بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

محاسبه‌ی بعد کرول ضرب تانسوری از جبرها برخاسته از $AF-$دامنه‌ها

نگارش

شهین قیامی گیاشی

استاد راهنما

دکتر رحمان بهمنی سنگسری

استاد مشاور

دکتر علی معدنشکاف

اسفند ۱۳۹۰

قدردانی

در این جا بر خود لازم می‌دانم به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» از استاد فرهیخته و فرزانه، جناب آقای دکتر رحمان بهمنی سنگسری که با راهنمایی‌های سازنده و دلسوزانه، نقش مهمی در نگارش این پایان‌نامه داشتند، تقدیر و تشکر نمایم.

(و یزکیهم و یعلمهم الکتاب و الحکمه)

معلما مقامت زعرش برتر باد، همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد
به نکته‌های دلاویز و نکته‌های بلند، صحیفه‌های سخن از تو علم پرور باد

هم‌چنین از پدر و مادر عزیزم تشکر می‌کنم

شکر خدا که هرچه طلب کردم از خدا، بر منتهای همت خود کامران شدم

به پاس ایثارتان، گرمای مهربانیتان در این سردترین روزگاران، به پاس انسانیتی که آموختم از اعمالتان و نه از گفتارتان، به پاس مأمنی که برایم در سرگردانی و ترس فراهم نمودید، به پاس آرزوهاتان که بر آستان آرزوهایم قربانی کردید و به پاس همه‌ی آن‌چه درک نکردم از خوبیتان، ای کتاب‌های مقدس زندگی‌ام که هرچه خوبیتان را ورق می‌زنم به پایان نمی‌رسد.

تقدیم شما باد، پدر و مادرم بزرگوارم

چکیده

در این پایان‌نامه هدف، مطالعه‌ی نظریه‌ی بعد کرول ضرب تانسوری جبرها روی یک میدان k است. در واقع فرمولی برای بعد کرول $A \otimes_k B$ ارائه می‌شود، که در آن A و B دو $k-$جبر و به ازای یک عدد صحیح و مثبت n، $A[X_1, ..., X_n]$ یک $AF-$دامنه است.

هم‌چنین، $AF-$دامنه‌های تعمیم یافته (به اختصار $GAF-$دامنه‌ها) معرفی می‌شوند و نشان داده خواهد شد که هر $k-$جبر A ، به‌ویژه هر $AF-$دامنه یک $GAF-$دامنه است. علاوه براین فرمولی برای بعد کرول $A \otimes_k B$، در حالتی که $A[X_1, ..., X_n]$ یک $AF-$دامنه و B یک $k-$جبر دلخواه باشد، ارائه می‌شود.

مطالب اصلی این پایان نامه براساس مراجع [۴]، [۶]، [۸] و [۲۴] می‌باشد.

واژه‌های کلیدی : ایده‌آل اول، بعد کرول، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها، درجه‌ی تعالی، ضرب تانسوری، $AF-$دامنه .

مقدمه

همه‌ی حلقه‌های مورد بررسی در این پایان‌نامه، جابجایی با عنصر همانی هستند و همه‌ی kـجبرها از درجه‌ی تعالی متناهی هستند. هم‌چنین $A[n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $A[X_۱, X_۲, ..., X_n]$ را نشان می‌دهد.

برخی از مولفان به مطالعه‌ی ساختار ایده‌آل اول و موضوعات وابسته به ضرب تانسوری جبرها روی یک میدان k، علاقه‌مند بوده و انگیزه‌ی اصلی آن‌ها برای انجام این کار نتیجه‌ی شارپ[۱] در [۳۳] بود که برای هر دو توسیع K و L از میدان k،فرمول $(dim(K \otimes_k L) = min(t.d.(K : k), t.d.(L : k))$ را به‌دست آورد. این فرمول کمی شگفت‌انگیز بود، زیرا انتظار می‌رفت ساختار ضرب تانسوری باید برحسب ساختار هر دو مولفه بیان شود نه فقط برحسب ساختار یک مولفه. اگرچه این فرمول ۱۰ سال قبل‌تر توسط گرودیندیک [۲] در [۲۴] (نکته‌ی ۴.۱.۲.۴، ص.۳۴۹) ارائه شده بود. این فرمول انگیزه‌ی اصلی وادسوورث[۳] برای کارش در [۳۴] بود. هدف او گسترش فرمول بالا به جبرهای A و B بود که $dim(A \otimes_k B)$، فقط به مشخصه‌های فردی A و B وابسته باشد. جبرهای مورد بررسی برای محاسبه‌ی بعد کرول در این مقاله، آن‌دسته از دامنه‌هایی بودند که در فرمول ارتفاع صدق می‌کنند (به اختصار AF[۴]$-$دامنه‌ها)، یعنی برای هر ایده‌آل اول p از A، $ht(p) + t.d.(\frac{A}{p}) = t.d.(A)$. این دسته از $AF-$دامنه‌ها شامل حلقه‌های اساسی از هندسه‌ی جبری مانند $k-$جبرهای متناهی مولد که دامنه هستند؛ است. بعدها بوچیبا[۵] در [۸] نتیجه‌ی وادسوورث را به ضرب تانسوری از دو $k-$جبر برخاسته از عقب‌برها گسترش داد. او هم‌چنین در مقاله‌ی فوق شرط لازم و کافی برای اینکه حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $A[n]$ یک $AF-$دامنه باشد ارائه داد. این مطلب انگیزه‌ای شد برای وی در [۶] جهت محاسبه‌ی بعد کرول $A \otimes_k B$، وقتی‌که $A[n]$ یک $AF-$دامنه باشد، که در فصل دوم از این پایان‌نامه به آن پرداخته شده است.

از طرف دیگر، جافرد[۶] در [۲۵] اثبات کرد که برای هر حلقه‌ی D و هر عدد مثبت n، بعد کرول

---

[۱] $Sharp$
[۲] $Grothendieck$
[۳] $Wadsworth$
[۴] $altitude formula$
[۵] $Bouchiba$
[۶] $Jaffard$

$D[n]$ را می‌توان به صورت طول یک زنجیر ویژه از $D[n]$ در نظر گرفت. پس از آن در [۱۴] بروئر [۷] قضیه‌ای معادل و ساده‌تر از قضیه‌ی جافرد ارائه داد، به‌طوری‌که به ازای هر ایده‌آل اول P از $A[n]$ که $P \cap A = p$، آن‌گاه $ht(P) = ht(p[n]) + ht(\frac{P}{p[n]})$. بعد بوچیبا در [۸] این قضیه را به ضرب تانسوری از kـجبرها تعمیم داد، سپس وی در [۷] فرمول مشابهی را برای $AF-$دامنه‌ها ارائه کرد و با استفاده از آن مباحثی را بیان کرد، که در فصل سوم به آن‌ها می‌پردازیم. هم چنین مطالب اصلی این پایان نامه از منابع [۴]، [٦]، [۸] و [۳۴] استخراج گردیده است.

شایان ذکر است که ارجاعات مطرح شده در فصل اول، به انتخاب پژوهشگر بوده و ممکن است آن مراجع برای اولین بار مطالب مورد نظر را ذکر نکرده باشند. هم‌چنین به دلیل دسترسی نداشتن به مراجع فرانسوی و نیز مراجع [۱] و [۲۱] مطالب برگرفته از آن‌ها را به‌صورت نقل‌قول بیان کرده‌ایم.

---

[۷] $Brewer$

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز آشنا خواهیم شد.

۱.۱ ضرب تانسوری جبرها

در این بخش خواص ضرب تانسوری k—جبرها را بررسی می‌کنیم و قضایای مربوطه را که بیشتر از منابع [۱۶]، [۲۳]، [۲۸] و [۳۰] گردآوری شده‌اند بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید A یک راست—مدول و B یک چپ—مدول روی یک حلقه‌ی R باشد. هم‌چنین F گروه آبلی آزاد بر مجموعه‌ی $A \times B$ باشد و نیز K زیرگروهی از F تولید شده به وسیله‌ی تمام عناصر به اشکال زیر باشد.

به‌ازای هر $r \in R$، $b, b' \in B$ و $a, a' \in A$

۱) $(a + a', b) - (a, b) - (a, b')$

۲) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$

۳) $(ar, b) - (a, rb)$

گروه خارج‌قسمتی $\frac{F}{K}$ حاصل‌ضرب تانسوری A و B نام دارد. این گروه با $A\otimes_R B$ نشان داده می‌شود. هم‌مجموعه‌ی $(a,b)+K$ که $(a,b)\in F$ با $a\otimes_R b$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ فرکنید K یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد. یک $K-$جبر حلقه‌ی Aای است به‌طوری‌که:

۱) $(A,+)$ یک $K-$مدول یکانی باشد.

۲) به‌ازای هر $k\in K$ و $a,b\in A$، $k(ab)=(ka)b$

تعریف ۳.۱.۱ توسیع F از میدان k متناهی‌مولد است هرگاه، $a_۱,a_۲,...,a_n$ در F موجود باشند به‌طوری‌که، $F=k(a_۱,a_۲,...,a_n)$.

قضیه ۴.۱.۱ یک حلقه‌ی R، یک $k-$جبر متناهی‌مولد است اگر و تنها اگر هر هم‌ریختی پوشا از $k-$جبرهای

$$\varphi : k[x_۱,x_۲,...,x_n]\to R$$

از حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای متناهی به R، یک نگاشت همانی روی k باشد.

برهان: رجوع شود به گزاره‌ی ۵ از فصل ۱۵ از [۱٦]

ضرب تانسوری جبرها، خواص ضرب تانسوری مدول‌ها را به ارث می‌برد.

قضیه ۵.۱.۱ اگر A و B دو $R-$جبر باشند، آن‌گاه $A\otimes_R B$ یک $R-$جبر است که

$$\forall a,a'\in A, b,b'\in B \quad (a\otimes_R b)(a'\otimes_R b')=aa'\otimes_R bb'$$

که ضرب تانسوری A و B نامیده می‌شود.

برهان: به گزاره‌ی ۵—۱ از فصل ۱۳ از [۲۳] رجوع شود. □

گزاره ۶.۱.۱ اگر $\varphi : A \to A'$ و $\psi : B \to B'$ هم‌ریختی از R—جبرها باشند، آن‌گاه

$$\varphi \otimes_R \psi : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$$

نیز هم‌ریختی از R—جبرهاست.

برهان: به گزاره‌ی ۵—۲ از فصل ۱۳ از [۲۳] رجوع شود. □

گزاره ۷.۱.۱ اگر A و B دو R—جبر جابجایی باشند، آن‌گاه $A \otimes_R B$ یک R—جبر جابجایی و هم‌چنین یک A—جبر و یک B—جبر نیز هست.

برهان: به گزاره‌ی ۵—۳ از فصل ۱۳ از [۲۳] رجوع شود. □

نکته ۸.۱.۱ اگر A و B دو k—جبر جابجایی و یکدار باشند، آن‌گاه $A \otimes_k B$ نیز چنین است و ضرب $a \otimes_k b$ و $a' \otimes_k b'$ برابر $aa' \otimes_k bb'$ است. مجموعه‌ی $\{a \otimes_k ۱_B | a \in A\}$ را با $A \otimes_k ۱_B$ و مجموعه‌ی $\{۱_A \otimes_k b | b \in B\}$ را با $۱_A \otimes_k B$ نشان می دهیم. آن‌گاه $A \otimes_k B = (A \otimes_k ۱_B)(۱_A \otimes_k B)$ [۲۰].

گزاره ۹.۱.۱ اگر A یک R—مدول آزاد باشد، آن‌گاه $i : A \to A \otimes_R B$ یک به یک است. اگر B یک R—مدول آزاد باشد، آن‌گاه $k : B \to A \otimes_R B$ یک به یک است. اگر R میدان باشد آن گاه i و k همواره یک به یک اند.

برهان: به گزاره‌ی ۵—۵ از فصل ۱۳ از [۲۳] رجوع شود. □

یک‌ریختی‌های زیر از ضرب‌های تانسوری وجود دارند که به ازای هر k—جبر A و B نیز برقرارند.

گزاره ۱۰.۱.۱ اگر N یک Rـمدول باشد، آن‌گاه $R \otimes_R N \cong N$.

برهان: به گزاره‌ی ۱ـ۱۸ از [۲۸] رجوع شود. □

گزاره ۱۱.۱.۱ اگر R حلقه‌ای جابجایی و M، N و L، R—مدول باشند، آن‌گاه یک‌ریختی زیر از R—مدول‌ها برقرار است

$$L \otimes_R (M \otimes_R N) \cong (L \otimes_R M) \otimes_R N$$

برهان: به نتیجه‌ی ۱۵ از فصل ۱۰ از [۱٦] رجوع شود. □

گزاره ۱۲.۱.۱ اگر R حلقه‌ای جابجایی و M و N دو R—مدول باشند. آن‌گاه یک‌ریختی منحصربه‌فرد از R—مدول‌های زیر برقرار است

$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M.$$

برهان: به گزاره‌ی ۲۰ از فصل ۱۰ از [۱٦] رجوع شود. □

نکته ۱۳.۱.۱

۱) اگر a ایده‌آلی از A باشد و $C = \frac{A}{a}$، آن‌گاه $B \otimes_A C = B \otimes_A \frac{A}{a} \cong \frac{B}{aB}$

۲) اگر B یک A—جبر و $A[x]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌هایی از متغیر x روی حلقه‌ی A باشد، آن‌گاه $B \otimes_A A[x] \cong B[x]$[۲۹].

فرض کنید A یک حلقه و M یک A—مدول باشد. فرض کنید φ نماد دنباله‌ای از A—مدول‌ها و نگاشت‌های خطی به‌صورت زیر باشد

$$\ldots \to N' \to N \to N'' \to \ldots$$

و $\varphi \otimes_A M$ نشان دهنده‌ی دنباله‌ی القاء شده‌ی زیر باشد

$$... \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to ...$$

آن گاه تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۴.۱.۱ M را روی A یکدست گوییم، هرگاه برای هر دنباله‌ی دقیق φ، دنباله‌ی $\varphi \otimes_A M$ نیز دقیق باشد. در این حالت آن‌را $A-$یکدست می‌نامیم. M را روی A صادقانه یکدست [1] می‌نامیم، هرگاه برای هر دنباله‌ی دقیق φ،

φ دقیق است $\Leftrightarrow$ دنباله‌ی $\varphi \otimes_A M$ دقیق باشد.

نکته ۱۵.۱.۱ (خاصیت راست—یکدستی ضرب تانسوری) فرض کنید A یک حلقه و N، $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$، $A-$مدول باشند، اگر دنباله‌ی $M_۱ \to M_۲ \to M_۳ \to ۰$ دقیق باشد، آن‌گاه دنباله‌ی

$$M_۱ \otimes_A N \to M_۲ \otimes_A N \to M_۳ \otimes_A N \to ۰$$

دقیق است.

هر دنباله‌ی دقیق φ به دنباله‌های دقیق کوتاه به‌صورت زیر شکسته می‌شود

$$۰ \to N' \to N \to N'' \to ۰$$

در تعریف یکدستی، با توجه به راست—یکدستی ضرب تانسوری، ما با دنباله‌های دقیق کوتاه سر و کار داریم. بنابراین ما می‌توانیم روی دنباله‌های دقیق به شکل زیر $۰ \to N' \to N$ تمرکز کنیم و دقیق بودن دنباله‌ی $\varphi \otimes_A M : ۰ \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ را بررسی می‌کنیم (پیوست A از [۲۹]).

---
[1] $faithfullyflat$

تعریف ۱۶.۱.۱ اگر $\phi : A \to B$ همریختی باشد که B را به یک A−مدول یکدست (به‌طور صادقانه یکدست) تبدیل کند، آن‌گاه ϕ را هم‌ریختی یکدست (به‌طور صادقانه یکدست) گوییم. اگر ϕ تک‌ریختی باشد، آن‌گاه B را توسیع به‌طورصادقانه یکدست از A گوییم.

گزاره ۱۷.۱.۱ هر راست R−مدول آزاد یکدست است.

برهان: به گزاره‌ی ۱−۲۲ از [۲۸] رجوع شود. $\square$

قضیه ۱۸.۱.۱ (قضیه‌ی رو قرار داشتن[۲]) فرض کنید R زیر حلقه‌ای از حلقه‌ی R' باشد که روی R صحیح است. اگر p ایده‌آل اولی از R باشد، آن‌گاه یک ایده‌آل اول p' از R' وجود دارد به‌طوری‌که روی p قرار می‌گیرد(به عبارت دیگر $p' \cap R = p$). علاوه‌براین اگر p' و p'' دو ایده‌آل اول از R' باشند که روی p قرار می‌گیرند و اگر $p' \subseteq p''$ باشد، آن‌گاه $p' = p''$.

برهان: به قضیه‌ی ۴ − ٦ از [۲۸] رجوع شود. $\square$

قضیه ۱۹.۱.۱ (قضیه پایین رو[۳]) فرض کنید $\phi : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها باشد، آن‌گاه برای هر $p, p' \in Spec(A)$ به‌طوری‌که، $p \subseteq p'$ و برای هر $P' \in Spec(B)$ که $P' \cap A = p'$، آن‌گاه $P \in Spec(B)$ وجود دارد که $P \cap A = p$ و $P \subseteq P'$.

برهان: به $(5.A)$ از [۳۰] رجوع شود. $\square$

قضیه ۲۰.۱.۱ قضیه‌ی قبلی معادل است با:

برای هر $p \in Spec(A)$ و هر ایده‌آل اول مینیمال P روی pB داریم، $P \cap A = p$.

برهان: به $(5.B)$ از [۳۰] رجوع شود. $\square$

---
[۲] Lying − over theorem
[۳] going − down theorem

قضیه ۲۱.۱.۱ اگر $\phi : A \to B$ همریختی یکدست از حلقه‌ها باشد، آن‌گاه قضیه‌ی ۱۹.۱.۱ برای ϕ برقرار است.

برهان: به $(5.D)$ از [۳۰] رجوع شود. □

توضیح ۲۲.۱.۱ **(ضرب تانسوری روی میدان)** هر توسیع میدان، از میدان k حالت خاصی از یک k—جبر است. بنابراین هر دو توسیع میدان از یک میدان k دارای ضرب تانسوری به‌صورت یک k—جبر هستند.

چون یک توسیع حلقه از k یک k—جبر است، پس هر دو توسیع حلقه‌ی جابجایی از k دارای ضرب تانسوری روی k است. که یک k—جبر جابجایی است. در این حالت هر دو توسیع میدان E و F از k دارای ضرب تانسوری $E \otimes_k F$ روی k هستند که هریک، یک k—جبر جابجایی هستند.
همریختی های کانونی $E \to E \otimes_k F$ و $F \to E \otimes_k F$ تک‌ریختی اند. پس بنابه ۹.۱.۱ $E \otimes_k F$ را می توان به صورت یک توسیع حلقه از E و هم F در نظر گرفت. چون هر توسیع میدان از یک میدان k یک k—مدول آزاد است، بنابراین، $E \otimes_k F$ یکدست است.

ضرب تانسوری از دو k—جبر A و B لزوماً یک دامنه نیست حتی اگر A و B دو دامنه باشند. مانند مثال زیر:

مثال ۲۳.۱.۱ فرض کنید $k = \mathbb{Q}$ و $A = B = \mathbb{Q}(i)$ باشد. آن‌گاه $A \otimes_k B$ یک دامنه نیست. زیرا $(\frac{۱}{۲} \otimes_k ۱ - \frac{i}{۲} \otimes_k i)$ یک مقسوم علیه صفر است:

$$(\frac{۱}{۲} \otimes_k ۱ - \frac{i}{۲} \otimes_k i)(\frac{۱}{۲} \otimes_k ۱ + \frac{i}{۲} \otimes_k i) = (\frac{۱}{۴} \otimes_k ۱ + \frac{i}{۴} \otimes_k i - \frac{i}{۴} \otimes_k i - \frac{۱}{۴} \otimes_k ۱) = ۰$$

تعریف ۲۴.۱.۱ یک میدان k را بسته‌ی جبری گوییم، هرگاه هر چندجمله‌ای با ضرایب در k، دارای یک ریشه در k باشد.

گزاره ۲۵.۱.۱ اگر k یک میدان بسته‌ی جبری باشد و K، K' دو توسیع میدان از k باشند، آن‌گاه $K \otimes_k K'$ یک دامنه‌ی صحیح است.

برهان: به نتیجه‌ی ۱، صفحه‌ی ۱۹۸ از [۳۵] رجوع شود.

فرض کنید M، M'، N و N'، Rـمدول باشند و فرض کنید $f : M \to M'$ و $g : N \to N'$ دو هم‌ریختی از $R-$مدول‌ها باشند، آن‌گاه نتایج زیر برقرارند.

گزاره ۲۶.۱.۱ اگر $f : M \to M'$ و $g : N \to N'$ دو هم‌ریختی پوشا باشند، آن‌گاه $f \otimes_R g$ نیز پوشاست.

برهان: به گزاره‌ی ۱$-$۲۰ از [۲۸] رجوع شود. □

گزاره ۲۷.۱.۱ اگر $f : M \to M'$ و $g : N \to N'$ دو هم‌ریختی پوشا باشند، آن‌گاه

$$ker(f \otimes_R g) = ker\ f \otimes_R N + M \otimes_R ker\ g.$$

برهان: به گزاره‌ی ۱$-$۲۱ از [۲۸] رجوع شود. □

قضیه ۲۸.۱.۱ اگر R یک حلقه و A' زیرمدولی از $R-$مدول A و B' زیرمدولی از $R-$مدول B باشد و $f : A \to B$ یک هم‌ریختی از $R-$مدول‌ها باشد به‌طوری‌که، $f(A') \subseteq B'$ باشد، آن گاه f یک هم‌ریختی $R-$مدول‌های $\overline{f} : \frac{A}{A'} \to \frac{B}{B'}$ با ضابطه‌ی $a + A' = f(a) + B'$ را القاء می‌کند. $\overline{f}$ یک یک‌ریختی $R-$مدول‌هاست، اگر و تنها اگر، $Imf + B' = B$ و $f^{-1}(B') \subseteq A'$. به‌ویژه اگر f پوشا باشد، به‌طوری‌که $f(A') = B'$ و $kerf \subseteq A'$. آن‌گاه $\overline{f}$ یک یک‌ریختی $R-$مدول‌هاست.

برهان: به نتیجه‌ی ۱ـ۸ ازفصل ۴ از [۲۰] رجوع شود. □

۲.۱ ایده‌آل‌های اول و موضعی سازی

در این بخش ضمن تعریف ایده‌ال‌های اول، موضعی‌سازی بر حسب یک ایده‌آل اول را بیان می‌کنیم. هم چنین برخی از تعاریف و قضایای مهم را که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بررسی می‌کنیم.

تعریف و نمادگذاری ۱.۲.۱ فرض کنید p یک ایده‌آل از حلقه‌ی A باشد، p را یک ایده‌آل اول گوییم هرگاه

۱) $p \neq A$

۲) اگر $xy \in p$ آن‌گاه $x \in p$ یا $y \in p$.

مجموعه ایده‌آل‌های اول A را با $Spec(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱ یک ایده‌آل در یک $k-$جبر A زیرمجموعه‌ی Iای است که یک ایده‌آل نسبت به ساختار حلقه‌ای A است.

تعریف ۳.۲.۱ ایده آل m از حلقه‌ی R را ماکسیمال گوییم، هرگاه هیچ ایده‌آل حقیقی مانند b از R موجود نباشد که شامل m باشد.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح با میدان کسرهای K باشد، $R-$زیرمدول A از K را یک ایده‌آل کسری گوئیم هرگاه عنصر غیرصفر d از R موجود باشد که $dA \subseteq R$.

تعریف ۵.۲.۱ ایده‌آل کسری A را وارون پذیر گوییم هرگاه ایده‌آل کسری B موجود باشد که $AB = R$. در این حالت B را وارون A گوییم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱ حلقه‌ی جابجایی با عنصر همانی R را نوتری گوییم هرگاه هر ایده‌آلش متناهی مولد باشد.

تعریف ۷.۲.۱ حلقه‌ی جابجایی A را که دقیقاً دارای یک ایده‌آل ماکسیمال باشد، حلقه‌ی شبه—موضعی [۴] می‌نامند. حلقه‌ی نوتری را که شبه—موضعی باشد را حلقه‌ی موضعی [۵] می‌نامند.

تعریف و نمادگذاری ۸.۲.۱ ایده‌آل اول p را، یک ایده‌آل اول مینیمال ایده‌آل a گوییم، هرگاه شامل ایده‌آل a باشد و هیچ ایده‌آل اولی شامل a نباشد که به‌طور کامل در p باشد.
مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال حلقه A را با$Min(A)$ نشان می‌دهیم. در یک دامنه‌ی صحیح، یک ایده‌آل اول را اول مینیمال گوییم هرگاه، شامل هیچ ایده‌آل اول غیر صفری نباشد.

تعریف و نمادگذاری ۹.۲.۱ فرض کنید $f : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها و b ایده‌آلی از B باشد، ایده آل $f^{-1}(b)$ از A را به‌صورت $b \cap A$ یا b^c می‌نویسیم و آن را ایده‌آل انقباض یافته از b می‌نامیم. اگر a ایده‌آلی از A باشد، آن‌گاه ایده‌آل $f(a)B$ را با aB یا a^e نشان می‌دهیم و آن‌را یک

[۴] $quasi - local\ ring$
[۵] $local\ ring$

توسیع از a به B می‌نامیم.

اگر b ایده‌آل اولی از B باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)$ همواره یک ایده‌آل اول است. اما $f(a)B$ به ازای هر ایده‌آل اول a از A، لزوماً یک ایده‌آل اول نیست. برای مثال $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ و $a \neq 0$ در نظر بگیرید، آن‌گاه $a^e = \mathbb{Q}$، یک ایده‌آل اول نیست.

گزاره ۱۰.۲.۱ اگر $f : A \to B$ یک هم‌ریختی حلقه‌ها باشد، آن‌گاه داریم

۱) $a \subseteq a^{ec}$ و $b^{ce} \subseteq b$

۲) $a^e = a^{ece}$ و $b^c = b^{cec}$.

برهان: به گزاره‌ی ۱—۱۷ از [۳] رجوع شود. □

تعریف ۱۱.۲.۱ عبارت بقاء یافتن [۶] بدین معناست که اگر $R \subset T$ دو حلقه باشند و I ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه I در T بقاء می‌یابد اگر و تنها اگر $IT \neq T$.

توضیح ۱۲.۲.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد و P یک ایده‌آل در R باشد. ایده‌آل $P[x]$ از $R[x]$ شامل چند جمله‌ای‌هایی از $R[x]$ است که دارای ضرایب در P هستند، بنابراین

$$P[x] \cap R = P$$

فرض کنید نگاشت کانونی زیر

$$\phi : R \to \frac{R}{P}$$

با ضابطه‌ی $r \to \bar{r}$ موجود باشد. تعریف می‌کنیم $\psi : R[X] \to (\frac{R}{P})[X]$ به‌طوری‌که

$$\psi(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + ... + p_n x^n) = \phi(p_0) + \phi(p_1)x + ... + \phi(p_n)x^n$$

[۶] $survives$