروه اختصاص دارد. در این فصل خواهیم دید که چگونه درجه جابجایی گروه ابزار مفیدی را برای شناخت خواص گروهها ارائه می‌دهد که این به زیبایی و جذاب بودن این احتمال می‌افزاید. فصل سوم گروههای متناهی با حداکثر سه درجه جابجایی را مورد بررسی قرار داده و به رده‌بندی این دسته از گروهها می‌پردازد، و در پایان مجموعه مقادیر درجه جابجایی نسبی، $\mathcal{D}(G)$، یک تعداد از گروهها را به دست آوردیم ([۴]). فصل چهارم احتمال جابجایی متقابل دو زیرمجموعه که با نماد $P(m,n,G)$ نشان داده می‌شود را معرفی کرده‌ایم که تعمیم دیگری از درجه جابجایی است. این مفهوم عبارت است از احتمال اینکه یک مجموعه m عضوی با یک مجموعه n عضوی از گروه، عناصر آن دو به دو با هم جابجا شوند. این احتمال نسبت به n و یا m تشکیل یک دنباله نزولی داده و یک کران پایین برای درجه جابجایی گروه می‌باشد. در این فصل ما علاوه بر پیدا کردن کران بالا و پایین برای این احتمال، سعی کرده‌ایم برخی قضایای درجه جابجایی و بخصوص درجه جابجایی حاصلضرب حلقوی دو گروه آبلی تعمیم داده شود ([۵]). فصل پنجم احتمال دیگری را مورد بررسی قرار دادیم و آن عبارت است از احتمال اینکه یک خودریختی یک عنصر از گروه را به پیمانه زیرگروه

مشخصه ثابت نگه دارد. این احتمال برای حالتی که زیرگروه بدیهی باشد توسط شرمان ([۵۱]) معرفی گردید. ما نتایجی را به آن اضافه کرده و این احتمال را برای حالتی که زیرگروه مشخصه مرکز گروه باشد مورد توجه قرار دادیم([٦]) . البته گراف ساده دوبخشی نیز به آن مربوط نموده‌ایم. در فصل آخر ، مفهوم جدیدی بنام پوچتوانی و حلپذیری نسبی مطرح می‌گردد. در این تعاریف پوچتوانی و حلپذیری گروه را نسبت به یک خودریختی از آن مورد بررسی قرار می‌دهیم که در نوع خود می‌تواند تعمیم خوبی از پوچتوانی و حلپذیری گروه باشد([۷]).

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل تعاریف و نتایج مقدماتی را که مورد نیاز فصل های بعدی می‌باشد را بیان می‌کنیم. در بخش اول چند مفهوم اساسی در گروهها را بیان کرده و بعضی از خواص آنها که مورد نیاز در این رساله می‌باشد را عنوان می‌کنیم. بخش‌های دوم، سوم و چهارم به ترتیب به معرفی اجمالی از حاصلضرب حلقوی گروهها، گروههای فروبنیوس و نظریه سرشت گروهها اختصاص دارد. دو بخش آخر مفهوم ایزوکلنیسم نسبی و درجه جابجایی نسبی گروهها را بیان نموده و برخی نتایج به دست آمده در مورد آنها را عنوان خواهیم کرد.

۱.۱ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت گروه G را حلپذیر می نامیم هرگاه یک سری زیرنرمال مانند

$$\{۱\} = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq G_۲ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i، $۰ \leq i \leq n - ۱$، $G_{i+۱}/G_i$ گروهی آبلی باشد. طول کوتاهترین سری با این خاصیت را رده حلپذیری گروه G گوییم.

قضیه ۲.۱.۱. **فرض کنید G گروهی حلپذیر باشد. در این صورت**

(i) **هر زیرگروه G نیز حلپذیر است.**

(ii) **اگر $N \trianglelefteq G$، آنگاه G/N حلپذیر است.**

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت گروه G را ابرحلپذیر می‌نامیم هرگاه یک سری زیرنرمال مانند

$$\{۱\} = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq G_۲ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

داشته باشد که به ازای هر i، $۰ \leq i \leq n - ۱$، $G_i \trianglelefteq G$ و $G_{i+۱}/G_i$ گروهی دوری باشد.

قضیه ۴.۱.۱. **فرض کنید G گروهی ابرحلپذیر باشد. در این صورت**

(i) **هر زیرگروه G نیز ابرحلپذیر است.**

(ii) **اگر $N \trianglelefteq G$، آنگاه G/N ابرحلپذیر است.**

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۵.۱.۱. **فرض کنید G یک گروه باشد.**

(i) **اگر G' گروهی دوری باشد، آنگاه G ابرحلپذیر است.**

(ii) **G ابرحلپذیر است اگر و فقط اگر $G/Z(G)$ ابرحلپذیر باشد.**

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۱.۱.۶. اگر گروه متناهی غیرآبلی G دارای یک زیرگروه آبلی A از اندیس ۲ باشد، آنگاه G ابرحلپذیر است.

برهان: فرض کنید $G = \langle A, x\rangle$ که $x^{۲} \in A$. چون $[G : A] = [G : AZ(G)][AZ(G) : A]$، بنابراین $Z(G) \subseteq A$. خودریختی α روی A را به صورت $\alpha(a) = x^{-۱}ax$ تعریف می‌کنیم. در این صورت α یک خودریختی از مرتبه ۲ است و بعلاوه

$$C_A(x) = \mathrm{Fix}(\alpha) = \{a \in A : \alpha(a) = a\} = Z(G).$$

به استقرا روی $|G|$ برای گروههای غیرآبلی حکم را ثابت می‌کنیم. برای $G \cong S_{۳}$ حکم واضح است. فرض کنیم حکم برای تمام گروههای غیرآبلی کمتر از مرتبه گروه G برقرار باشد. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $Z(G)$ غیر بدیهی باشد. در این صورت $|\frac{G}{Z(G)}| < |G|$ و $\frac{G}{Z(G)}$ دارای زیرگروه آبلی $\frac{A}{Z(G)}$ از اندیس ۲ است. اگر $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی باشد، آنگاه G ابرحلپذیر خواهد شد. لذا با توجه به فرض استقرا $\frac{G}{Z(G)}$ ابرحلپذیر و از آنجا بنا به قضیه ۱.۱.۵، G ابرحلپذیر است.

حالت دوم: فرض کنید $Z(G)$ بدیهی باشد. در این صورت $\mathrm{Fix}(\alpha) = \{۱\}$ و چون $\alpha\Big(a\alpha(a)\Big) = a\alpha(a)$ نتیجه می‌شود $\alpha(a) = a^{-۱}$ به ازای هر $a \in A$. بنابراین $a^x = a^{-۱}$ به ازای هر $a \in A$ و از آنجا هر زیرگروه A در G نرمال است.

چون هر گروه آبلی ابرحلپذیر است، بنابراین ما می‌توانیم سری نرمال زیر را برای گروه A تعریف کنیم

$$\{۱\} = A_{\circ} \lhd A_{۱} \lhd A_{۲} \cdots \lhd A_n = A$$

که در آن به ازای هر $\circ \leq i \leq n-1$، $A_i \lhd G$ و $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ دوری است. به علاوه $A \lhd G$ و $\frac{G}{A}$ دوری می‌باشد، پس G ابرحلپذیر خواهد شد. ■

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت گروه G را پوچتوان می‌نامیم هرگاه یک سری زیرنرمالی مانند

$$\{1\} = G_\circ \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

داشته باشد که به ازای هر i، $\circ \leq i \leq n-1$، $G_i \trianglelefteq G$ و $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z(\frac{G}{G_i})$. طول کوتاهترین سری با این خاصیت را رده‌ی پوچتوانی گروه G گوییم. واضح است که هر گروه پوچتوان ابرحلپذیر است اما عکس آن برقرار نیست(گروه S_3 را در نظر بگیرید).

قضیه **۸.۱.۱.** **فرض کنید G گروهی پوچتوان باشد. در این صورت**

(i) **هر زیرگروه G نیز پوچتوان است.**

(ii) **اگر $N \trianglelefteq G$، آنگاه G/N پوچتوان است.**

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه **۹.۱.۱.** **هر $p-$گروه متناهی پوچتوان است.**

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه **۱۰.۱.۱.** **فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارز هستند.**

(i) **G پوچتوان است؛**

(ii) **هر زیرگروه بیشین G نرمال است ؛**

(iii) **هر p–زیرگروه سیلو G نرمال است؛**

(iv) **G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خود است.**

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه **۱۱.۱.۱.** (**استدلال فراتینی**[1])

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $H \lhd G$. در این صورت اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$، آنگاه $G = N_G(P)H$.

برهان: به [۴۹] مراجعه شود.

■

قضیه **۱۲.۱.۱.** **فرض کنید p کوچکترین عدد اولی باشد که مرتبه گروه غیرآبلی G را بشمارد و $G^{'} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ $(p \neq ۲)$. در این صورت G پوچتوان است.**

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم که اگر به ازای هر عدد اول $q\Big||G|$، $G_q \subseteq C_G(G^{'})$، آنگاه $G_q \lhd G$ که در آن G_q یک q–زیرگروه سیلوی G است. از اینکه $G_q \subseteq C_G(G^{'})$ نتیجه می‌شود $G^{'} \subseteq C_G(G_q)$، بنابراین

$$G^{'} \subseteq C_G(G_q) \subseteq N_G(G_q)$$

و از آنجا $G \rhd N_G(G_q)$. بنابراین G_q یک q–زیرگروه سیلو از $N_G(G_q)$ خواهد بود و طبق استدلال فراتینی نتیجه می‌گیریم $G = N_G(G_q)N_G(G_q) = N_G(G_q)$. پس $G_q \lhd G$. داریم $\frac{N_G(G^{'})}{C_G(G^{'})} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G^{'})$ و $|\mathrm{Aut}(G^{'})| = p(p-۱)^۲(p+۱)$. از طرفی با توجه به اینکه $p \neq ۲$ خواهیم داشت $\Big((p-۱)^۲(p+۱), |G|\Big) = ۱$، بنابراین $\Big|\frac{G}{C_G(G^{'})}\Big| = ۱, p$.

اگر $|\frac{G}{C_G(G^{'})}| = ۱$، آنگاه $G^{'} \subseteq Z(G)$ و G پوچتوان از کلاس ۲ خواهد شد. اگر $|\frac{G}{C_G(G^{'})}| = p$، آنگاه $G_q \subseteq C_G(G^{'})$ برای هر عدد اول q که $q \neq p$، پس $G_q \lhd G$. بنابراین هر زیرگروه سیلو در G نرمال است و

[1] Giovanni Frattini (1852-1925)

طبق قضیه ۱۰.۱.۱ G پوچتوان خواهد شد. ■

قضیه ۱۳.۱.۱. (شور– زاسنهاوس[۲])

اگر G یک گروه متناهی و K زیرگروه نرمالی از آن باشد به طوری که $(|K|,[G:K]) = 1$ آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد به طوری که G با حاصلضرب نیم مستقیم H به وسیله K یکریخت است به عبارت دیگر $G \cong H \ltimes K$.

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۴.۱.۱. زیرگروه H در G را مشخصه گوییم هرگاه به ازای هر خودریختی $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ داشته باشیم $\alpha(H) \subseteq H$. علامت $H \blacktriangleleft G$ را برای نشان دادن اینکه H زیرگروه مشخصه G است به کار خواهیم برد.

قضیه ۱۵.۱.۱. **اگر G دارای یک زیرگروه غیرمرکزی مشخصه و دوری باشد، آنگاه هیچ گروهی مانند K وجود ندارد که برای آن $G \cong K'$.**

برهان: به [۴۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۶.۱.۱. (شرایر[۳])

فرض کنید G یک گروه متناهی مولد باشد و $H \leq G$. در این صورت اگر اندیس H در G متناهی باشد، آنگاه H متناهی مولد است.

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۷.۱.۱. **فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq Z(G)$. در این صورت اگر $|G/H| = n$، آنگاه تابع $T: G \longrightarrow H$ با ضابطه $T(a) = a^n$ یک همریختی است.**

---

[۲] Schür-Zassenhaus

[۳] Otto Schreier(1901-1929)

برهان: به [۴۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۱.۱.۱۸. فرض کنید G یک گروه غیرآبلی باشد. اگر M و N دو زیرگروه بیشین آبلی متمایز از گروه G باشند، آنگاه $M \cap N = Z(G)$.

برهان: فرض کنید $x \in Z(G)$ و $x \notin M \cap N$. در این صورت $x \notin M$ یا $x \notin N$. می‌توانیم فرض کنیم $x \notin M$. در این صورت $\langle x, M \rangle$ یک زیرگروه سره آبلی شامل M خواهد شد، بنابراین $Z(G) \subseteq M \cap N$. واضح است که $G = \langle M, N \rangle$. در این صورت به ازای هر $g \in G$، $g = \prod_{i=1}^{k} m_i n_i$ که در آن $m_i \in M$ و $n_i \in N$. حال فرض کنید $m \in M \cap N$. با توجه به اتحاد هال در جابجاگرها داریم،

$$[g, m] = [\prod_{i=1}^{k} m_i n_i, m] = \prod_{i=1}^{k} ([m_i, m]^{g_i} [n_i, m]^{h_i}) = 1$$

که در آن g_i, h_i عناصر گروه G هستند. بنابراین $M \cap N \subseteq Z(G)$ و از آنجا $M \cap N = Z(G)$.

■

قضیه ۱.۱.۱۹. فرض کنید $G/Z(G)$ یک p-گروه متناهی از مرتبه p^3 باشد. در این صورت

(i) **اگر G هیچ زیرگروه بیشین آبلی نداشته باشد، آنگاه $C_G(x) = \langle x, Z(G) \rangle$ به ازای هر** $x \notin Z(G)$.

(ii) **اگر G دارای یک زیرگروه بیشین آبلی مانند M باشد، آنگاه M یکتا بوده و شامل $Z(G)$ می‌باشد. همچنین اگر $x \in G \backslash M$، آنگاه $C_G(x) = \langle x, Z(G) \rangle$ و اگر $x \in M \backslash Z(G)$، آنگاه** $C_G(x) = M$.

برهان: (i) واضح است که $\langle x, Z(G) \rangle \leq C_G(x)$. فرض کنید $y \in C_G(x) \backslash \langle x, Z(G) \rangle$. در این صورت $\langle x, y, Z(G) \rangle$ بنا به فرض یک زیرگروه بیشین و آبلی از گروه G خواهد شد که تناقض است.

(ii) فرض کنید $x \in Z(G) \backslash M$. در این صورت $G = \langle x, M \rangle$ و از آنجا G آبلی خواهد شد، بنابراین

$Z(G) \subseteq M$. فرض کنید $M_۱$ و $M_۲$ دو زیرگروه بیشین از گروه G باشند، بنا به قضیه ۱.۱.۱۸ داریم

$$p^۳ = [G : Z(G)] = [G : M_۱ \cap M_۲] \leq [G : M_۱][G : M_۲] = p^۲$$

لذا زیرگروه بیشین آبلی در صورت وجود یکتا خواهد بود. ادامه برهان مشابه (i) است.

■

قضیه ۱.۱.۲۰. (راسین[۴])
اگر G یک ۲-گروه متناهی باشد با ۲ = $|G'|$، آنگاه

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \prod_{i=۱}^{۲m} \mathbb{Z}_۲ \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

برهان: به [۵۰] مراجعه شود.

■

قضیه ۱.۱.۲۱. **فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت**

(i) **تکریختی** $\frac{G}{C_G(G')} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G')$ **وجود دارد.**

(ii) **اگر ۱ =** $G' \cap Z(G)$، **آنگاه** $|\frac{G}{Z(G)}| \leq |G'||\mathrm{Aut}(G')|$.

برهان: بنا به قضیه نرمالساز—مرکزساز برای گروه G'، $\frac{N_G(G')}{C_G(G')} = \frac{G}{C_G(G')} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G')$، بدیهی است.
(ii) به [۴۷] مراجعه شود.

■

تعریف ۱.۱.۲۲. (G_m-گروهها) در اینجا ویژگیهای G_m-گروهها را در جداول زیر مرتب کرده‌ایم:

[۴] David Rusin(1979)