فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه ای برمفاهیم اولیه نظریه حلقه ها و مدول ها

۱.۱ حلقه و اید آل

مقدمه :

در این بخش مطالبی از نظریه حلقه ها را که در سراسر این پایان نامه مورد استفاده قرار می دهیم به صورت خلاصه یاد آوری می کنیم .

ابتدا برای تعریف حلقه ها لازم به تعریف گروه می باشیم .

تعریف ۱.۱.۱ : مجموعه غیر تهی G همراه با عمل د و تایی $* : G \times G \to G$ را یک گروه می نامیم هرگاه شرایط زیر را داشته باشیم :

الف) عمل $*$ بر G شرکت پذیر باشد .

ب) G دارای عضوی چون e باشد بطوریکه برای هر $x \in G$ داشته باشیم :

$$e * x = x * e = x$$

ج) برای هر $x \in G$ عنصری چون $y \in G$ موجود باشد بطوریکه $x * y = y * x = e$.

که عنصر e در تعریف فوق را عضو خنثی گروه می گوییم .

تبصره : اگر عمل گروه $(+)$ باشد آن را گروه جمعی و اگر عمل گروه $(.)$ باشد آن را گروه ضربی می نامیم .

تعریف ۲.۱.۱ : گروه $(G, +)$ را یک گروه آبلی نامیم ، هر گاه برای هر x, y متعلق به G داشته باشیم :

$$x + y = y + x$$

تعریف ۳.۱.۱ : مجموعه غیر تهی R را همراه با دو عمل دوتایی $'.'$ و $'+'$ حلقه می نامیم هر گاه داشته باشیم :

الف) $(R, +)$ یک گروه آبلی باشد.

ب) $(R, .)$ یک نیم گروه یا به عبارت دیگر عمل ضرب روی R شرکت پذیر باشد.

ج) عمل ضرب از چپ و راست روی عمل جمع توزیع پذیر باشد . یعنی برای هر $a,b,c \in R$ داشته باشیم :

$$(b+c).a = b.a + c.a$$

و

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

تعریف ۴.۱.۱ : حلقه R را یکه دار گوییم هرگاه دارای عضوی چون 1_R باشد بطوریکه برای هر $x \in R$ داشته باشیم ، $x.1_R = 1_R.x = x$.

تذکر : قرارداد می کنیم که تمام حلقه های مورد استفاده در ادامه مطالب حلقه های نه لزوماً جابجایی ولی یکه دار هستند .

مثال ۵.۱.۱ : فرض R یک حلقه باشد . مجموعه همه ماتریس های $n*n$ بادرایه های روی حلقه R را با نماد $M_n(R)$ نشان می دهیم و به سادگی می توان نشان داد که با جمع و ضرب معمولی ماتریس ها یک حلقه یکه دار است و آنرا حلقه ماتریس های $n*n$ روی R می نامیم .

تعریف ۶.۱.۱ : زیر مجموعه غیر تهی $S \subseteq R$ را یک زیر حلقه R گوییم هرگاه S خود با اعمال جمع و ضرب روی R یک حلقه باشد ، و آن را با نماد $S \leq R$ نشان می دهیم .

قضیه ۷.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه باشد و $S \subseteq R$ یک زیر مجموعه غیر تهی از آن ، آنگاه S زیر حلقه ای از R است اگر و تنها اگر :

الف) $\forall a,b \in S \Longrightarrow a-b \in S$.

ب) $\forall a,b \in S \Longrightarrow a.b \in S$.

تعریف ۸.۱.۱: فرض R یک حلقه و I یک زیر مجموعه غیر تهی از R باشد، گوئیم I یک اید آل راست R است ، هرگاه :

الف) $\forall a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$.

ب) $\forall a \in I, r \in R \Rightarrow a.r \in I$.

تبصره : توجه می کنیم که به همین ترتیب می توان اید آل چپ را تعریف کرد.

تعریف ۹.۱.۱ : زیر مجموعه غیر تهی I از R را یک اید آل (دو طرفه) گوئیم ، هر گاه هم اید آل چپ و هم اید آل راست باشد .

تعریف ۱۰.۱.۱ : فرض R یک حلقه و I یک اید آل آن باشد . در این صورت آنگاه دو عمل جمع و ضرب را روی R/I بصورت $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$ و $(a+I).(b+I)=(a.b)+I$ که د ر آن $a,b \in R$ می باشند تعریف می کنیم . بسادگی می توان نشان داد که R/I با دو عمل جمع و ضرب فوق یک حلقه است و آ نرا حلقه خارج قسمتی R/I می نامیم .

تعریف ۱۱.۱.۱: فرض R یک حلقه و I,J دو اید آل راست حلقه R باشند ، آنگاه مجموع آنها را با نماد $I+J$ نشان داده و بصورت زیر تعریف میکنیم .

$$I+J=\{a+b : a \in I, b \in J\}$$

بسادگی می توانیم بررسی کنیم $I+J$ یک اید آل راست R است .

تبصره : تعریف قبل را می توان برای مجموع دو اید آل چپ و یا دو طرفه را نیز بیان کرد.

تعریف ۱۲.۱.۱ : فرض می کنیم R یک حلقه و $I_۱, I_۲, \ldots$ گردایه‌ای ازاید آل های راست حلقه R باشند . مجموع آنها را با $\sum_{i\in I} I_i$ نشان داده و بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$\sum_{i\in I} I_i = \left\{ \sum_{j=۱}^{j=n} a_{i_j} : n \in N, i \in I, a_{i_j} \in I_{ij} \right\}$$

به سادگی می توان تحقیق کرد ا ین مجموع نیز یک اید آل راست R می باشد.

تبصره : بهمین ترتیب می توان مجموع گردایه ای دلخواه از اید آل های چپ و د و طرفه را نیز تعریف کرد.

تعریف ۱۳.۱.۱ : فرض R یک حلقه و $\sum_{i\in I} I_i$ یک مجموع از اید آل های راست R باشند. گوئیم

این مجموع از اید آل های راست مستقیم است ، هرگاه هر عضو آن نمایش یکتا در تعریف قبل داشته باشد.
در این صورت آنگاه مجموع فوق را با $\bigoplus \sum_{i\in I} I_i$ نشان می دهیم .

تعریف ۱۴.۱.۱ : فرض R یک حلقه و P یک اید آل R باشد . گوئیم P یک اید آل اول R است ، هرگاه اگر برای دو اید آل I, J از R داشته باشیم ، $IJ \subseteq P$ ، آنگاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

تبصره : مجموعه همه اید آل های اول حلقه R را با نماد $spect(R)$ نشان می دهیم .

تعریف ۱۵.۱.۱ : فرض R یک حلقه و M یک اید آل آن باشد ، گوئیم M یک اید آل ماکسیمال R است هر گاه اولاً $M \neq R$ و ثانیاً اگر برای هر اید آل J داشته باشیم $M \subset J$ ، آنگاه $J = R$.

تبصره : ۱) توجه می کنیم که به همین ترتیب می توان اید آل چپ و راست ماکسیمال رانیز تعریف کرد
۲) حلقه R را که فقط دارای یک اید آل ماکسیمال باشد ، حلقه ای موضعی $(local)$ می نامیم .

تعریف ۱۶.۱.۱ : فرض I و J دو اید آل راست حلقه R باشند ، حاصل ضرب آنها را با نماد IJ نشان داده و بصورت زیر تعریف میکنیم ؛

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} a_i bi : n \in N, a_i \in I, b_i \in J \right\}$$

که در این حالت نیز می توان نشان داد IJ نیز یک اید آل راست حلقه R است .

قضیه ۱۷.۱.۱ : در حلقه یکه دار R ، هر اید آل ماکسیمال ، اول است .
اثبات : بدیهی است.

تعریف ۱۸.۱.۱ : فرض R و R' دو حلقه باشند ، تابع $f : R \to R'$ رایک همریختی حلقه ها می نامیم هرگاه:
۱) برای هر x, y عضو R ، آنگاه $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
۲) برای هر x, y عضو R ، آنگاه $f(x.y) = f(x).f(y)$.

تبصره : در تعریف بالا داریم :

۱) هرگاه f یک به یک باشد ، آ نرا تکریختی مینامیم .

۲) هرگاه f پوشاباشد ، آنرا بروریختی مینامیم .

۳) هرگاه f یک به یک و پوشا باشد ، آنرا یکریختی می نامیم و دراین حالت می نویسیم $R \cong R'$.

تعریف ۱۹.۱.۱ : فرض $f : R \to R'$ یک همریختی حلقه ها باشد ، تصویر و هسته f را بصورت : $Imf = \{f(r) : r \in R\}$ و $kerf = \{r \in R : f(r) = 0_{R'}\}$ تعریف می کنیم .

تبصره: بسادگی می توان تحقیق کرد $kerf$ یک اید آل R و Imf یک زیر حلقه R' می باشد.

قضیه ۲۰.۱.۱ (اولین قضیه یکریختی حلقه ها) : فرض R, S دو حلقه و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه باشد ، آنگاه $R/kerf \cong f(R)$.

قضیه۲۱.۱.۱ (دومین قضیه یکریختی حلقه ها) : فرض R یک حلقه و I, J دو اید آل آن باشند . آنگاه $(I + J)/I \cong J/IJ$.

قضیه ۲۲.۱.۱ (سومین قضیه یکریختی حلقه ها) : فرض R یک حلقه و I, J دو اید آل و داشته باشیم ، $I \subset I$. آنگاه $\frac{R/I}{J/I} \cong R/J$.

تعریف ۲۳.۱.۱ : فرض R یک حلقه و $x \in R$ غیر صفر باشد ، گوئیم x وارون پذیر راست است ، هرگاه یک عضو غیر صفر دیگری چون y در R وجود داشته باشد بطوریکه $x.y = 1_R$. و نیز گوئیم $x \in R$ وارونپذ یر چپ است ، هرگاه عضو $z \in R$ وجود داشته باشد ، بطوریکه $z.x = 1_R$. هر گاه عضو x هم وارونپذ یر چپ و هم وارو نپذ یر راست باشد ، گوئیم وارونپذیر است و وارون آنرا با x^{-1} نشان می دهیم .

تعریف ۲۴.۱.۱ : حلقه یکه دار R را حلقه تقسیم گوئیم ، هرگاه هر عضو غیر صفر آن وارون پذیر باشد .

تعریف ۲۵.۱.۱ : حلقه R را یک میدان گوئیم هرگاه یک حلقه تقسیم و جابجایی باشد .

مثال ۲۶.۱.۱ : حلقه اعداد حقیقی R و حلقه اعداد گویا Q ، با جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی و گویا میدان می باشند .

تعریف ۲۷.۱.۱ : حلقه جابجایی و یکه دار R را حوزه صحیح می نامیم ، هر گاه اگر برای دو عضو $a, b \in R$ داشته باشیم ، $a.b = ۰$ ، آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

مثال ۲۸.۱.۱ : هر میدان یک حوزه صحیح است . و نیز حلقه اعداد صحیح Z یک حوزه صحیح است .

تعریف ۲۹.۱.۱ : حلقه جابجایی و یکه دار R را حوزه اید آل اصلی می نامیم (PID) ، هرگاه هر اید آل آن توسط یک عضو تولید شود . یا به عبارت دیگر اصلی باشد .

مثال ۳۰.۲.۱ : حلقه اعداد صحیح Z یک PID است .

۱ . ۲ مدول وزیرمدول

مقدمه :

در این بخش مدول را تعریف کرده و مفاهیم اولیه نظریه مدول ها در جبر را بیان می نمائیم . باز هم یاد آوری می کنیم که حلقه R در سراسر این پایان نامه ، حلقه ای یکه دار و نه لزوما جابجائی بوده و همه مدول ها ، مدول های راست یکانی می باشند .

تعریف ۱.۲.۱: فرض R یک حلقه و M یک مجموعه غیر تهی همراه با یک عمل دوتایی $'+'$ روی آن بطوریکه $(M, +)$ گروهی آ بلی است . M را یک $R-$ مدول راست گوئیم ، هرگاه بتوان یک ضرب اسکالر $M \times R \to M$: $'.'$ با ضابطه $(m, r) \to m.r$ تعریف کرد بطوریکه درشرایط زیر صدق کند:

۱) $\forall m, m' \in M, \forall r \in R \Longrightarrow (m + m').r = m.r + m'.r$.

۲) $\forall m \in M, \forall r.r' \in R \Longrightarrow m.(r+r') = m.r + m.r'$.

۳) $\forall m \in M, \forall r, r' \in R \Longrightarrow m.(rr') = (m.r).r'$.

۴) $\forall m \in M \Longrightarrow m.1_R = m$.

$R-$ مدول راست M را با نماد M_R یا برای سادگی در نوشتن با M نشان می دهیم . البته ما در طول مطالب از هر دو نماد استفاده خواهیم کرد .

قرار داد : توجه می کنیم که شرط آ خر در تعریف مدول را ، شرط یکانی مدول می نامیم و به طریق مشابه می توان $R-$ مدول (چپ یکانی) را نیز تعریف کرد . ولی همانگونه که گفتیم ، همه مدول های مورد استفاده در سراسر این پایان نامه مدول های راست یکانی بوده لذا از این به بعد برای سادگی در نوشتن ، لفظ (راست یکانی) بودن را حذف می کنیم .

مثال ۲.۲.۱ : بسادگی می توان تحقیق کرد که که هر حلقه R با جمع و ضرب روی خودش ، یک $R-$ مدول است و آنرا با نماد R_R نشان می دهیم .

مثال ۳.۲.۱ : فرض $(G, +)$ یک گروه آبلی باشد . گروه G بطور طبیعی مجهز به یک ضرب اسکالر است که در اینجا اسکالر ها همان اعداد صحیح می باشند . به این صورت که برای هر عضو $x \in G$ و برای هر عدد صحیح n ، تعریف می کنیم $x.n = nx$.
بسادگی می توان نشان داد G با ضرب اسکالر فوق یک $Z-$ مدول است .

تبصره : فرض R, R' دو حلقه و $f : R \to R'$ یک همریختی حلقه ها و نیز فرض M یک $R'-$ مدول باشد . با کمک این همریختی می توان به M یک ساختار $R-$ مدول داد . برای این منظور کافیست ضرب اسکالر را بصورت زیر تعریف کنیم .
$m.r = m.f(r)$ که در آن $m \in M$ و $r \in R$. بسادگی می توان نشان داد که با این ضرب اسکالر ، M یک $R-$ مدول است .

تعریف ۴.۲.۱ : فرض M_R یک $R-$ مدول و N یک زیر مجموعه غیر تهی آن باشد . گوئیم N یک زیر مدول M است و آ نرا با نماد $N \leq M$ نشان می دهیم ، هرگاه N با اعمال جمع و ضرب اسکالر M ، خود یک $R-$ مدول باشد .
معمولا برای اثبات زیر مدول بودن از محک زیر که به محک فشرده معروف است استفاده می کنند.

تبصره : اگر حلقه R را به عنوان مدول روی خودش در نظر بگیریم ، سپس زیر مدول ها در این حالت همان اید آل های راست حلقه R می باشند .

قضیه ۵.۲.۱ (محک فشرده) : فرض M_R یک $R-$ مدول و N یک زیر مجموعه غیر تهی آن باشد . آ نگاه N یک زیر مدول M است ، اگر و تنها اگر ؛

۱) $\forall m, m' \in N \Longrightarrow m + m' \in N$.

۲) $\forall m \in N, \forall r \in R \Longrightarrow m.r \in N$.

اثبات : بسادگی با توجه به تعریف ثابت می شود .

مثال ۶.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول باشد ، بسادگی می توان نشان داد که $(\circ) \leq M$ و $M \leq M$. این دو زیر مدول را ، زیر مدول های بدیهی M و هر زیر مدول غیر از این دو را زیر مدول غیر بدیهی M می نامیم.

تعریف ۷.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول و $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیر مدول های M باشند ، مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} m_{i_k} : i \geq 1, i_k \in I, m_{i_k} \in M_{i_k} \right\}$$

باکمک محک فشرده بسادگی می توان نشان داد که $\sum_{i\in I} M_i$ یک زیر مدول Mاست . و آ نرا مجموع زیر مدول های $(M_i)_{i\in I}$ می نامیم . در حالتی که مجموعه اند یسگذار I متناهی بصورت $I = \{1, 2, \ldots n\}$ باشد ، مجموع فوق را با نماد $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ نشان می دهیم .

تعریف ۸.۲.۱ : هر گاه در مجموع $\sum_{i\in I} M_i$ از زیر مدول های M ، هر عضو نمایش یکتا در تعریف قبل داشته باشد ، می گوئیم این مجموع از زیر مدول های M مستقیم است و آ نرا مجموع مستقیم خانواده $(M_i)_{i\in I}$ از زیر مدول های M نامیده و با نماد $\oplus \sum_{i\in I} M_i$ نشان می د هیم .

مثال ۹.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول و $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیر مدول های M باشند . با استفاده از محک فشرده می توان نشان داد که $\bigcap_{i\in I} M_i$ نیز یک زیر مدول M است .

تعریف ۱۰.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول و X یک زیر مجموعه غیر تهی از آن ، مجموعه XR را بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$XR = \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} x_{i_k} r_k : n \geq 1, x_{i_k} \in X, r_k \in R \right\}$$

بسادگی می توان نشان داد که XR یک زیر مدول M است و آنرا زیر مدول تولید شده توسط X می نامیم .

تبصره : در تعریف بالا اگر $X = \{x\}$ یک مجموعه تک عضوی باشد ، آنگاه XR را با (x) نشان داده و آنرا زیر مدول دوری تولید شده توسط x می نامیم . با توجه به تعریف بسادگی می توان نشان داد این زیر مدول کوچکترین زیر مدول M شامل $\{x\}$ است .

تعریف ۱۱.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول باشد ، زیر مجموعه غیر تهی X از M را یک مجموعه مولد M می نامیم هرگاه ، $XR = M$ باشد . و در حالت خاص اگر X متناهی باشد ، گوئیم M متناهی مولد است و بعلاوه اگر $X = \{x\}$ ، سپس M را یک $R-$ مدول دوری تولید شده توسط x می نامیم و می نویسیم $M = xR = (x)$.

مثال ۱۲.۲.۱ : حلقه R به عنوان $R-$ مدول روی خودش (R_R) ، یک $R-$ مدول دوری با مولد 1_R است . یعنی $R = 1_R R = (1_R)$.

تعریف ۱۳.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول و $N \leq M$ ، مجموعه M/N را بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$M/N = \{N + m : m \in M\}$$

به سادگی می توان نشان داد که M/N با جمع $(N+m) + (N+m') = N + (m+m')$ و ضرب اسکالر $(N+m).r = N + m.r$ که درآن $m, m' \in M$ و $r \in R$ ، یک $R-$ مدول است و آنرا مدول خارج قسمتی M/N می نامیم .

تبصره : توجه می کنیم که زیر مدول های ، مدول خارج قسمتی M/N بصورت N'/N می باشند که

در آن N' زیر مدول M و شامل N است . و نیز توجه می کنیم که عنصر صفر مدول M/N نسبت به عمل جمع برابر N می باشد $(\circ_{M/N} = N)$. ما برای هر زیر مدول N از M ، مدول خارج قسمتی M/N را یک فاکتور M می نامیم .

تعریف ۱۴.۲.۱ : فرض M و N دو $R-$ مدول باشند ، تابع $f : M \to N$ را یک $R-$ همریختی می نامیم هرگاه :

۱) برای هر $x, y \in M$ ، $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

۲) برای هر $x \in M$ و هر $r \in R$ ، $f(x.r) = f(x).r$.

تبصره : فرض $f : M \to N$ یک $R-$ همریختی باشد ، آنگاه:

۱) اگر f یک به یک باشد آنرا یک $R-$ تکریختی می نامیم .

۲)اگر f پوشا باشد ، آنرا یک $R-$ بروریختی می نامیم .

۳) اگر f یک به یک و پوشا باشد ، آنرا یک $R-$ یکریختی می نامیم و در این حالت می گوئیم M, N یکریخت می باشند و می نویسیم $M \cong N$.

تبصره : بسادگی می توان نشان داد رابطه یکریختی روی $R-$ مدول ها ، یک رابطه هم ارزی است .

مثال ۱۵.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول و $N \leq M$. تابع $\pi : M \to M/N$ باضابطه $\pi(x) = N + x$ را در نظر می گیریم . بسادگی می توان نشان داد که π یک $R-$ بروریختی است . و آ نرا $R-$ بروریختی طبیعی یا متعارف می نامیم .

تعریف ۱۶.۲.۱ : فرض M, N دو $R-$ مدول و $f : M \to N$ یک $R-$ همریختی بین آنها باشد ، هسته و تصویر f را بترتیب با نماد $ker(f)$ و $Im(f)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$Im(f) = \{f(m) : m \in M\} \qquad , \qquad ker(f) = \{m \in M : f(m) = \circ_M\}$$

بسادگی می توان نشان داد که $ker(f)$ زیر مدول M و $Im(f)$ زیر مدول N می باشد.

در زیر قضایای یکریختی حلقه هاو گروهها را به مدول ها تعمیم می دهیم .

قضیه ۱۷.۲.۱ (اولین قضیه یکریختی مدول ها): فرض M, N دو $R-$ مدول باشند و $f: M \to N$ یک $R-$ همریختی بین آنها ، آنگاه $M/ker(f) \cong Im(f)$ به علاوه اگر f پوشا باشد ، آنگاه $M/ker(f) \cong N$.

مثال ۱۸.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول دوری باشد ، بنابر این عضوی چون x از M که $M = xR$ حال تابع $f : R_R \to M$ را بصورت $f(r) = x.r$ تعریف می کنیم . بسادگی می توان نشان داد که f یک $R-$ همریختی پوشا می باشد . هسته این همریختی بصورت زیر است :

$$ker(f) = \{r \in R : x.r = \circ\}$$

این مجموعه را پوچساز x نامیده و با نماد $Ann_R(x)$ نشان می دهیم . که چون R را به عنوان $R-$ مدول راست در نظر می گیریم ، لذا $Ann_R(x)$ یک ایده ال راست R می باشد و بنابر اولین قضیه یکریختی مدول ها ، $M = xR \cong M/Ann_R(x)$.

تبصره : توجه می کنیم که پوچساز را نه تنها برای یک عضو بلکه برای هر زیر مجموعه دلخواه از $R-$ مدول M می توان تعریف کرد . به این صورت که فرض X یک زیر مجموعه غیر تهی M باشد ، $Ann_R(X)$ را در حالت کلی بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$Ann_R(X) = \{r \in R : r.x = \circ_M, \forall x \in X\}$$

که یک ایدآل راست R می باشد . و بعلاوه اگر $X = N$ یک زیر مدول M ، آنگاه $ann_R(N)$ یک ایدآل دو طرفه R می باشد .

به همین ترتیب اگر M یک $R-$ مدول باشد و I یک اید آل راست R ، آنگاه $Ann_M(I)$ را بصورت

$$Ann_M(I) = \{m \in M : mi = \circ \quad , \quad \forall i \in I\}$$

تعریف می کنیم . که یک زیر مدول M بوده و آنرا پوچساز I در M می نامیم .

قضیه ۱۹.۲.۱ (دومین قضیه یکریختی مدول ها) : فرض M یک $R-$ مدول و N, K دو زیر مدول M باشند ، در این صورت $N/(N \cap K) \cong_R (N+K)/K$.

قضیه ۲۰.۲.۱ (سومین قضیه یکریختی مدول ها) : فرض M یک $R-$ مدول و N, K دو زیر مدول

از M باشند با این ویژگی که $N \leq K$ ، در این صورت $K/N \leq M/N$ و نیز $\frac{M/N}{K/N} \cong_R M/N$.

تعریف ۲۱.۲.۱ : فرض می کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ای ناتهی از $R-$ مدول ها باشند . حاصلضرب دکارتی این خانواده را که بصورت :

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i) : m_i \in M_i, \forall i \in I\}$$

تعریف می شود ،

در نظر می گیریم . برای هر $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ و $r \in R$ ، جمع را روی آن بصورت

$$(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} = (m_i + m'_i)_{i\in I}$$

و ضرب اسکالر را بصورت

$$(m_i)_{i\in I}.r = (m_i r)_{i\in I}$$

تعریف می کنیم . بسادگی می بینیم که $\prod_{i\in I} M_i$ همراه با این عمل جمع و ضرب اسکالر یک $R-$ مدول است . و آ نرا حاصل ضرب مستقیم خارجی خانواده $\{M_i\}_{i\in I}$ از مدول ها می نامیم .

تبصره : فرض می کنیم $\prod_{i\in I} M_i$ حاصل ضرب مستقیم خارجی خانواده $\{M_i\}$ ها از $R-$ مدول ها باشد ، بسادگی می توان دید که تابع $\pi_i : \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ با تعریف $\pi((m_i)_{i\in I}) = m_i$ که در آن $m_i \in M_i$ ، $R-$ بروریختی می باشد و آ نرا $R-$ بروریختی طبیعی یا متعارف می نامیم . همچنین تابع $\alpha_i : M_i \to \prod_{i\in I} M_i$ با تعریف $\alpha(x_i)_{i\in I} = (0, \ldots, 0, x_i, 0 \ldots, 0)$ که در آن x_i در مولفه i ام واقع است ، یک $R-$ تکریختی است .

تعریف ۲۲.۲.۱ : فرض $(M_i)_{i\in I}$ خانواده ای ناتهی از $R-$ مدول هاباشد . مجموعه همه عضو های $(m_i)_{i\in I}$ از حاصل جمع مستقیم خارجی $\prod_{i\in I} M_i$ را که بجز تعدادی متناهی از m_i ها ما بقی صفر می باشند ، در نظر می گیریم . بسادگی می توان بررسی کرد که گردایه این عناصر تشکیل یک زیر مدول از $\prod_{i\in I} M_i$ می د هند و آنرا حاصل جمع مستقیم خارجی خانواده $(M_i)_{i\in I}$ می نامیم و آ نرا با نماد $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نشان می دهیم .

تبصره : فرض M یک $R-$ مدول و $(M_i)_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مدول های آن بطوریکه M مجموع مستقیم این خانواده باشد ، یعنی $M = \oplus \sum_{i\in I} M_i$. آنگاه M با حاصل جمع مستقیم خارجی خانواده

$(M_i)_{i\in I}$ یکریخت است . زیرا کافیست تابع f را بصورت

$$f : \bigoplus \sum_{i\in I} M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$$

با ضابطه $f(\sum_{i\in I} m_i) = (m_i)_{i\in I}$ تعریف کنیم . بسادگی می توان بررسی کرد که چون M مجموع مستقیم داخلی خانواده فوق از زیر مدول هایش است ، f خوشتعریف و بعلاوه یک $R-$ یکریختی است . در نتیجه می توان نوشت :

$$\bigoplus \sum_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$$

تعریف ۲۳.۲.۱ : فرض می کنیم M, N دو $R-$ مدول باشند . مجموعه همه $R-$ همریختی های از M به N را با نماد $Hom_R(M,N)$ نشان می دهیم . به آسانی می توانیم بررسی کنیم که $Hom_R(M,N)$ با جمع و ضرب توابع یک گروه آبلی است . و در نتیجه می توان گفت یک $Z-$ مدول است .

تبصره : توجه می کنیم که اگر $M = N$ ، آنگاه مجموعه همه $R-$ همر یختی های از M به M را بانماد $End_R(M)$ نشان می دهیم و به علاوه این مجموعه با جمع و ضرب توابع یک حلقه یکه دار است و آنرا حلقه درونریختی های M می نامیم .

تعریف ۲۴.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول و $X \subset M$ یک مجموعه مولد برای M باشد $(XR = M)$. گوئیم X یک پایه M است ، هرگاه مستقل خطی باشد . به عبارت دیگر اگر برای هر n عضو $x_1, x_2, \ldots, x_n$ از X و هر n عضو $r_1, r_2, \ldots, r_n$ از R ، داشته باشیم ، $\sum_{i=1}^{i=n} x_i r_i = 0$ ، آنگاه نتیجه بگیریم $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.
توجه می کنیم که اگر مدول را همان فضای برداری بگیریم آنگاه مفهوم پایه برای مدول همان مفهوم پایه برای فضای برداری است . حال مدول آزاد را تعریف می کنیم .

تعریف ۲۵.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول باشد ، گوئیم M آزاد است ، هرگاه دارای یک پایه باشد .

مثال ۲۶.۲.۱ : از جبر خطی می دانیم هر فضای برداری V روی میدان F به عنوان $F-$ مدول ، آزاد است .

قضیه ۲۷.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول باشد . سپس M آزاد است ، اگر و تنها اگر با یک مجموع

مستقیم از کپی های R ، یکریخت باشد .
اثبات : قضیه ۲.۱ صفحه ۱۸۱ از منبع [۱۰] .

نتیجه ۲۸.۲.۱ : فرض M یک $R-$ مدول باشد. آنگاه $R-$ مدول آزادی چون F و یک $R-$ همریختی پوشا مثل $\varphi : F \to M$ وجود دارد . که اگر قرار دهیم $K = ker(\varphi)$ ، سپس $F/K \cong M$.
اثبات : نتیجه ۲.۲ صفحه ۱۸۲ ار منبع [۱۰] .

تعریف ۲۹.۲.۱ : فرض R یک حوزه صحیح و M یک $R-$ مدول باشد . $T(M)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$T(M) = \{x \in M : Ann(x) \neq 0\}$$

بساد گی می توان نشان داد که $T(M)$ یک زیر مدول M است و آنرا زیر مدول تابدار M می نامند . اگر $T(M) = 0$ ، آنگاه M را یک مدول بی تاب و اگر $T(M) = M$ آنگاه M را یک مدول تابدار می نامند و نیز توجه می کنیم که برای هر $R-$ مدول دلخواه M ، $T(M/T(M)) = 0$ است .

تبصره : با توجه به تعریف زیر مدول تابدار از $Z-$ مدول M ، می توان نتیجه گرفت که $T(M)$ مجموعه همه عناصری از M می باشد که دارای مرتبه متناهی باشند در بحث گروه ها .

مثال ۳۰.۲.۱ : حلقه اعداد صحیح Z به عنوان $Z-$ مدول ، یک مدول بی تاب است . زیرا عناصر آن دارای مرتبه متناهی نمی باشند($\forall a,b \in Z \quad ,ab = 0 \Rightarrow a = 0 \quad ,b = 0$) .

قضیه ۳۱.۲.۱ (قانون مدولار برای مدول ها) :
فرض M یک $R-$ مدول و N ، K ، L زیر مدول های آن باشند بطوریکه $K \leq N$ ، آنگاه داریم :
۱. $N \cap (K + L) = K + (N \cap L)$.
۲. $(N + K = K + L \quad ,N \cap K = N \cap L) \Rightarrow N = K$.
اثبات : بدیهی است .

فصل ۲

مقد مه ای بر مفاهیم تکمیلی نظریه مدول ها

۲. ۱ مدول ها و حلقه های نوتری ، آرتینی و قضیه هاپکینز

مقدمه :

دراین بخش خاصیتی از مدول ها را بررسی می کنیم که به شر ط زنجیری روی زیر مدول های آن می پردازد که این مطالب در جبر جابجایی و ناجابه جایی اهمیتی زیاد دارد . باز هم یادآوری می کنیم که همه مدول های مورد استفاده در مطالب ، مدول های راست یکانی می باشند . لذا لفظ راست یکانی بودن را حذف می کنیم .

تعریف ۱.۱.۲ : فرض M یک $R-$ مدول باشد . گوئیم M نوتری است ، هر گاه هر زنجیر صعودی از زیر مدو ل های آن بصورت

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

سر انجام ایستا باشد . یا به عبارت دیگر وجود داشته باشد $n \in N$ بطوریکه$M_n = M_{n+1} = \cdots$.
شرط فوق روی زیر مدول ها را شرط زنجیره صعودی یا بصورت خلاصه $(A.C.C)$ می نامند .

تعریف ۲.۱.۲ : فرض M یک $R-$ مدول باشد ، گوئیم M آرتینی است ، هرگاه هر زنجیر نزولی از زیر مدول های آن بصورت

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

سر انجام ایستا باشد . یا به عبارت دیگر وجود داشته باشد $n \in N$ ، بطوریکه داشته باشیم $.M_n = M_{n+1} = \dots$
شرط فوق روی زیر مدول های M را شرط زنجیره نزولی یا بصورت مختصر $(D.C.C)$ می نامیم .

مثال ۳.۱.۲ : فرض G گروهی آبلی متناهی باشد ، اگر G را به عنوان $Z-$ مدول در نظر بگیریم ، چون تعداد زیر مدول ها که همان زیر گروهای G می باشند متناهی اند ، پس بسادگی می توان دید که G

هم نوتری و هم آرتینی می باشد .

مثال ۴.۱.۲ : حلقه Z را بعنوان $Z-$ مدول در نظر می گیریم . در این صورت چون هر زیر مدول آن اصلی بصورت (n) می باشد . لذا فرض می کنیم

$$(n_۱) \subseteq (n_۲) \subseteq (n_۳) \cdots \subseteq (n_k) \cdots$$

یک زنجیر صعودی از زیر مدول های آن باشد . در این صورت داریم ، $\cdots \mid n_۳ \mid n_۲ \mid n_۱$. از طرفی می دانیم که تعداد مقسوم علیه های عدد صحیح $n_۱$ متناهی است ، پس عددی طبیعی مثل k وجود دارد بطوریکه برای هر $i \geqslant k$ داریم ، $n_i = n_k$. ولی توجه می کنیم که Z آرتینی نمی باشد ، زیرا زنجیر $\cdots \supseteq (۶) \supseteq (۴) \supseteq (۲)$ از زیر مدولهای آن هرگز متوقف نمی شود . پس Z به عنوان $Z-$ مدول آرتینی نیست ولی همچنان می دانیم نوتری است .

قضیه ۵.۱.۲ : فرض M یک $R-$ مدول باشد . در این صورت M نوتری (آرتینی) است ، اگر و تنها اگر هر مجموعه ناتهی از زیر مدول های آن ، عضو ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد .

اثبات : $(\Leftarrow)$ فرض کنید $\sum$ مجموعه ای ناتهی از زیر مدول های M باشد که عضو ماکسیمال نداشته باشد . چون $\sum$ ناتهی است ، می توانیم عضو $M_۱$ از آنرا انتخاب کنیم . چون $M_۱$ عضو ماکسیمال نیست پس لزوماً عضوی از $\sum$ مثل $M_۲$ هست بطوریکه $M_۱ \subset M_۲$. با ادامه این روند یک زنجیر صعودی اکید از زیر مدول های M بصورت

$$M_۱ \subset M_۲ \subset M_۳ \ldots$$

بدست می آید که ایستا نیست که این با نوتری بودن M در تناقض است . در نتیجه هر گردایه ناتهی از زیر مدول های M دارای عضو ماکسیمال است .

$(\Rightarrow)$ فرض $M_۱ \subseteq M_۲ \subseteq M_۳ \ldots$ زنجیری صعودی از زیر مدول های M باشد . دراین صورت گردایه $\sum = \{M_i : i = ۱, ۲, \ldots\}$ از زیر مدول های M طبق فرض دارای عضو ی ماکسیمال چون M_n بوده بطوریکه برای هر $i \geqslant n$ ، $M_i = M_n$. بنابراین زنجیر فوق ایستاست و لذا M نوتری است . توجه می کنیم که در حالت آرتینی نیز اثبات بطریق مشابه است .

قضیه ۶.۱.۲ : فرض M یک $R-$ مدول و N زیر مدولی از M باشد . در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر N و M/N نوتری (آرتینی) باشند.

اثبات : در حالت نوتری اثبات را بیان می کنیم . و در حالت آرتینی بودن به طریق مشابه است .