بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

حدس بازسازی و ایدآل یالی گراف

پژوهشگر

لیلا شریفی

استاد راهنما

دکتر مسعود طوسی

استاد مشاور

دکتر حسین حاجی ابوالحسن

بهمن ماه ۸۸

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..........................

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۰/۱۰۹۳۸/د مورخ ۸۸/۱۰/۲۶ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: خانم لیلا شریفی به شماره شناسنامه: ۲۱۹۱۹ صادره از : تهران متولد: ۱۳۶۳ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: ریاضی محض

با عنوان:

حدس بازسازی و ایدال یالی گراف

به راهنمایی: آقای دکتر مسعود طوسی

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۸/۱۱/۱۴ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری وبا عنایت بـه مـاده ۲۰ آئـین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ ۱۸/۵ (هیجده و نیم) و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما: آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی	
۲. استاد مشاور: آقای دکتر حسین حاجی‌ابوالحسن	دانشیار	شهید بهشتی	
۳. استاد داور: آقای دکتر محمد تقی دیبایی	استاد	تربیت معلم	
٤. استاد داور: آقای دکتر محمدمهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	
٥. مدیر گروه: آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

از استاد گرانقدر جناب آقاي **دکتر طوسی** که در تمامي مراحل انجام پایان نامه مرا ياري نمودند کمال تشکر را دارم.

از جناب آقاي **دکترحاجی ابوالحسن** به خاطر مشاوره رساله و همچنین از جناب آقاي **دکتر ابراهیمی** و جناب آقاي **دکتر دیبایی** به خاطر حضور در جلسه دفاعیه و راهنماییهاي ارزندهشان قدرداني مي نمایم.

در انتها صمیمانه ترین قدرداني را نثار همراهان همیشه زندگي ام پدر و مادر بزرگوارم مي نمایم.

چکیده

فرض کنیم G یک گراف باشد. اگر از مجموعه‌ی رأس‌های این گراف، یک رأس را حذف کنیم، آن‌گاه زیر گراف به دست آمده را یک *کارت* می‌گوییم.

هرگاه بتوان یک ناوردا از یک گراف را از روی مجموعه‌ی کارت‌های آن معین کرد، آن‌گاه این ناوردا را *قابل بازسازی* گوییم. حدس بازسازی گراف‌ها بیان می‌کند که هر گراف ساده ی G روی n رأس ($n\geq ۳$) را تا حد یکریختی می‌توان از روی مجموعه کارت‌های G معین کرد.

مفاهیمی چون بُعد کرول، تابع هیلبرت، اعداد بتی مدرج و غیره معرفی خواهند شد و هم‌چنین در انتها گراف‌های معلق را معرفی می‌کنیم. سپس قابل بازسازی بودن آن‌ها ثابت می‌شود.

فهرست مطالب

فصل صفر

مقدمه

در نوشتن این رساله از مقاله‌ی Reconstruction conjecture and edge ideal استفاده شده است که در [۴] آورده شده است و همچنین از کتاب‌های[۵] و [۹]بیشتر استفاده شده است.

هدف ما در این رساله این است که بازسازی ناورداهای جبری وابسته به ایدآل‌های یالی از یک گراف ساده را بحث کنیم. برای فهم بیشتر این مطلب، لازم است چند نکته و تعریف بیان کنیم.

۱.۰. تعریف.

فرض کنید گراف ساده G با مجموعه رأس $V(G)$ داده شده باشد.(به بخش ۵.۱. مراجعه شود.) اگر از مجموعه ی $V(G)$ یک رأس حذف کنیم، آن گاه زیر گراف به دست آمده را یک کارت[۱] گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی کارت ها را، عرشه[۲] G نامیده و با $\mathcal{D}(G)$ نشان می‌دهیم.

۲.۰. تعریف و مثال.

یک ناوردا از یک گراف G قابل بازسازی[۳] گفته می شود، هر گاه بتوان آن را از روی مجموعه عرشه ی G معین کرد.

برای مثال گراف G را با مجموعه رأس $V(G)$ و مجموعه یال های $E(G)$ در نظر بگیرید که $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$. تعداد یال های G را بررسی می‌کنیم که قابل بازسازی است. زیرا وقتی یک رأس از گراف حذف می‌شود، آن گاه یال های مربوط به آن رأس حذف می‌شود.پس تعداد یال های حذف شده برابر با درجه آن رأس است. لذا هر گاه کارت C به دست آمده از حذف رأس v باشد آن گاه:

درجه رأس $v = |E(G)| - |E(C)|$. پس جمع درجه های رئوس گراف G برابر است با $\sum_{C\in\mathcal{D}(\mathcal{G})}(|E(G)| - |(E(C)|)$

پس با توجه به قضیه ۷.۵.۱. از فصل اول داریم:

$n|E(G)| - \sum_{C\in\mathcal{D}(\mathcal{G})}|E(C)| = 2|E(G)|$

پس داریم: $(n-2)E(G) = \sum_{C\in\mathcal{D}(\mathcal{G})}|E(C)$

لذا تعداد یال‌های G قابل بازسازی است.

---

[۱] cart
[۲] deck
[۳] reconstructible

به عنوان مثالی دیگر داریم که دنباله‌ی درجه‌ی گراف G (یک دنباله ی ناافزایشی از درجه ی همه رأس های G) قابل بازسازی است. زیرا با توجه به مثال قبل دنباله درجه برابر با یک ترتیب دادن دوباره به عناصر مجموعه ی
$\{|E(G)| - |E(C)| : G$ به ازای هر کارت C از عرشه ی $\}$می‌باشد.
لذا دنباله درجه قابل بازسازی است.

۳.۰. تعریف.

به طور مشابه یک خاصیت از یک گراف G ، قابل شناخت[۴] نامیده می شود، هر گاه فقط با در نظر گرفتن عرشه ی G بتوان تعیین کرد که آیا این خاصیت برای گراف G برقرار است.

حدس بازسازی گراف ها که توسط کلی [۵] و اولام [٦] در ۱۹۴۱ مطرح شد، بیان می‌کند که هر گراف ساده ی G روی n رأس ($n \geqslant ۳$) را تا حد یکریختی می‌توان از روی مجموعه عرشه ی G معین کرد. برای مثال، درخت ها و گراف های تا ۱۱رأس و گراف های ناهمبند قابل بازسازی هستند.

۴.۰. تعریف.

گراف G را با مجموعه رأس $V(G) = \{x_۱, ..., x_n\}$ در نظر بگیرید و فرض کنید $R = K[x_۱, ..., x_n]$ یک حلقه ی چند جمله ای روی میدان K باشد. اید آل یالی[۷] $I(G)$ از G ، ایدآلی از R است که توسط تک جمله‌ای های خالی از مربع x_ix_j ، تولید می شود که $\{x_i, x_j\}$ یک یال از G است.

ناورداهای جبری یک گراف G، ناورداهای حلقه ی خارج قسمتی S هستند که $S = \frac{R}{I(G)}$. هدف اصلی رساله این است که بررسی کنیم آیا ناورداهای جبری مختلف از یک گراف، قابل بازسازی هستند. در مقاله نشان داده شده که بعد، تابع هیلبرت و چندگانگی از حلقه‌ی S و همچنین اعداد بتی مدرج S در درجات ناماکسیمال،قابل بازسازی هستند.

---

recognizable[۴]
Kelly[۵]
Ulam[٦]
edge ideal[۷]

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز

در این فصل تعاریف و قضایای مورد نیاز برای مطالعه این پایان نامه گردآوری شده است. این فصل مشتمل بر پنج بخش می باشد که بخش پنجم آن مطالبی از نظریه گراف ها را که نیاز است، بیان می کند. در سرتاسر رساله منظور از حلقه، حلقه جابجایی یکدار است.

۱.۱ ایدآل های تک جمله‌ای

۱.۱.۱. تعریف.

فرض کنیم K یک میدان و $R = K[X_1, ..., X_n]$ یک حلقه ی چند جمله‌ای بر روی میدان K باشد. یک تک جمله‌ای[۸] در $K[X_1, ..., X_n]$ بصورت $X^a = {x_1}^{a_1}...{x_n}^{a_n}$ است که در آن $a = (a_1, ..., a_n)$ از اعداد صحیح نامنفی اند.

ایدآل $I \trianglelefteq K[x]$ یک ایدآل تک جمله‌ای نامیده می شود، هر گاه به وسیله‌ی تک جمله ای ها تولید شود. هم چنین تک جمله‌ای X^a را خالی از مربع[۹] می نامیم، هر گاه همه ی مختصات از a ، صفر یا یک باشد. اگر یک ایدآل بوسیله ی تک جمله‌ای‌های خالی از مربع تولید شده باشد،آن را یک ایدآل خالی از مربع می‌نامیم.

۲.۱.۱. تعریف و تذکر.

مجموعه ی تمام تک جمله ای های $R = K[X_1, ..., X_n]$ را با $Mon(R)$ نشان می دهیم. $Mon(R)$ یک K-پایه برای فضای برداری R است. به عبارت دیگر، هر چند جمله ای $f \in R$ را می توان به طور یکتا به صورت ترکیب خطی از عناصر $Mon(R)$ با ضرایب در K نوشت. قرار دهید:

$$f = \sum_{u \in Mon(R)} a_u.u \qquad\qquad (a_u \in k)$$

در این صورت مجموعه ی $supp(f) = \{u \in Mon(R) | \ a_u \neq 0\}$ محمل[۱۰] f نامیده می شود.

۳.۱.۱. گزاره.

فرض کنیم $\{u_1, ...u_m\}$ یک مجموعه مولد از تک جمله‌ای ها برای ایدآل تک جمله‌ای I باشد. در این صورت تک جمله‌ای ν متعلق به I است اگر و تنها اگر یک

---

[۸] monomial
[۹] square free
[۱۰] support

تک جمله ای ω و i، $1 \leqslant i \leqslant m$ موجود باشد به طوری که $\nu = \omega u_i$.
برهان.حالت عکس واضح است.
فرض کنیم که $\nu \in I$.آن گاه چند جمله ای های $f_i \in R = K[X_1, ...X_n]$ موجودند به قسمی که $\nu = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i$.در نتیجه با توجه به ۲.۱.۱. داریم: $\nu \in \bigcup_{i=1}^{m} supp(f_i u_i)$ و لذا $1 \leqslant i \leqslant m$ وجود دارد به طوری که $\nu \in supp(f_i u_i)$ ، در نتیجه $\omega \in supp(f_i)$ ی وجود دارد به طوری که $\nu = \omega u_i$. □

۴.۱.۱. تعریف.
هر نمایش یک ایدآل I از اشتراک ایدآل ها به صورت $I = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ را نافزونه[11] گوییم، هرگاه هیچ یک از ایدآل های Q_i را نتوان از نمایش حذف کرد.

۵.۱.۱. گزاره.
هر ایدآل تک جمله‌ای یک مجموعه مولد می‌نیمال یکتا از تک جمله‌ای ها دارد.
برهان. فرض کنیم $G_1 = \{u_1, ..., u_r\}$ و $G_2 = \{v_1, ..., v_s\}$ دو مجموعه مولد می‌نیمال برای ایدآل تک جمله‌ای I باشند. چون $u_i \in I$ یک v_j وجود دارد که $u_i = w_1 v_j$ برای یک تک جمله‌ای w_1. به طور مشابه یک u_k و یک تک جمله‌ای w_2 وجود دارد به قسمی که $v_j = w_2 u_k$. در نتیجه $u_i = w_1 w_2 u_k$. چون G_1 یک مجموعه مولد می‌نیمال برای I است، نتیجه می شود که $k = i$ و $w_1 w_2 = 1$. به ویژه $w_1 = 1$ و لذا $u_i = v_j \in G_2$. این نشان می دهد که $G_1 \subset G_2$. با تقارن دیده می شود که همچنین $G_2 \subset G_1$. □

۶.۱.۱. قضیه.
فرض کنیم $I \trianglelefteq R = K[X_1, ...X_n]$ یک ایدآل تک جمله‌ای باشد. در این صورت $I = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ که هر Q_i به وسیله توان های خالص از متغیرها تولید می شود. به عبارت دیگر هر Q_i به شکل $({x_{i_1}}^{a_1}, ..., {x_{i_k}}^{a_k})$ است. به علاوه، نمایش نافزونه به این

[11] irredundant

شکل از I یکتاست.

برهان. فرض کنیم $G(I) = \{u_1, ..., u_r\}$ مجموعه مولد می‌نیمال (و در نتیجه یکتا) برای ایدآل I باشد و فرض کنیم یکی از u_i ها از توان خالص نیست. مثلاً u_1. آن گاه می توانیم بنویسیم $u_1 = \nu\omega$ که ν و ω تک جمله ای های نسبت به هم اول هستند، یعنی $(\nu, \omega) = 1$ب.م.م. و $\omega \neq 1 \neq \nu$. ادعا می کنیم که $I = I_1 \bigcap I_2$ که $I_1 = (\nu, u_2, ..., u_r)$ و $I_2 = (\omega, u_2, ..., u_r)$: به وضوح $I \subseteq I_1 \bigcap I_2$. برعکس، فرض کنیم u یک تک جمله ای در $I_1 \bigcap I_2$ باشد. اگر u مضربی از یکی از u_iها باشد $(2 \leqslant i \leqslant m)$ آن گاه $u \in I$. وگرنه، u مضربی از ν و ω است و بنابراین مضربی از u_1 است (چون ν و ω ، نسبت به هم اول هستند و R یک قلمرو تجزیه یکتاست.) پس در هر صورت $u \in I$. اگر یکی از $G(I_1)$ یا $G(I_2)$ شامل عنصری باشند که توان خالص نیست، به صورت قبل عمل می کنیم و پس از تعداد متناهی بار، یک نمایش برای I بصورت اشتراک ایدآل های تک جمله ای تولید شده توسط توان های خالص به دست می‌آوریم. با حذف ایدآل هایی که شامل اشتراک بقیه هستند، بالاخره یک اشتراک نافزونه به دست می آوریم.

فرض کنیم $Q_1 \cap ... \cap Q_r = Q_1' \cap ... \cap Q_s'$ دو اشتراک نافزونه از ایدآل‌های تولید شده توسط توان های خالص باشند. نشان می دهیم که برای هر $1 \leqslant i \leqslant r$ ، یک $1 \leqslant j \leqslant s$ وجود دارد، به قسمی که $Q_j' \subset Q_i$ ، با تقارن هم چنین می توان دید که برای هر $1 \leqslant k \leqslant s$ ، یک $1 \leqslant l \leqslant r$ وجود دارد به قسمی که $Q_l \subset Q_k'$ و در نتیجه خواهیم داشت : $\{Q_1', ..., Q_s'\} = \{Q_1, ..., Q_r\}$ و $r = s$.

فرض کنیم $1 \leqslant i \leqslant r$ ، می توان فرض کرد که $Q_i = ({x_1}^{a_1}, ..., {x_k}^{a_k})$. فرض کنیم که $Q_j' \not\subset Q_i$ برای هر $1 \leqslant j \leqslant s$. آنگاه برای هر j ، ${x_{l_j}}^{b_j} \in Q_j' \setminus Q_i$ وجود دارد. این نتیجه می دهد که یا $l_j \notin \{1, ..., k\}$ یا $b_j < a_{l_j}$. فرض کنیم $u = lcm\{{x_{l_1}}^{b_1}, ..., {x_{l_n}}^{b_n}\}$. پس $u \in \bigcap_{j=1}^{s} Q_j' \subset Q_i$. بنابراین یک $1 \leqslant i \leqslant k$ وجود دارد به قسمی که ${x_i}^{a_i}$ ، u را عاد می کند و این به وضوح تناقض است. $\square$

۱.۱.۷. نتیجه.

یک ایدآل تک جمله‌ای، تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر توسط توان‌های خالص از متغیرها تولید شود.

برهان. فرض کنیم $Q = (x_{i_1}{}^{a_1}, ..., x_{i_k}{}^{a_k})$ ، و فرض کنیم $Q = I \bigcap J$ که I و J ایدآل های تک جمله‌ایی هستند که به طور سره شامل Q می باشند. با استفاده از قضیه قبل، داریم : $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ و $J = \bigcap_{j=1}^{s} Q_j{}'$ که Q_i و $Q_j{}'$ توسط توان های متغیرها تولید می شوند. بنابراین نمایش زیر را به دست می آوریم : $Q = (\bigcap_{i=1}^{r} Q_i) \bigcap (\bigcap_{j=1}^{s} Q_j{}')$. با حذف ایدآل های مناسب در اشتراک در طرف راست ، یک نمایش نافزونه برای Q به دست می آوریم. آنگاه یکتایی در قضیه قبل نتیجه می دهد که $Q = Q_i$ یا $Q = Q_j{}'$ برای یک i یا j ، که این تناقض است.

برعکس، اگر $G(Q)$ شامل یک تک جمله‌ای $u = \nu\omega$ با $1 = (\nu, \omega)$ب.م.م. و $\omega \neq 1 \neq \nu$ ، بنابراین با توجه به اثبات قضیه قبل ، Q را می توان به صورت اشتراک سره از ایدآل های تک جمله‌ای نوشت. □

⋆ با ترکیب قضیه و نتیجه بالا، می توان گفت که هر ایدآل تک جمله ای یک نمایش یکتا به صورت اشتراک نافزونه از ایدآل های تک جمله ای تحویل ناپذیر دارد.

۱.۱.۸. تعریف.

فرض کنیم $I \subset R$ یک ایدآل باشد. رادیکال[12] ایدآل I به صورت زیر تعریف می شود $\sqrt{I} = \{f \in R : f^k \in I \quad \exists k \in \mathbb{N}\}$ که اگر $I = \sqrt{I}$، آن گاه I را ایدآل رادیکالی گویند.

در اینجا بیان می کنیم که رادیکال یک ایدآل تک جمله‌ای، دوباره یک ایدآل تک جمله‌ای است.

۱.۱.۹. گزاره.

[12] radical

فرض کنیم I یک ایدآل تک جمله‌ای باشد، آنگاه $\{\sqrt{u} : u \in G(I)\}$ یک مجموعه مولد برای $\sqrt{I}$ است ، که اگر $u = x^a$ آنگاه $\sqrt{u} = \prod_{i, a_i \neq 0} x_i$ است.

برهان. به وضوح $\{\sqrt{u} : u \in G(I)\} \subset \sqrt{I}$. چون $\sqrt{I}$ یک ایدآل تک جمله ای است، کافیست نشان دهیم که هر تک جمله ای $\nu \in \sqrt{I}$ ، مضربی از یک $\sqrt{u}$ است که $u \in G(I)$. در حقیقت، اگر $\nu \in \sqrt{I}$ آن گاه برای یک $k \geqslant 0$ صحیح $\nu^k \in I$ و لذا $\nu^k = \omega u$ که $u \in G(I)$ و ω یک تک جمله ای است،در نتیجه ν^k مضربی از u است ، پس ν مضربی از $\sqrt{u}$ است که $u \in G(I)$ ، این نتیجه ی خواسته شده را می دهد. □

۱.۱.۱۰. نتیجه.

یک ایدآل تک جمله‌ای I یک ایدآل رادیکالی است، (یعنی $I = \sqrt{I}$) ، اگر و تنها اگر I یک ایدآل تک جمله‌ای خالی از مربع باشد.

۱.۱.۱۱. لم.

فرض کنید P ایدآل حلقه‌ی $R = K[x_1, ..., x_n]$ باشد. در این صورت P ایدآل اول تک جمله‌ای است اگر و تنها اگر P به شکل $< x_{i_1}, ..., x_{i_k} >$ باشد.

برهان. فرض کنید P یک ایدآل اول تک جمله‌ای باشد . $u = {x_1}^{a_1}...{x_n}^{a_n}$ یک مولد باشد. در این صورت چون P یک ایدآل اول است پس یک $1 \leqslant j \leqslant n$ وجود دارد که $x_j \in P$. بنابراین در مجموعه مولد P به جای u می‌توان x_j را قرار داد.

فرض کنید $\{x_1, ..., x_n\} - \{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\} = \{x_{j_1}, ..., x_{j_l}\}$. در این صورت یکریختی حلقه‌ای $\frac{K[x_1,...,x_n]}{<x_{i_1},...,x_{i_k}>} \cong K[x_{j_1}, ..., x_{j_l}]$ را داریم. بنابراین $< x_{i_1}, ..., x_{i_k} >$ ایدآل اول تک جمله‌ای است.

۱.۱.۱۲. نتیجه.

فرض کنید I ایدآل تک جمله‌ای خالی از مربع حلقه ی $R = K[x_1, ..., x_n]$ باشد. مجموعه ی ایدآل های اول می‌نیمال I را با $Min(I)$ نشان می دهیم. در این صورت

داریم :

الف) $I=\bigcap_{P\in Min(I)} P$

ب) هر ایدآل اول متعلق به $Min(I)$ تک جمله‌ای است.

برهان. الف) از جبر پیشرفته می‌دانیم که $\sqrt{I}=\bigcap_{\substack{P\in Spec(R)\\ P\supseteq I}} P$ ، چون $Min(I)\subseteq \{P\in Spec(R)|I\subseteq P\}$ ، پس $\bigcap_{\substack{P\in Spec(R)\\ P\supseteq I}} P\subseteq \bigcap_{P\in Min(I)} P$.
برای برعکس، می‌دانیم که هر گاه I ایدآلی از حلقه ی R و P ایدآل اولی از حلقه ی R باشد ، به قسمی که $I\subseteq P$ ، آنگاه P شامل یک ایدآل اول می‌نیمال I است.
بنابراین به عنوان یک نتیجه بلافاصله داریم:

$\bigcap_{P\in Min(I)} P\subseteq \bigcap_{\substack{P\in spec(R)\\ P\supseteq I}} P$ و لذا ثابت شد که $\sqrt{I}=\bigcap_{P\in Min(I)} P$.

بنابراین با توجه به نتیجه ۱۰.۱.۱. و فرض مسئله، حکم ثابت است.

ب) فرض کنید $P\in Min(I)$. از ۶.۱.۱. می‌دانیم که $I=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ که هر Q_i به شکل $< x_{i_1}{}^{a_1},...,x_{i_k}{}^{a_k} >$ است. لذا طبق قضیه‌ای در جبر جابجایی $1\leqslant j\leqslant m$ وجود دارد که $Q_j\in P$. فرض کنید $Q_j=< x_{j_1}{}^{a_1},...,x_{j_k}{}^{a_k} >$. در این صورت چون P ایدآل اول است، پس $< x_{j_1},...,x_{j_k} >\subseteq P$. از طرف دیگر داریم: $I\subseteq < x_{j_1},...,x_{j_k} >$. پس با توجه به اینکه $P\in Min(I)$ یعنی P ایدآل اول می‌نیمال I است، لذا $P=< x_{j_1},...,x_{j_k} >$.لذا P تک جمله‌ای است.□

۲.۱ حلقه های مدرج، مدول های مدرج، تابع هیلبرت

در این بخش حلقه و مدول مدرج را در حد لزوم رساله معرفی می‌کنیم و سپس تابع هیلبرت را تعریف می‌کنیم.

۱.۲.۱. تعریف.

مجموعه ی Γ با عمل دو تایی $+$ را یک تکواره مدرج کننده[۱۳] گوییم، هر گاه

(i) برای هر γ_1 و $\gamma_2 \in \Gamma$ ، $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_2 + \gamma_1$

(ii) برای هر γ_1 و γ_2 و $\gamma_3 \in \Gamma$ $\gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) = (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3$

(iii) عضوی مانند 0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\gamma \in \Gamma$ داشته باشیم $\gamma + 0 = \gamma$

$(i.v)$ برای هر γ_1 و γ_2 و $\gamma \in \Gamma$ ، $\gamma + \gamma_1 = \gamma + \gamma_2 \Longrightarrow \gamma_1 = \gamma_2$

۲.۲.۱. مثال.

الف) گروه آبلی $(\mathbb{Z}^n, +)$ ب) $(\mathbb{N}_0{}^n, +)$ ج)

۳.۲.۱. تعریف.

فرض کنید $(R, +, .)$ یک حلقه باشد. اعضای R همراه با عمل $+$ یک گروه تشکیل می دهند. بنابراین صحبت کردن از زیر گروه های جمعی R با معنی است.

الف) فرض کنید Γ یک تکواره ی مدرج کننده باشد. R را حلقه ی Γ ـمدرج[۱۴] گوییم، هر گاه R یک حلقه باشد و خانواده ی $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ از زیر گروه های جمعی R وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(i) $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ (جمع مستقیم گروه ها)

(ii) برای هر γ و $\gamma' \in \Gamma$ ، $R_\gamma R_{\gamma'} \subseteq R_{\gamma+\gamma'}$ که $R_\gamma R_{\gamma'}$ مجموعه ی تمام اعضایی است که به صورت زیر هستند : $a_{1\gamma}b_{1\gamma'} + \cdots + a_{n\gamma}b_{n\gamma'}$

ب) فرض کنید Γ یک تکواره مدرج کننده و $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ حلقه ای Γ ـمدرج

---

[۱۳] grading monoid
[۱۴] graded ring

باشد. M را R ـمدول Γ ـمدرج[۱۵] گوییم، هر گاه M یک R ـمدول باشد و خانواده ی $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ از زیر گروه های جمعی M وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(i) $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ (جمع مستقیم گروه ها)

(ii) برای هر $\gamma' \in \Gamma$ و γ ، $R_\gamma M_{\gamma'} \subseteq M_{\gamma+\gamma'}$

ج) فرض کنید که Γ یک تکواره مدرج کننده و $M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ مدولی Γ ـمدرج روی حلقه ی Γ ـمدرج $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ باشد.

(i) هر M_γ را مولفه همگن γ ـام M گوییم.

(ii) هر عضو از M_γ را عنصر همگن[۱۶] از درجه γ می نامیم و درجه ی هر عنصر همگن مانند m را با نماد $deg(m)$ نشان می دهیم.

(iii) برای هر $\gamma \in \Gamma$ ، عنصر صفر، عضوی همگن از درجه γ است.

(iv) هر عنصر $m \in M$ نمایش یکتایی به صورت مجموع عناصر همگن دارد:

به عبارت دیگر $m = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma$ $(m_\gamma \in M_\gamma)$ که این مجموع تنها شامل تعداد متناهی عبارت ناصفر است، در نمایش بالا هر m_γ را مولفه همگن m از درجه γ گوییم.

۱.۲.۴. مثال.

حلقه ی $R = K[x_1, ..., X_n]$ یک حلقه ی $\mathbb{N}_0$ ـمدرج و $\mathbb{N}_0{}^n$ ـمدرج است.

(i) $\mathbb{N}_0$ ـمدرج :

$$R_n = \{ \sum_{(i_1,...,i_d)\in\Lambda} a_{i_1,...,i_d} X_1{}^{i_1}...X_d{}^{i_d} | \Lambda \subseteq (\mathbb{N}_0)^d, i_1 + ... + i_d = n, n \geqslant 0\}$$

پس $R = \bigoplus_{n\geqslant 0} R_n$ و $R_t R_l \subseteq R_{t+l}$.

(ii) $\mathbb{N}_0{}^n$ ـمدرج:

$$R_b = \{aX_1{}^{b_1}X_2{}^{b_2}...X_n{}^{b_n} | a \in K\}$$

که $(b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{N}_0{}^n)$. پس $R_b R_{b'} \subseteq R_{b+b'}$ و $R = \bigoplus_{b\in(\mathbb{N}_0)^d} R_b$.

---

[۱۵] graded module

[۱۶] homogenous element